



Bonifazi, Fernanda

Méndez Fernanda

Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas de la Escuela de Estadística

ESTIMACIÓN ROBUSTA DE LA FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Resumen

La función de autocorrelación juega un rol importante en el análisis de series de tiempo. Dicha función se utiliza para estudiar la estructura de dependencia subyacente del proceso (Wei, 2006; Brockwell and Davis, 1991). Este es un paso primordial en la construcción de un modelo matemático apropiado para los datos. Por lo tanto, es importante que la función de autocorrelación muestral presente un comportamiento similar o cercano al de la verdadera autocorrelación subyacente, incluso cuando los datos contengan *outliers* o valores extremos. De lo contrario, los principales objetivos del análisis de series de tiempo, tales como inferencias y pronósticos, pueden no ser informativos. Desafortunadamente, la ampliamente utilizada función de autocorrelación muestral (FACM) basada en el método de los momentos no es robusta. La presencia de valores atípicos puede distorsionar en gran medida la imagen completa de la FACM y conducir a una identificación errónea del proceso subyacente. En este trabajo se propone estudiar dos nuevos estimadores: uno basado en un estimador robusto de escala (Ma & Genton; 1998) y la función de autocorrelación muestral truncada (Chan & Wei; 1992). El desempeño de los nuevos estimadores y del estimador clásico -FACM- se compara mediante un estudio de simulaciones.

Abstract

The autocorrelation function plays an important role in time series analysis. It is often used to study the underlying dependence structure of the process (Wei, 2006; Brockwell and Davis, 1991). This is an important step in constructing an appropriate mathematical model for the data. Therefore, it is important to have a sample autocorrelation function which remains close to the true underlying autocorrelation function, even when outliers are present in the data. Otherwise, important goals of the time series analysis, such as inference and forecasting, can be non-informative. Unfortunately, widely used sample autocorrelation function based on the method of moments (SACF) is not robust. The presence of outliers can greatly distort the whole picture of SACF and lead to an erroneous identification of the underlying process. In this paper we propose to study two new estimators: one based on a robust estimator of scale (Ma & Genton, 1998) and the trimmed sample autocorrelation function (Chan & Wei, 1992). The performance of the new estimators and the classical estimator -FACM/SACF - are compared in a simulation study.

Palabras claves: función de autocorrelación; estimadores robustos; modelo ARMA



Introducción

Las series de tiempo frecuentemente son influenciadas por eventos externos o imprevistos, tales como huelgas, accidentes, cambios políticos, errores de tipeo o codificación, etc. La consecuencia de los mismos es que crean observaciones espurias que son inconsistentes con el resto de la serie a la que pertenecen. Generalmente, se desconoce el momento en que ocurre la intervención. Por lo tanto, es importante la detección y eliminación de observaciones atípicas u *outliers* ya que ellas producen una distorsión de los resultados obtenidos en el análisis de los datos, obteniéndose inferencias no confiables o hasta inválidas.

El proceso iterativo de detección de *outliers* se basa en el supuesto que el modelo subyacente para la serie libre de observaciones atípicas es conocido o puede ser identificado. En la práctica, sin embargo, el modelo subyacente es generalmente desconocido y debe ser identificado a través del análisis estándar de estadísticas muestrales, tales como FACM. Por lo tanto, se debe tener presente que el proceso de detección de valores atípicos trabaja bien cuando los efectos de los mismos son moderados y ellos no ocultan el patrón subyacente contenido en las estadísticas muestrales de una serie libre de *outliers*. En aquellos casos más graves, la contaminación por *outliers* puede hacer que sea imposible la identificación del modelo.

Para reducir los efectos adversos de los valores atípicos en la estimación de los parámetros, algunos métodos de estimación robustos fueron introducidos en la literatura. Chan y Wei (1992) introdujeron la función de autocorrelación muestral α -truncada (FACMT). La FACMT recorta o elimina el $\alpha\%$ de las observaciones extremas en el cálculo de la FACM. Ma y Genton (1998) propusieron un estimador de la función de autocovarianza basado en un estimador de escala altamente robusto (FACMR). Otros estimadores robustos de la función de autocorrelación incluyen el estimador *jackknife* propuesto por Quenouille (1949) y la función de autocorrelación y autocorrelación parcial muestral robusta de Masarotto (1987).

