<u>Capítulo 3</u>: *"Números Complejos"*

1. Calcula:
   a) $i^{12} + i^{33}$
   b) $i^{23} + i^{25} - 1$

2. Expresa los siguientes números en la forma *bi*:
   a) $\sqrt{-3}$
   b) $\sqrt{-\frac{16}{25}}$

3. Efectúa las siguientes operaciones:
   a) $(2-6i)+(5-3i)$
   b) $(7+9i)-(8-12i)$
   c) $(5-2i)^3$
   d) $(1-5i)^2.(7+8i)$
   e) $\frac{(2-2i).(3-8i)}{1+i}$
   f) $\overline{\left(\frac{5-3i}{1-4i}\right)^2}$
   g) $3i.7i - 8i.(-4i)^2$
   h) $\frac{6+i}{\overline{\overline{2-3i}}}$
   i) $-(6+8i)-(1-12i)$

4. Encuentra el valor de a de modo que $z = (2+i)+(1-ai)+(2a-5i)$ sea un número real.

5. Encuentra los números reales *x* e *y* que satisfacen:
   a) $(x+yi).(3-2i) = 4+i$
   b) $(x+yi).(1+i) = 3-i$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $(3+i).z = 6+2i$
   b) z-$\frac{2-3i}{4+6i} = \overline{2-i}$

Autoras: Luciana Calderón – Marías de los Ángeles Fernández – Lidia Nieto

Respuestas a los ejercicios propuestos

1. a) $1+i$
   b) -1

2. a) $\sqrt{3}\,i$
   b) $\frac{4}{5}i$

3. a) $7-9i$
   b) $-1+21i$
   c) $65-142i$
   d) $-88-262i$
   e) $-16-6i$
   f) $-2i$
   g) $-21+128i$
   h) $\frac{15}{13}-\frac{16}{13}i$
   i) $-7+4i$

4. $a=-4$

5. a) $x=\frac{10}{13}$ $\quad y=\frac{11}{13}$
   b) $x=1$ $\quad y=-2$

6. a) $z=2$
   b) $z=\frac{47}{26}+\frac{7}{13}i$

Ejercicios Resueltos

1. Recordar que si n es un número natural mayor o igual que 4, para determinar la potencia n-esima de i, se divide n por 4 y se tiene $n = 4c + r$ con $0 \le r < 3$, $r \in N$, luego: $i^n = i^r$

a) $i^{12} + i^{33} = i^0 + i^1 = 1 + i$

b) $i^{23} + i^{25} - 1 = i^3 + i^1 - 1 = -i + i - 1 = -1$

2.

a) $\sqrt{-3} = \sqrt{(-1).3} = \sqrt{i^2.3} = \sqrt{i^2}.\sqrt{3} = i.\sqrt{3} = \sqrt{3}.i$

b) $\sqrt{-\dfrac{16}{25}} = \sqrt{(-1).\dfrac{16}{25}} = \sqrt{i^2.\dfrac{16}{25}} = \sqrt{i^2}.\sqrt{\dfrac{16}{25}} = i.\dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}.i$

3.

a) $(2-6i)+(5-3i)=(2+5)+(-6-3)i = 7-9i$

b) $(7+9i)-(8-12i)=7+9i-8+12i=(7-8)+(9+12)i=-1+21i$

c $(5-2i)^3 = 5^3 + 3.5^2.(-2i) + 3.5.(-2i)^2 + (-2i)^3 = 125 - 150i + 60i^2 - 8i^3 =$

$125 - 150i + 60.(-1) - 8.(-i) = 125 - 150i - 60 + 8i = 65 - 142i$

d) $(1-5i)^2.(7+8i) = (1 + 2.1.(-5i) + 25i^2).(7+8i) = (1 - 10i - 25).(7+8i) = (-24 - 10i).(7+8i) =$

