<u>Capítulo 1</u>:*"El número real - Desigualdades e inecuaciones"*

1. Resuelve los sistemas de inecuaciones y representa en el eje real dichas soluciones.

a) $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{-2} > \dfrac{x}{2} - x \\ \\ 2(x+1) \leq 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1-3x}{-2} > -2x + \dfrac{3(x-1)}{2} \\ \\ x+1 \leq 3 \\ \\ \dfrac{x}{2} > \dfrac{x-4}{2} + \dfrac{-x+1}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x^2 - 3 \leq 5 + 2x^2 \\ \\ 2x - 6 > 4 \end{cases}$

2. Encuentra el conjunto solución para cada una de las siguientes inecuaciones. Expresa dicha solución en forma de intervalo, si es posible y representa en el eje real dichas soluciones.

a) $\dfrac{2x-5}{5} - \dfrac{-3x^2+3}{-3} < -x^2 + 1$

b) $3 - \dfrac{1}{x} \geq 2$

c) $\dfrac{-x-1}{-3x-1} \leq 2$

3. Dados los siguientes conjuntos:

$A = \left\{ x \in R \,/\, \dfrac{7+x}{x} < 1 \right\} \qquad B = \left\{ x \in R \,/\, 2.\left| x - \dfrac{3}{2} \right| \geq 1 \right\} \qquad C = \left\{ x \in R \,/\, \left| 3\left(\dfrac{x-4}{4} \right) \right| \leq 6 \right\}$

Encuentra y representa en el eje real el conjunto solución de:

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$

c) C

4. Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadero explica la propiedad utilizada y en caso de ser falso, proporciona un contraejemplo.

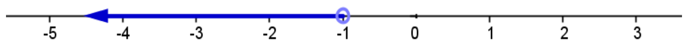
   a) $0 < x < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

   b) $\sqrt{x^2} = x \quad \forall\, x \in R$

Respuestas a los ejercicios propuestos:

1.

a) $S = (-\infty; -1)$

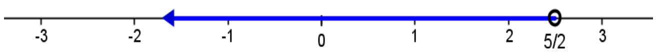


b) $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$

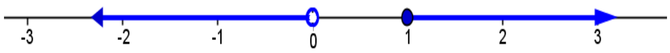
c) $S = \phi$

2.

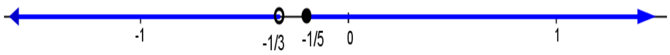
a) $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$



b) $S = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

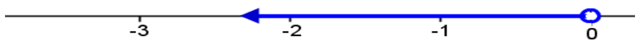


c) $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$

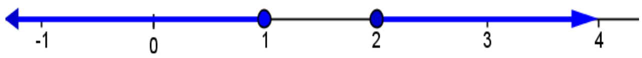


3.

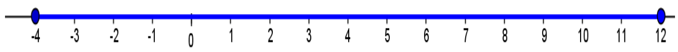
a) $S = (-\infty; 0)$



b) $S = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$



c) $S = [-4; 12]$



4.

a) Falso. Considera x=1 $\quad 0 < 1 < 2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{2}$

b) Falso: $\sqrt{x^2} = |x|$.Considera por ejemplo x= -2

Ejercicios resueltos.

1. a)

Para poder resolver el siguiente sistema de inecuaciones, debemos resolver cada una de las desigualdades, llamando S_1 y S_2 a cada una de las respectivas soluciones. El conjunto solución del sistema es la intersección de las soluciones S_1 y S_2.

Resolvemos la primera inecuación

$$\frac{3x+2}{-2} > \frac{x}{2} - x \iff 3x+2 < -2\left(\frac{x}{2} - x\right) \iff 3x+2 < -x+2x \iff 3x+2 < x \iff$$
$$3x - x < -2 \iff 2x < -2 \iff x < -1$$

Es decir, $S_1 = \{x \in R / x < -1\} = (-\infty;-1)$

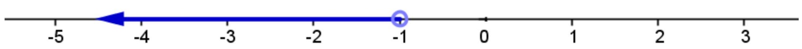
Resolvemos la segunda inecuación

$$2(x+1) \leq 8 \iff 2x+2 \leq 8 \iff 2x \leq 6 \iff x \leq 3$$

Es decir, $S_2 = \{x \in R / x < 3\} = (-\infty;3)$

Luego el conjunto solución del sistema es: $S = S_1 \cap S_2 = \{x \in R / x < -1\} = (-\infty;-1)$

La representación gráfica en el eje real es:



b)

Para poder resolver el siguiente sistema de inecuaciones, debemos resolver cada una de las desigualdades, llamando S_1 y S_2 a cada una de las respectivas soluciones. El conjunto solución del sistema es la intersección de las soluciones S_1 y S_2