Cuando las series presentan *outliers*, todos los estimadores robustos propuestos de la función de autocorrelación presentan un mejor desempeño que el estimador clásico -FACM. Las propiedades de robustez de estos estimadores se pueden estudiar mediante estudios de simulación donde se compara el comportamiento del estimador clásico y los robustos en la presencia de valores atípicos. Dado que, en la práctica, se puede desconocer la existencia de valores extremos, es aconsejable calcular conjuntamente el estimador clásico y los estimadores robustos de la función de autocorrelación. Si dichas estimaciones son similares, se puede asumir que el efecto de los valores atípicos es insignificante. Por el contrario, si son significativamente diferentes, se debe actuar con cuidado.

En este trabajo se comparan, mediante un estudio de simulación y bajo diversos escenarios, el desempeño del estimador clásico -FACM- y de dos estimadores robustos: FACMT y FACMR.

En la sección siguiente se describen brevemente los estimadores de la función de autocorrelación utilizados; seguidamente se presenta el estudio de simulación y los resultados hallados.



Metodología

Función de autocorrelación

Dado un proceso z_t ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) se denomina *función de autocovariancias*, a la función de dos argumentos que describe las autocovariancias entre dos variables del proceso en dos instantes cualesquiera:

$$\gamma(t, t+k) = \gamma(k) = Cov(z_t; z_{t+k}) = E[(z_t - u_t)(z_{t+k} - u_{t+k})] \quad (2.1)$$

donde $u_t = E(z_t)$

En particular, se tiene que:

$$\gamma(t, t) = \gamma(0) = Var(z_t) = \sigma^2 \quad (2.2)$$

Se puede obtener una medida adimensional de la dependencia lineal generalizando la idea del coeficiente de correlación lineal entre dos variables. Se llama *función de autocorrelación (FAC)* a la función de dos argumentos que describe la correlación entre dos valores cualesquiera de la variable z_t y se expresa como:

$$\rho(t, t+k) = \rho(k) = \frac{Cov(z_t; z_{t+k})}{\sigma_t \sigma_{t+k}} = \frac{\gamma(t, t+k)}{\gamma^{1/2}(t, t) \gamma^{1/2}(t+k, t+k)} \quad (2.3)$$

Estimadores de la Función de autocorrelación

1. Función de autocorrelación muestral estándar

El estimador clásico de la función de autocorrelación, basado en el método de los momentos, es la función de autocorrelación muestral estándar (FACM).

Dada una serie de tiempo observada z_1, z_2, \dots, z_n , se define la FACM como:

$$\hat{\rho}_s(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

donde $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n z_t$ es el promedio de la serie observada.

Bartlett (1946) demostró que, para n grande, $\hat{\rho}_s$ se distribuye aproximadamente de forma normal con media ρ y variancia $V_{\hat{\rho}_s}/n$:

$$\hat{\rho}_s(k) \xrightarrow{d} N\left(\rho, \frac{V_{\hat{\rho}_s}}{n}\right), k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

donde

$$V_{\hat{\rho}_s} \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\rho_i^2 + \rho_{i+k} \rho_{i-k} - 4\rho_k \rho_i \rho_{i-k} + 2\rho_k^2 \rho_i^2) \quad (2.6)$$



En particular, si sólo los primeros m coeficientes de autocorrelación son distintos de cero ($\rho(k) = 0$ para $k > m$), la aproximación de Bartlett (2.6) resulta:

$$V_{\hat{\rho}_s} \approx (1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \dots + \rho_m^2) \quad (2.7)$$

En la práctica, se desconoce el valor de ρ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) y los mismos son reemplazados por sus estimaciones muestrales $\hat{\rho}_i$. Luego la expresión de la variancia estimada es:

$$\widehat{V}_{\hat{\rho}_s} \approx (1 + 2\hat{\rho}_1^2 + 2\hat{\rho}_2^2 + \dots + \hat{\rho}_m^2) \quad (2.8)$$

2. Función de autocorrelación muestral truncada

Chan y Wei (1992) introdujeron un nuevo estimador α -truncado de la función de autocorrelación, ya que el recorte o truncamiento de observaciones es un método muy simple y eficiente para incrementar la resistencia de un estimador frente a la presencia de valores atípicos o extremos.

