



Lignini, Maira
Barbiero, Cristina
Flury, Maria Isabel
Quaglino, Marta

Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas de la Escuela de Estadística.

NUEVAS ESTRATEGIAS EN CONTROL DE LA VARIABILIDAD DE PROCESOS

Introducción

A través del tiempo se han implementado diferentes estrategias cuya aplicación posibilita a las empresas ofrecer productos y servicios de mejor calidad. El Control Estadístico de Procesos (SPC) brinda herramientas que permiten detectar rápida y eficientemente desajustes en el proceso. Entre las técnicas más importantes del SPC están los gráficos de control. Su objetivo consiste básicamente en verificar si la característica de calidad estudiada (sea de un producto o de un servicio) se mantiene en un nivel adecuado. En base a esto, se han creado diferentes gráficos de control que dependen del tipo de datos utilizados.

En el caso univariado, el gráfico Shewhart para promedios (\bar{X}) es el más reconocido y ampliamente utilizado para monitorear el promedio del proceso, y los esquemas Shewhart R ó S , para controlar la variabilidad del mismo. Sin embargo, cuando el objetivo se centra en tratar de detectar pequeños o moderados cambios en los parámetros de un proceso, estos gráficos pueden ser poco efectivos ya que tardan mucho tiempo en detectar el desajuste. En estos casos se utilizan procedimientos alternativos que son más apropiados: los esquemas basados en sumas acumuladas (CUSUM) ó en medias móviles ponderadas exponencialmente en el tiempo (EWMA). Estos gráficos contienen información de varios períodos y se denominan "ponderados en el tiempo".

Durante mucho tiempo la atención estuvo centrada básicamente en el estudio de la media del proceso, existiendo varias propuestas para monitorearla. En la construcción de un gráfico para la media es necesario estimar de alguna manera la variancia o la desviación estándar de la variable, dado que una modificación en la variabilidad del proceso repercute tanto en los parámetros de localización como de dispersión.



Cabe mencionar que cuando se monitorean datos de un proceso continuo, es importante controlar incrementos y decrecimientos en la dispersión. El decrecimiento puede conducir a una mejora considerable en la calidad, debido a una reducción en la variabilidad. Sin embargo, muchos estudios han hecho foco sólo en la detección de incrementos, justificando que una disminución en la variabilidad del proceso normalmente sólo se produce luego de una acción correctiva. Por lo tanto, el momento del cambio de la variabilidad del proceso se conoce y no es necesario un gráfico de control para detectarlo. En las últimas décadas ha crecido la necesidad de contar con herramientas eficaces que sirvan para monitorear la variabilidad. En tal sentido se han hecho diferentes propuestas.

Gráficos de control para controlar la variabilidad del proceso

Para detectar cambios en la dispersión del proceso, se recogen a menudo muestras o subgrupos racionales de observaciones y se procede a calcular el desvío estándar (S) o el rango (R) para controlar la variabilidad de cada subgrupo. Así pues, al igual que el gráfico Shewhart \bar{X} , los esquemas S ó R sólo aportan información actual de cada subgrupo de observaciones y a menudo presentan una sensibilidad limitada ante pequeños y moderados cambios en la dispersión del proceso. Los gráficos CUSUM y EWMA para el monitoreo de la variabilidad han tomado mayor relevancia, habiéndose presentado diferentes propuestas. Cada una de ellas se ha ido construyendo en base a la variancia muestral S^2 y funciones simples de ésta, demostrando poseer un mejor rendimiento para la detección de cambios significativos en la variabilidad del proceso:

- *Gráficos de Control CUSUM para el monitoreo de la variabilidad: CUSUM R* (Page, 1963), *CUSUM S* (Page, 1963), *CUSUM $\ln(S^2)$* (Chang y Gan, 1995), *P_σ - CUSUM* (Acosta Mejía y colaboradores, 1999), *χ - CUSUM* (Acosta Mejía y colaboradores, 1999), *CP - CUSUM* (Acosta Mejía y colaboradores, 1999), *CUSUM S^2* (Montgomery, 2009).
- *Gráficos de Control EWMA para el monitoreo de la variabilidad: CHEWMA* (Crowder y Hamilton, 1992), *NEWMA* (Shu L. y Jiang W., 2008). Estos gráficos se analizan en los apartados siguientes.