Resolvemos la primera inecuación

$$4x^2 - 3 \leq 5 + 2x^2 \iff 4x^2 - 2x^2 \leq 5+3 \iff 2x^2 \leq 8 \iff x^2 \leq 4 \iff \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \iff |x| \leq 2 \iff$$
$$-2 \leq x \leq 2$$

Es decir, $S_1 = \{x \in R / -2 \le x \le 2\} = [-2;2]$

Resolvemos la segunda inecuación

$2x - 6 > 4 \Leftrightarrow 2x > 4 + 6 \Leftrightarrow 2x > 10 \Leftrightarrow x > 5$

Es decir, $S_2 = \{x \in R / x > 5\} = (5;+\infty)$

Luego el conjunto solución del sistema es: $S = S_1 \cap S_2 = \phi$

2.

b) Para encontrar el conjunto solución de la siguiente inecuación debemos primero restar 2 a ambos miembros y luego sacamos común denominador en el primer miembro

$$3 - \frac{1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{x} - 2 \ge 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \ge 0$$

Al tener una inecuación fraccionaria mayor o igual a cero debemos pedir que el numerador y denominador tengan el mismo signo o que el numerador sea cero. Así tendremos dos sistemas de inecuaciones que se autoexcluyen.

$$\text{(I)} \begin{cases} x - 1 \ge 0 & (1) \\ x > 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \text{(II)} \begin{cases} x - 1 \le 0 & (3) \\ x < 0 & (4) \end{cases}$$

Luego si S es el conjunto de soluciones será la unión de cada una de las soluciones $S = S_I \cup S_{II}$ y como $S_I = S_1 \cap S_2$ y $S_{II} = S_3 \cap S_4$

Se trata entonces de unir las soluciones de los dos sistemas de ecuaciones:

La solución del sistema I es

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Es decir, $S_I = \{x \in R / x \ge 1\} = [1;+\infty)$

La solución del sistema II es

$$\begin{cases} x \le 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Es decir $S_{II} = \{x \in R / x < 0\} = (-\infty;0)$

Luego el conjunto solución es $S = S_I \cup S_{II} = (-\infty;0) \cup [1;+\infty)$

La representación gráfica es:

3.

Para poder realizar las operaciones pedidas debemos encontrar cada uno de los conjuntos A, B y C

- A= $\left\{ x \in R / \frac{7+x}{x} < 1 \right\}$

  Resolvemos la inecuación

$$\frac{7+x}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{7+x}{x} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{7+x-x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{x} < 0$$

Como el numerador es positivo, la única opción solución posible es:

$x < 0$

Es decir, la solución es $S_A = \{x \in R / x < 0\} = (-\infty;0)$ entonces A $= (-\infty;0)$

- B= $\left\{ x \in R / 2\left| x - \frac{3}{2} \right| \geq 1 \right\}$

Resolvemos la inecuación con valor absoluto:

$2\left| x - \frac{3}{2} \right| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \left| x - \frac{3}{2} \right| \geq \frac{1}{2}$ aplicando las propiedades del valor absoluto obtenemos

$$x - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \qquad ó \qquad x - \frac{3}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \qquad ó \qquad x \leq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$x \geq 2 \qquad ó \qquad x \leq 1$$

Es decir, $S_B = (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$ entonces $B = (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$

- C= $\left\{ x \in R / \left| 3\left(\frac{x-4}{4} \right) \right| \le 6 \right\}$

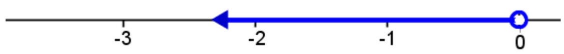
Resolvemos la inecuación, aplicando las propiedades del valor absoluto tenemos:

$$\left| 3\left(\frac{x-4}{4} \right) \right| \le 6 \Leftrightarrow -6 \le 3\left(\frac{x-4}{4} \right) \le 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{3} \le \frac{x-4}{4} \le \frac{6}{3} \Leftrightarrow -2 \le \frac{x-4}{4} \le 2 \Leftrightarrow -2.4 \le x-4 \le 2.4$$
$$\Leftrightarrow -8 \le x-4 \le 8 \Leftrightarrow -8+4 \le x \le 8+4 \Leftrightarrow -4 \le x \le 12$$

Es decir, $S_C = [-4;12]$ entonces $C = [-4;12]$

Buscamos ahora los conjuntos pedidos:

a) $A \cap B = (-\infty;0)$



b) $A \cup B = (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$

c) $C = [-4;12]$

4.

a) Es falso. Puedes considerar por ejemplo el caso en que $x = 1$

$0 < 1 < 2$ sin embargo $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$

b) Es falso, $\sqrt{x^2} = |x|$

c) Por ejemplo si consideramos el caso en que $x = -2$ tenemos

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \ne -2$