Dada una serie de tiempo observada z_1, z_2, \dots, z_n y considerando $z_{(1)} \leq z_{(2)} \leq \dots \leq z_{(n)}$ las observaciones ordenadas de dicha serie, la función de autocorrelación muestral α -recortada o truncada (FACMT) está definida por:

$$\hat{\rho}_{T,\alpha}(k) = \frac{\hat{Y}_{T,\alpha}(k)}{\hat{Y}_{T,\alpha}(0)} \quad (2.9)$$

donde

$$\hat{Y}_{T,\alpha}(k) = \frac{1}{\sum_{t=k+1}^n L_{t-k}^{(\alpha)} L_t^{(\alpha)}} \left\{ \sum_{t=k+1}^n (z_{t-k} - \bar{z}^{(\alpha)})(z_t - \bar{z}^{(\alpha)}) L_{t-k}^{(\alpha)} L_t^{(\alpha)} \right\} \quad (2.10)$$

con

$$\bar{z}^{(\alpha)} = \frac{\sum_{t=1}^n z_t L_t^{(\alpha)}}{\sum_{t=1}^n L_t^{(\alpha)}}$$

y

$$L_t^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{si } z_t \leq z_{(g)} \text{ o } z_t \geq z_{(n-g+1)}, \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde g es la parte entera de $[\alpha n]$ y $0 \leq \alpha < 0,5$.

Bajo el proceso de ruido blanco, $\hat{\rho}_{T,\alpha}$ se distribuye aproximadamente para n grande de forma normal con media ρ y variancia $V_{\hat{\rho}_{T,\alpha}}/n$ (Dunsmuir & Robinson, 1981):

$$\hat{\rho}_{T,\alpha} \xrightarrow{d} N\left(\rho, \frac{V_{\hat{\rho}_{T,\alpha}}}{n}\right), k = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

donde



$$V_{\hat{\rho}_{T,\alpha}} = \frac{1}{\sum_{t=k+1}^n L_{t-k}^{(\alpha)} L_t^{(\alpha)}} \quad (2.12)$$

Se observa que, cuando $\alpha > 0$, $V_{\hat{\rho}_{T,\alpha}} > V_{\hat{\rho}_s}$ para el modelo de ruido blanco. En una serie libre de *outliers* se espera este resultado, ya que la información en la serie truncada será siempre menor que la de la serie original.

La elección del valor α es muy importante, dado que la FACMT recorta $\alpha \times n\%$ de los valores extremos la serie, a los cuales le asigna pesos nulos para la estimación de la función de autocorrelación. Si se elige un valor grande, la FACMT ya no será un estimador eficiente, ya que $V_{\hat{\rho}_{T,\alpha}}$ será más grande a medida que α se incrementa. Sin embargo, si se selecciona un valor muy pequeño de α , el objetivo del estimador (recortar posibles *outliers* en la serie) puede no ser totalmente cumplido. En la práctica, generalmente se recomienda utilizar α entre 1% y 2%, para aquellas series medianamente contaminadas α entre 3% y 5% y para aquellas series altamente contaminadas α entre 6% y 10%.

3. Función de autocorrelación muestral robusta

La estimación de la función de autocorrelación se basa tradicionalmente en un enfoque de posición o localización; sin embargo, puede basarse también en una medida de escala.