Gráficos de control EWMA para el monitoreo de la variabilidad del proceso

El gráfico de control de medias móviles ponderadas exponencialmente (EWMA) fue introducido por Roberts en 1959. Cada punto graficado contiene información no sólo del último período sino también de los anteriores. A cada período se le da un peso que decrece en forma exponencial a medida que se aleja del actual.

Este esquema es una buena alternativa ante la deficiencia de los gráficos de control Shewhart en detectar pequeños alejamientos del proceso de su estado de control y a su vez adaptarse a situaciones en las que los CUSUM no son adecuados.

La aplicación de los gráficos EWMA para monitorear la variabilidad del proceso utiliza una función monótona para transformar la distribución de la variancia muestral en normal, o aproximadamente normal, de manera que se pueda extender fácilmente el uso de los gráficos de control tradicionales a los datos transformados. Entre las diversas transformaciones, la transformación logarítmica de la variancia muestral $\ln(S^2)$, ha sido la más utilizada debido a su simplicidad.

Crowder y Hamilton (1992) fueron los primeros en sugerir la adopción del esquema EWMA basado en una transformación normalizada de la estadística tradicional para controlar *incrementos* en la variancia del proceso. A dicho esquema lo denomina **CHEWMA**. La estadística que se grafica es:

$$Q_i = \text{máx}[(1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda y_i; \ln(\sigma_0^2)] \quad i = 1, 2, \dots,$$

donde $Q_0 = \ln(\sigma_0^2)$, λ es una constante de suavizamiento que satisface $0 < \lambda \leq 1$ e $y_i = \ln(S_i^2)$, siendo $\{S_i^2, i = 1, 2, \dots\}$ la secuencia de variancias muestrales basadas en un subgrupo de n observaciones en el tiempo i .

En el desarrollo del esquema se asume, sin pérdida de generalidad, que las observaciones de las muestras seleccionadas aleatoriamente se encuentran normal e idénticamente distribuidas y que la variancia nominal del proceso es $\sigma_0^2 = 1$. En ese caso resulta:

$$Q_i = \text{máx}[(1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda y_i; 0] \quad i = 1, 2, \dots,$$



Partiendo que $\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_i^2$ son variables aleatorias independientes χ_{n-1}^2 , ó equivalentemente, S_i^2 sigue una distribución Gamma con parámetro de forma $\alpha = \frac{(n-1)}{2}$ y parámetro de escala $\beta = \frac{2\sigma^2}{n-1}$, los autores obtienen que $y_i = \ln(S_i^2)$ sigue una distribución Log-Gamma, con media y variancia dados por:

$$\mu_y = E[\ln(S_i^2)] = \ln(\sigma^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4}$$

$$\sigma_y^2 = \text{Var}[\ln(S_i^2)] = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}$$

El gráfico proporciona una señal de alarma, cuando Q_i excede el límite superior de control h . Dicho límite está especificado en términos de la desviación estándar asintótica de un EWMA (σ_{EWMA}) con valores de $\ln(S_i^2)$, resultando:

$$h = \ln(\sigma_0^2) + L\sigma_{EWMA},$$

ó

$$h = L\sigma_{EWMA}, \text{ cuando } \sigma_0^2 = 1$$

donde

$$\sigma_{EWMA}^2 = \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \text{Var}[\ln(S_i^2)].$$

El uso de σ_{EWMA} conduce a un gráfico con límites fijos, en lugar de límites de control variables en el tiempo.

Las constantes λ y L , son elegidas por el usuario para obtener valores deseables de ARL_0 y ARL_1 . El ARL es el número promedio de puntos que deben graficarse, desde que se produce la salida de control, hasta que el gráfico la detecte. Dicho de otra manera, la estrategia involucra la determinación de (λ, L) de manera tal que produzcan un determinado valor de ARL_0 cuando el proceso se encuentra funcionando bajo la variancia nominal ($\sigma_i^2 = \sigma_0^2$) y que además brinden el menor valor posible de ARL_1 para un incremento específico de la desviación estándar del proceso. Una combinación de (λ, L)



será considerada óptima, si fijado un ARL_0 , produce el menor valor posible de ARL para un incremento específico de la desviación estándar.

Notar que σ_y^2 es independiente de σ_i^2 . En consecuencia, un incremento en la desviación estándar del proceso causaría un incremento en el nivel medio de los valores del gráfico CHEWMA.