$-168 - 192i - 70i - 80i^2 = -168 - 262i + 80 = -88 - 262i$

e)
$$\frac{(2-2i).(3-8i)}{1+i} = \frac{6-16i-6i+16i^2}{1+i} = \frac{6-22i-16}{1+i} = \frac{-10-22i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{-10-22i+10i+22i^2}{1^2+1^2} =$$

$$\frac{-10-12i-22}{2} = \frac{-32-12i}{2} = \frac{-32}{2} - \frac{12}{2}i = -16 - 6i$$

f)
$$\overline{\left(\frac{5-3i}{1-4i}\right)^2} = \overline{\left(\frac{5-3i}{1-4i}\cdot\frac{1+4i}{1+4i}\right)^2} = \overline{\left(\frac{5-3i+20i-12i^2}{1^2+(-4)^2}\right)^2} = \overline{\left(\frac{5+17i+12}{17}\right)^2} = \overline{\left(\frac{17+17i}{17}\right)^2} = \overline{(1+i)^2} = \overline{1+2.1.i+i^2} =$$
$$\overline{1+2i-1} = \overline{2i} = -2i$$

g) $3i.7i - 8i.(-4i)^2 = 21i^2 - 8i.16i^2 = -21 - 8i.(-16) = -21 + 128\,i$

h) $\dfrac{6+i}{\overline{2-3i}} = \dfrac{6+i}{2+3i} = \dfrac{6+i}{2+3i}\cdot\dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{12-18i+2i-3i^2}{2^2+3^2} = \dfrac{12-16i+3}{13} = \dfrac{15-16i}{13} = \dfrac{15}{13} - \dfrac{16}{13}i$

i) $-(6+8i) - (1-12i) = -6 - 8i - 1 + 12i = (-6-1) + (-8+12)i = -7 + 4i$

Autoras: Luciana Calderón – Marías de los Ángeles Fernández – Lidia Nieto

4.

$$z = (2+i)+(1-ai)+(2a-5i)$$
$$z = (2+1+2a)+(1-a-5)i$$
$$z = (3+2a)+(-4-a)i$$

Para que z sea un número real, la parte imaginaria debe valer cero. Luego:

$$-4-a=0 \quad \Rightarrow \quad a=-4$$

5.

$a)$ $(x+yi).(3-2i)=4+i$

$$3x-2xi+3yi-2yi^2=4+i$$
$$3x-2xi+3yi+2y=4+i$$
$$(3x+2y)+(-2x+3y)i=4+i$$

Dos complejos son iguales cuando coinciden sus partes reales e imaginarias. Luego:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 & (1) \\ -2x+3y=1 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema mediante el método de sustitución:

Despejamos la variable x de (1): $x = \frac{4-2y}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}y \quad (3)$

Reemplazamos (3) en (2):

$$-2.\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}y\right) + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-8}{3} + \frac{4}{3}y + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{3}y = \frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11}{13} \qquad (4)$$

Sustituimos (4) en (3):

$$x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{13} = \frac{10}{13}$$

Luego para que se verifique la igualdad $x = \frac{10}{13}$ e $y = \frac{11}{13}$

$b)\ (x + yi).(1 + i) = 3 - i$

$x + xi + yi + yi^2 = 3 - i$

$x + xi + yi - y = 3 - i$

$(x - y) + (x + y)i = 3 - i$

Dos complejos son iguales cuando coinciden sus partes reales e imaginarias. Luego:

$$\begin{cases} x - y = 3 & (1) \\ x + y = -1 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema mediante el método de sustitución:

Despejamos la variable x de (1): $x = 3 + y$ (3)

Reemplazamos (3) en (2):

$$3 + y + y = -1 \quad \Rightarrow \quad 2y = -4 \quad \Rightarrow \quad y = -2 \qquad (4)$$

Sustituimos (4) en (3):

$$x = 3 - 2 = 1$$

Luego para que se verifique la igualdad $x = 1$ e $y = -2$

6.

a)

$$(3+i).z = 6+2i \quad \Rightarrow \quad z = \frac{6+2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{18-6i+6i-2i^2}{3^2+1^2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{18+2}{10} \quad \Rightarrow \quad z = 2$$

b)

$$z - \frac{2-3i}{4+6i} = \overline{2-i} \quad \Rightarrow \quad z = 2+i+\frac{2-3i}{4+6i} \quad \Rightarrow \quad z = 2+i+\frac{2-3i}{4+6i} \cdot \frac{4-6i}{4-6i} \quad \Rightarrow \quad z = 2+i+\frac{8-12i-12i+18i^2}{4^2+6^2} =$$

$$z = 2+i+\frac{8-24i-18}{52} \quad \Rightarrow \quad z = 2+i+\frac{-10-24i}{52} \quad \Rightarrow \quad z = 2+i-\frac{10}{52}-\frac{24}{52}i \quad \Rightarrow \quad z = \frac{47}{26}+\frac{7}{13}i$$