En este último contexto, Rousseeuw y Croux (1992, 1993) propusieron un estimador simple y altamente robusto:

$$Q_n(x) = c \{ |z_i - z_j|; i < j \}_{(h)} \quad (2.13)$$

donde $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)'$ es el vector de observaciones muestrales, c es una constante y $h = \left[\left(\binom{n}{2} + 2 \right) / 4 \right] + 1$. El factor c se elige de manera que el estimador sea consistente: en el caso de la distribución normal se considera $c = 2.2191$. Para el cómputo del estimador, primero se calculan todas las diferencias absolutas $|z_i - z_j|$ para $i < j$. Luego se ordenan de manera creciente y se calcula la estadística de orden h -ésima (cuando la muestra es grande se aproxima por el cuantil 0.25). Se multiplica dicho valor por el factor c , obteniendo así el estimador de escala Q_n .

Usando la expresión (2.13), se define un estimador robusto de la función de autocovariancia como sigue:

$$\hat{\gamma}_R(k) = 1/4 \left(Q_{n-k}^2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q_{n-k}^2(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \right) \quad (2.14)$$

donde \mathbf{u} es un vector que considera las primeras $n - k$ observaciones de la serie, es decir $\mathbf{u} = (z_1, z_2, \dots, z_{n-k})$ y $\mathbf{v} = (z_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$ es el vector formado por las últimas $n - k$ observaciones de la serie.

Es interesante señalar que el estimador Q_n no se basa en el conocimiento de ninguna medida de posición, esto está en contraste con la función de autocovariancia muestral clásica.

Bajo condiciones de regularidad, Q_n es un estimador consistente (Rousseeuw y Croux, 1993). Por ende, $\hat{\gamma}_R(k)$ es un estimador consistente de $\gamma(k)$, es decir $\hat{\gamma}_R(k) \rightarrow \gamma(k)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además, $\hat{\gamma}_R$ se distribuye asintóticamente normal



$$\hat{\gamma}_R \xrightarrow{d} N\left(\gamma, \frac{V_{\hat{\gamma}_R}}{n}\right), k = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{\hat{\gamma}_R} = & \int \int |IF((\mathbf{u}, \mathbf{v}), \gamma_R, F)|^2 dF(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ & + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \int \dots \int IF((u_1, v_1), \gamma_R, F) \\ & * IF((u_{1+k}, v_{1+k}), \gamma_R, F) dF((u_1, v_1), (u_{1+k}, v_{1+k})) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde IF es la función de influencia de γ_R bajo distribución gaussiana F

A partir de la ecuación (2.14) se obtiene un estimador robusto de la función autocorrelación (FACMR) como:

$$\hat{\rho}_R(k) = \frac{Q_{n-k}^2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q_{n-k}^2(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{Q_{n-k}^2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + Q_{n-k}^2(\mathbf{u} - \mathbf{v})} \quad (2.17)$$

Cabe señalar que $\hat{\gamma}_R$ depende de la elección del factor c ; no así el estimador $\hat{\rho}_R$. Sin embargo, c se puede calcular teniendo en cuenta diferentes distribuciones, aunque generalmente se utiliza la distribución gaussiana.

La FACMR se podría haber definido dividiendo $\hat{\gamma}_R(k)$ por $Q_n(\mathbf{u})$ y $Q_n(\mathbf{v})$. Sin embargo, este no sería un estimador natural de la FAC, ya que se podrían obtener valores fuera del intervalo $[-1; 1]$.

Valores atípicos

Las series reales se ven con frecuencia afectadas por ciertos sucesos puntuales externos tales como huelgas, accidentes, cambios políticos, crisis económicas, o incluso errores de tipeo o de medición. Las observaciones afectadas por estos acontecimientos o intervenciones pueden presentar una estructura distinta de las demás y aparecer como datos atípicos. En particular, podría ocurrir que este valor no mantenga la estructura de dependencia del resto de la serie.

Es importante ser capaz de identificar estas situaciones porque pueden sesgar la estimación de los parámetros, lo que producirá predicciones poco confiables.