Debido a que y_i se distribuye aproximadamente normal, indicando con $\mu_y|_{\sigma_i=\sigma_0}$ a la media bajo control de y_i , la estadística

$$Z_i = \frac{y_i - \mu_y|_{\sigma_i=\sigma_0}}{\sigma_y},$$

tendrá una distribución aproximadamente normal con desviación estándar igual a 1, es decir, $N(\gamma_i, 1)$ donde $\gamma_i = [\ln(\sigma_i^2/\sigma_0^2)]/\sigma_Y$. Es importante destacar que $\gamma_i = 0$ cuando el proceso se encuentra bajo control y $\gamma_i = [\ln(\sigma^2/\sigma_0^2)]/\sigma_Y$ cuando se produce un cambio en la desviación del proceso a un valor $\sigma_i = \sigma$.

Otro criterio para calcular la estadística EWMA sería truncar, llevando las observaciones negativas normalizadas Z_i a cero y acumulando sólo las observaciones positivas, o sea tomando $Z_i^+ = \max[0, Z_i]$ y calculando la estadística EWMA del gráfico como:

$$W'_i = \lambda Z_i^+ + (1 - \lambda)W'_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots,$$

Dado que Z_i sigue exactamente una distribución normal estándar $N(0,1)$, la media y la variancia de la variable normal Z_i^+ vienen dadas por (Barr y Sherrill, 1999):

$$E(Z_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

y

$$\text{Var}(Z_i^+) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right),$$

respectivamente. Por lo tanto, la media (en estado estable) de W'_i no es igual a cero, pero $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ refleja una situación bajo control.



Para llevar la media de W'_i a cero, puede reescribirse el EWMA recursivo de la ecuación anterior como:

$$W_i = \lambda \left(Z_i^+ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + (1 - \lambda)W_{i-1},$$

donde $W_i = W'_i - 1/\sqrt{2\pi}$.

Este nuevo gráfico EWMA, denominado **NEWMA** fue propuesto por Shu L. y Jiang W. en 2008. Detecta una señal de fuera de control cuando W_i excede el límite superior de control h , siendo

$$h = L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \sigma_{Z_i^+}.$$

Al igual que con el CHEWMA, el diseño del gráfico de control NEWMA requiere de una adecuada selección de los parámetros λ y L . Tomando como referencia el valor de ARL_0 y la magnitud de cambio que desea detectarse en la variancia del proceso, es posible determinar la combinación de estos parámetros que logren el menor valor posible de ARL para un proceso fuera de control.

En relación a la metodología utilizada en los esquemas CHEWMA y NEWMA, se puede concluir que el primero resetea la estadística EWMA a cero siempre que ésta sea negativa, mientras que el segundo resetea las observaciones negativas normalizadas actuales Z_i a cero y luego construye la estadística.

Simulación

A fin de comprobar empíricamente el rendimiento de los esquemas CHEWMA y NEWMA, se evalúa comparativamente la capacidad que tienen éstos para la detección de salidas de control, mediante un estudio por simulación. Se generan muestras aleatorias de $n=5$ cuyas observaciones se encuentran normal e idénticamente distribuidas con variancia nominal del proceso igual a 1. Se estiman los valores de ARL bajo control y fuera de control, frente a pequeños incrementos sucesivos en la desviación estándar del proceso. Se ajustan los parámetros de cada estrategia para un $ARL_0 = 200$. La estimación se



basa en 10000 repeticiones de la variable aleatoria *longitud de corrida* (RL), siendo el resultado de la simulación un vector de 10000 observaciones de la variable RL.

Resultados

La tabla 1 compara los valores de ARL de los gráficos CHEWMA y NEWMA para diferentes valores del parámetro λ e incrementos sucesivos del 10% en la desviación estándar del proceso, considerando $n=5$.

Se plantean los esquemas CHEWMA y NEWMA fijando un $ARL_0 = 200$, es decir el proceso produciría en promedio una falsa señal de salida de control cada 200 observaciones, o bien se podría decir que la probabilidad de que un punto exceda el límite de control debido a causas aleatorias es $\alpha=0.005$.

TABLA 1. Valores de ARL de los gráficos CHEWMA y NEWMA para diferentes valores de λ ($n=5$).

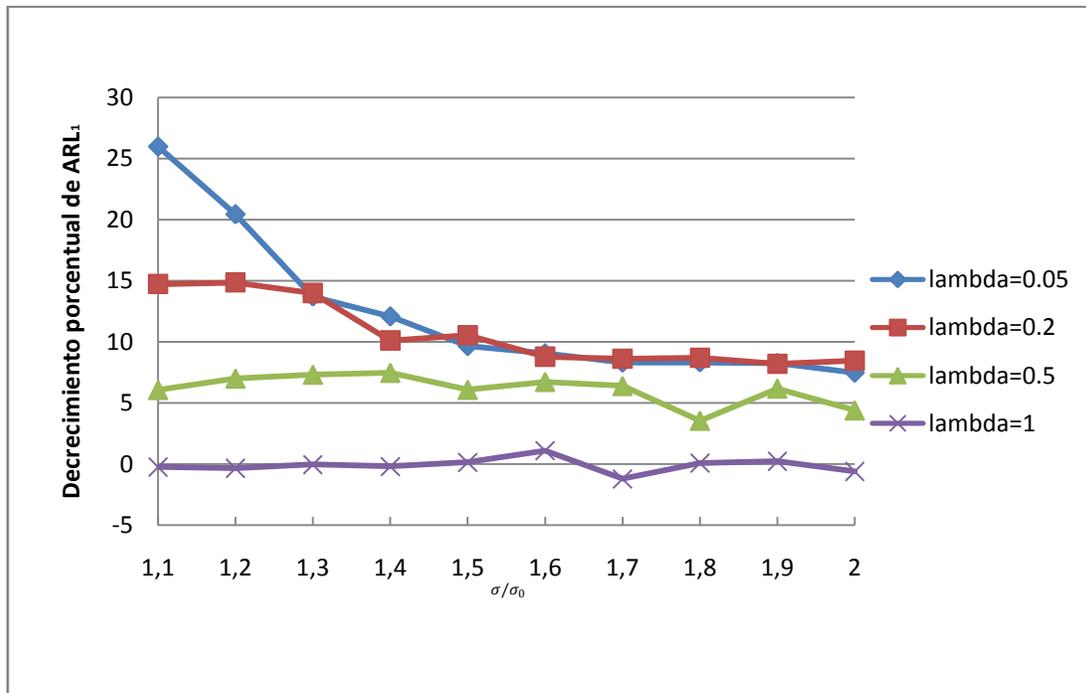
	$\lambda=0.05$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
CHEWMA								
$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	L = 1,055	1,303	1,513	1,598	1,657	1,667	1,652	1,634
1,0	200,995	201,480	199,989	199,697	199,176	202,568	201,454	201,977
1,1	42,992	43,874	46,237	48,034	52,123	56,463	61,254	63,692
1,2	18,053	18,215	18,937	19,697	21,362	23,600	26,699	28,007
1,3	10,727	10,603	10,632	10,784	11,327	12,323	13,849	14,612
1,4	7,591	7,339	7,100	7,055	7,218	7,672	8,590	9,283
1,5	5,949	5,693	5,433	5,241	5,165	5,376	5,956	6,396
1,6	4,939	4,660	4,368	4,200	4,058	4,146	4,462	4,669
1,7	4,277	4,032	3,732	3,526	3,350	3,334	3,569	3,624
1,8	3,817	3,569	3,271	3,076	2,826	2,828	2,880	3,032
1,9	3,457	3,231	2,930	2,741	2,522	2,444	2,475	2,563
2,0	3,157	2,947	2,670	2,444	2,255	2,180	2,185	2,234
NEWMA								
$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	L = 1.568	1.943	2.27	2.433	2.584	2.650	2.685	2.693
1,0	201,558	201,506	198,831	200,047	199,636	202,070	201,788	202,335
1,1	31,819	34,913	39,425	43,221	48,957	54,630	60,652	63,840
1,2	14,361	14,971	16,123	17,287	19,867	22,566	26,133	28,103
1,3	9,255	9,166	9,145	9,580	10,498	11,615	13,528	14,618
1,4	6,673	6,482	6,382	6,445	6,678	7,294	8,333	9,301
1,5	5,374	5,130	4,860	4,766	4,851	5,153	5,858	6,386
1,6	4,492	4,280	3,984	3,857	3,785	3,910	4,349	4,618
1,7	3,921	3,674	3,410	3,248	3,136	3,216	3,483	3,667
1,8	3,499	3,251	2,986	2,822	2,726	2,721	2,882	3,029
1,9	3,171	2,958	2,689	2,529	2,366	2,352	2,424	2,557
2,0	2,920	2,707	2,444	2,286	2,155	2,105	2,164	2,248