La identificación de atípicos consiste en detectar observaciones que parecen haber sido generadas de forma distinta al resto. Posteriormente, habrá que investigar las causas de estos valores atípicos y, si se desea, incorporar estas observaciones en un modelo explícito.

Se pueden considerar dos casos básicos de datos atípicos: los aditivos, que son análogos a los que ocurren en datos estáticos, como por ejemplo un error de medición o de transcripción de un dato, y los innovativos, que son específicos de situaciones dinámicas.

Se dice que ha ocurrido un atípico aditivo (OA) sobre una serie temporal en el instante T si el valor de la serie se genera en ese instante de manera distinta al resto. El modelo que sigue la serie observada, z_t , afectado por un OA en el momento $t = T$ es:



$$z_t = \begin{cases} y_t, & t \neq T \\ y_t + \omega_A, & t = T \end{cases} \quad (2.18)$$

$$= y_t + \omega_A I_t^{(T)} \quad (2.19)$$

$$= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t + \omega_A I_t^{(T)} \quad (2.20)$$

donde y_t es la serie no contaminada por atípicos que se supone sigue un modelo ARMA, ω_A es la magnitud del efecto sobre la serie y $I_t^{(T)}$ es una variable indicadora que representa la presencia o ausencia de *outliers* en el momento T , es decir $I_t^{(T)} = 0, t \neq T$; $I_t^{(T)} = 1, t = T$.

El modelo para la serie que sufre un atípico innovativo (OI) de magnitud ω_I en el instante $t = T$ es:

$$z_t = \begin{cases} y_t, & t < T \\ y_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \omega_I, & t = T + j, \quad j > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$= \begin{cases} y_t, & t < T \\ y_t + \psi_j \omega_I, & t = T + j, \quad j > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$= y_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \omega_I I_t^{(T)} \quad (2.23)$$

$$= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} (a_t + \omega_I I_t^{(T)}) \quad (2.24)$$

donde y_t es la serie no contaminada por atípicos que se supone sigue un modelo ARMA, ω_I es la magnitud del efecto sobre la serie, ψ_j son los coeficientes del proceso ARMA en su representación $MA(\infty)$ e $I_t^{(T)}$ es una variable indicadora que representa la presencia o ausencia de *outliers* en el momento T , es decir $I_t^{(T)} = 0, t \neq T$; $I_t^{(T)} = 1, t = T$.

Por lo tanto, un OA afecta sólo al nivel de la observación T mientras que un OI afecta a todas las observaciones comenzando por el momento T , Z_T, Z_{T+1}, \dots , a través de la memoria del sistema descrita por $\frac{\theta(B)}{\phi(B)}$.

Tal como se mencionó anteriormente, las observaciones atípicas pueden influir adversamente en la estimación de los parámetros y de los residuos del modelo, y la naturaleza de su influencia va a depender del tipo de *outliers*. Por lo tanto, se debe tener presente que el proceso de detección de valores atípicos trabaja bien cuando los efectos de los mismos son moderados y ellos no ocultan el patrón subyacente contenido en las estadísticas muestrales, tales como la FACM, de una serie libre de *outliers*. En aquellos casos más graves, la contaminación por *outliers* puede hacer que sea imposible la identificación del modelo.



Simulaciones

Se realiza un estudio de simulación con el fin de comparar el comportamiento del estimador clásico de la función de autocorrelación basado en el método de los momentos y los dos estimadores robustos propuestos en la sección anterior. En una primera instancia, se presentan los resultados de las simulaciones de procesos ARMA no contaminados con valores atípicos. Luego se evalúa el desempeño de los tres estimadores en diferentes procesos ARMA contaminados por *outliers* aditivos o innovativos. Se utiliza el programa estadístico R, en el cual se construyó una función para la estimación de la FACMT y FACMR. Para la FACM se utilizó la función "acf" del paquete "stats".