Se puede observar que para valores de $\lambda < 1$ los valores de ARL_1 para un esquema NEWMA son uniformemente más pequeños que los del esquema CHEWMA. Las diferencias entre los valores de ARL disminuyen a medida que el valor de λ aumenta. Cuando $\lambda=1$ ambos gráficos se reducen a un esquema unilateral superior Shewhart S y por lo tanto muestran aproximadamente el mismo rendimiento.

La figura 1 muestra la disminución porcentual que se produce en los valores de ARL_1 del gráfico NEWMA en relación con el gráfico CHEWMA para valores de $\lambda=0.05, 0.2, 0.5$ y 1 .

FIGURA 1: Comparación de la disminución porcentual de ARL_1 entre los gráficos NEWMA y CHEWMA ($n=5$).

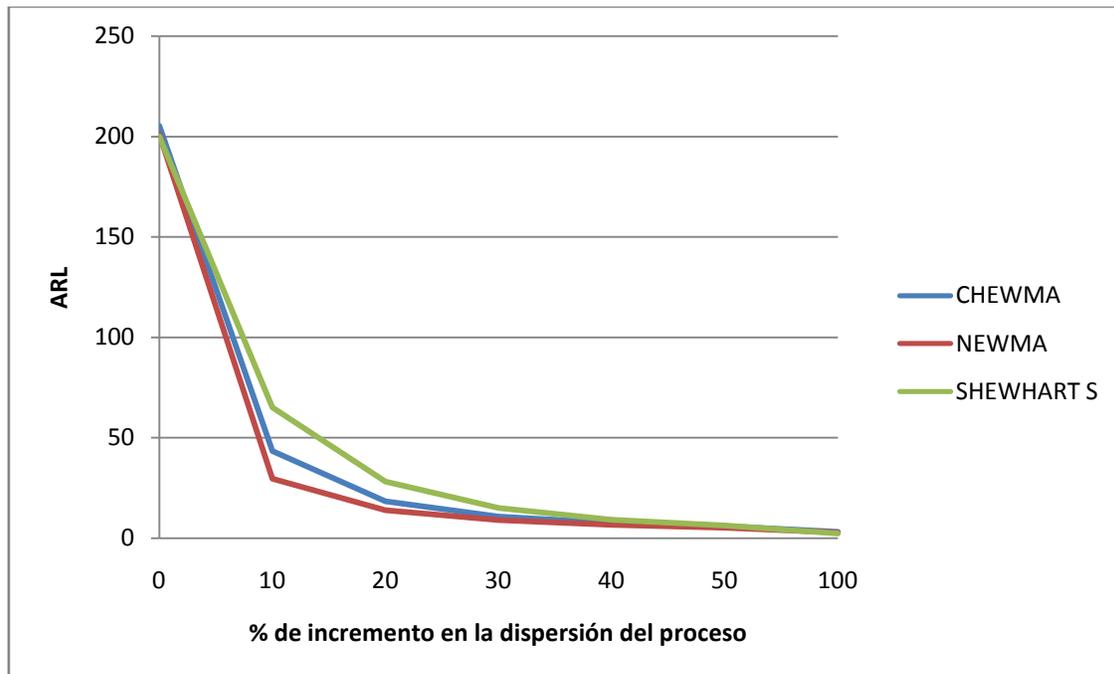


Puede observarse que el menor valor de λ ($\lambda=0.05$) es aquél que provoca el mejor comportamiento para el gráfico NEWMA. Para valores pequeños de λ , la mejora en el rendimiento es más notable cuando la magnitud de cambio en la dispersión del proceso es pequeña. Por ejemplo, la disminución porcentual en el valor de ARL cuando $\sigma = 1.1\sigma_0$ puede ser aproximadamente de un 25% cuando $\lambda=0.05$. Esto estaría indicando que el gráfico NEWMA supera al gráfico CHEWMA, especialmente para pequeños valores de λ , cuando se quiere detectar pequeños cambios en la variabilidad del proceso.



Cabe resaltar que las conclusiones arribadas a través de la tabla 1 se basan en un mismo valor de λ para ambos esquemas. Sin embargo, valores de λ iguales pueden no resultar óptimos a la hora de querer detectar un particular incremento en la desviación estándar del proceso. Por esta razón, a continuación se presenta la figura 2 la cual ilustra la comparación en el rendimiento de ambos esquemas a través de las curvas de ARL, con los parámetros óptimos (λ, L) para el caso en el cual se desee detectar un incremento del 20% en la desviación estándar del proceso. Los parámetros óptimos correspondientes a un gráfico CHEWMA para dicho caso son $(\lambda, L) = (0.05, 1.06)$ y los del esquema NEWMA $(\lambda, L) = (0.03, 1.27)$. Se realiza además la comparación con un gráfico Shewhart S con LSC=1.93, el cual ha sido diseñado para detectar el mismo incremento en la desviación estándar del proceso.

FIGURA 2. Curvas ARL correspondientes a los gráficos CHEWMA, NEWMA y Shewhart S para la detección de un 20% de incremento en la desviación estándar del proceso con $ARL_0=200$ y $n=5$.



Una vez más, puede verse a través de la figura 2 la superioridad en rendimiento que tiene el esquema NEWMA para un incremento específico en la desviación estándar del proceso. Este efecto se observa en el posicionamiento inferior que posee la curva ARL correspondiente al NEWMA en relación a la de los otros esquemas.



Consideraciones finales

Se estudiaron diferentes propuestas brindadas por distintos autores para el control de la variabilidad del proceso. Cada una de ellas se ha ido construyendo en base a la variancia muestral S^2 y funciones simples de ésta.

Se presentó un esquema EWMA, centrado solamente en la detección de *incrementos* en la dispersión, al cual se lo denominó gráfico de control CHEWMA y se lo comparó con una versión modificada de éste llamado NEWMA, que resetea observaciones negativas normalizadas a cero y luego construye la estadística.

La comparación de resultados muestra ampliamente que el esquema NEWMA tiene un mejor comportamiento que el CHEWMA para detectar incrementos en la dispersión del proceso. Se observa además la superioridad de éste con respecto al Shewhart S.

Aunque la propuesta sólo fue analizada para la detección de incrementos en la variancia, el nuevo esquema puede ser extendido para detectar disminuciones de la misma.

Se propone seguir avanzando en el estudio de la comparación de rendimiento en situaciones en las cuales las observaciones provienen de distribuciones no-normales, de manera de analizar distintos escenarios de distribución de probabilidad y evaluar el comportamiento de las diferentes estrategias de control.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta-Mejia, C. A.; Piagnatiello, J.J., Jr.; and Rao, B. V. (1999). "**A Comparison of Control Charting Procedures for Monitoring Process Dispersion**". IIE Transactions 31, pp. 569-579.
- Castagliola P., Maravelakis P. (2009). "**An EWMA chart for monitoring the process standard deviation when parameters are estimated**". Computational Statistics & Data Analysis. 53, 2653-2664.
- Chang, T. C. and Gan, F. F. (1995). "**A Cumulative Sum Control Chart for Monitoring Process Variance**". Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 2, April 1995.
- Chen, G. M.; Cheng, S. W.; and Xie, H. S. (2001). "**Monitoring Process Mean and Variability with One EWMA Chart**". Journal of Quality Technology, Vol. 33, No. 2, April 2001.



- Crowder, S. V. and Hamilton, M. (1992). "**Average Run Lengths of EWMA Controls for Monitoring a Process Standard Deviation**". Journal of Quality Technology, Vol. 24, No. , January 1992.
- MacGregor, J. F. and Harris, T. J. (1993). "**The Exponentially Weighted Moving Variance**". Journal of Quality Technology, Vol. 25, No. 2, April 1993.
- Montgomery D. (2009). "**Introduction to Statistical Quality Control**", 6th edition. Editorial Wiley.
- Page, E. S. (1963). "**Controlling the Standard Deviation by CUSUM and Warning Lines**". Technometrics 5, pp. 307-315.
- Shu, L. and Jiang, W. (2008). "**A New EWMA Chart for Monitoring Process Dispersion**". Journal of Quality Technology, Vol. 40, No. 3, July 2008.