Escenario 1: serie no contaminada con datos atípicos

Se generan 1000 muestras de tamaño $n = 20, 50$ y 100 de procesos ARMA(1,1) con parámetros $(\phi, \theta) = (0.5, 0), (-0.5, 0), (0.8, 0), (0, 0.8)$ y $(0.8, 0.2)$. Se calculan el sesgo¹, el desvío estándar y el error cuadrático medio² de cada estimador sobre las 1000 replicaciones para los primeros tres rezagos ($k = 1, 2$ y 3). Se considera $\alpha = 2\%$ y 5% para la estimación de la FACMT. Los resultados se presentan en la Tabla 1. En la misma sólo se muestran algunas de las combinaciones de los valores de los parámetros puesto que los resultados son muy similares; los restantes resultados se muestran en el Anexo.

Cuando no existen valores atípicos, los tres estimadores son levemente sesgados. En su mayoría, las estimaciones subestiman los verdaderos valores de la función de autocorrelación. Además, se observa que en la FACM y FACMR el sesgo disminuye a medida que aumenta el tamaño muestral. En cuanto al desvío estándar se encuentra que el mismo disminuye al incrementarse el tamaño de la muestra y aumenta a medida que el rezago aumenta. Si se evalúa el comportamiento de los estimadores en función del ECM, se puede apreciar que la FACMT y la FACMR tienen una *performance* inferior a la del estimador clásico.

Los tres estimadores presentan distribuciones aproximadamente simétricas y con forma de campana.

En la FACMT se nota que, en este caso de procesos no contaminados, el sesgo, el desvío y el ECM son mayores cuando se considera α igual a 5% en lugar de 2% a 5% . Este resultado puede ser esperable ya que al aumentar el valor de α la información será siempre menor que la de la serie original.

¹ El sesgo se calcula como $\frac{\sum_{i=1}^{1000} \hat{\rho}_i}{1000} - \rho$, es decir como la diferencia entre el promedio de los 1000 valores estimados y el valor teórico de la FAC.

² El error cuadrático medio (ECM) se calcula como $\frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{\rho}_i - \rho)^2}{1000}$, o sea el promedio de las diferencias al cuadrado entre el valor estimado y el valor teórico de la FAC.



Tabla 1: Medidas descriptivas de los tres estimadores de la FAC basada en 1000 repeticiones de tamaño 20, 50 y 100 para procesos ARMA(1,1)

Estimador	K= 1			2			3			
	n= 20	50	100	20	50	100	20	50	100	
a) $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$										
FACM	Sesgo	-0,149	-0,057	-0,031	-0,176	-0,072	-0,038	-0,166	-0,070	-0,037
	Desvío Estándar	0,201	0,122	0,089	0,221	0,154	0,111	0,210	0,152	0,113
	ECM	0,063	0,018	0,009	0,080	0,029	0,014	0,072	0,028	0,014
FACMT	Sesgo	-0,131	-0,119	-0,106	-0,168	-0,088	-0,070	-0,173	-0,074	-0,048
	Desvío Estándar	0,212	0,132	0,097	0,245	0,160	0,115	0,247	0,167	0,116
	ECM	0,062	0,032	0,021	0,088	0,033	0,018	0,091	0,033	0,016
FACMR	Sesgo	-0,134	-0,053	-0,028	-0,159	-0,067	-0,035	-0,168	-0,069	-0,037
	Desvío Estándar	0,254	0,139	0,097	0,288	0,176	0,123	0,312	0,182	0,128
	ECM	0,082	0,022	0,010	0,108	0,036	0,016	0,126	0,038	0,018
b) $(\phi, \theta) = (0, 0.8)$										
FACM	Sesgo	-0,100	-0,040	-0,020	-0,108	-0,043	-0,024	-0,091	-0,029	-0,017
	Desvío Estándar	0,160	0,108	0,071	0,221	0,168	0,115	0,216	0,162	0,115
	ECM	0,036	0,013	0,005	0,061	0,030	0,014	0,055	0,027	0,013
FACMT	Sesgo	-0,080	-0,119	-0,101	-0,120	-0,029	-0,016	-0,107	-0,031	-0,017
	Desvío Estándar	0,168	0,118	0,082	0,246	0,175	0,119	0,255	0,168	0,116
	ECM	0,035	0,028	0,017	0,075	0,031	0,014	0,076	0,029	0,014
FACMR	Sesgo	-0,091	-0,038	-0,018	-0,133	-0,057	-0,029	-0,114	-0,036	-0,022
	Desvío Estándar	0,216	0,126	0,083	0,288	0,195	0,133	0,307	0,193	0,128
	ECM	0,055	0,017	0,007	0,101	0,041	0,019	0,107	0,038	0,017
c) $(\phi, \theta) = (0.2, 0.8)$										
FACM	Sesgo	-0,210	-0,076	-0,034	-0,366	-0,142	-0,063	-0,431	-0,181	-0,082
	Desvío Estándar	0,151	0,082	0,053	0,239	0,153	0,103	0,242	0,189	0,133
	ECM	0,067	0,012	0,004	0,191	0,044	0,015	0,245	0,068	0,025
FACMT	Sesgo	-0,176	-0,161	-0,118	-0,330	-0,166	-0,136	-0,411	-0,179	-0,124
	Desvío Estándar	0,159	0,099	0,065	0,265	0,159	0,111	0,285	0,200	0,138
	ECM	0,056	0,036	0,018	0,179	0,053	0,031	0,250	0,072	0,034
FACMR	Sesgo	-0,185	-0,068	-0,031	-0,346	-0,143	-0,065	-0,419	-0,185	-0,085
	Desvío Estándar	0,189	0,091	0,056	0,297	0,170	0,114	0,340	0,213	0,148
	ECM	0,070	0,013	0,004	0,208	0,050	0,017	0,291	0,079	0,029



Gráfico 1: Diagramas de caja para las 1000 muestras de tamaño 50 de un proceso ARMA(1,1) con parámetros $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$

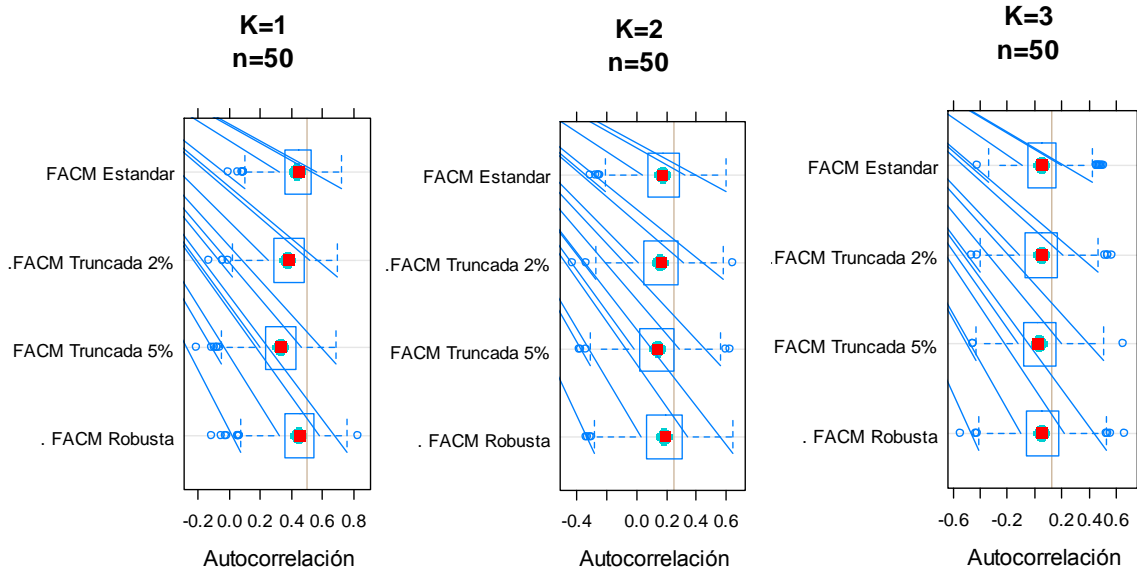
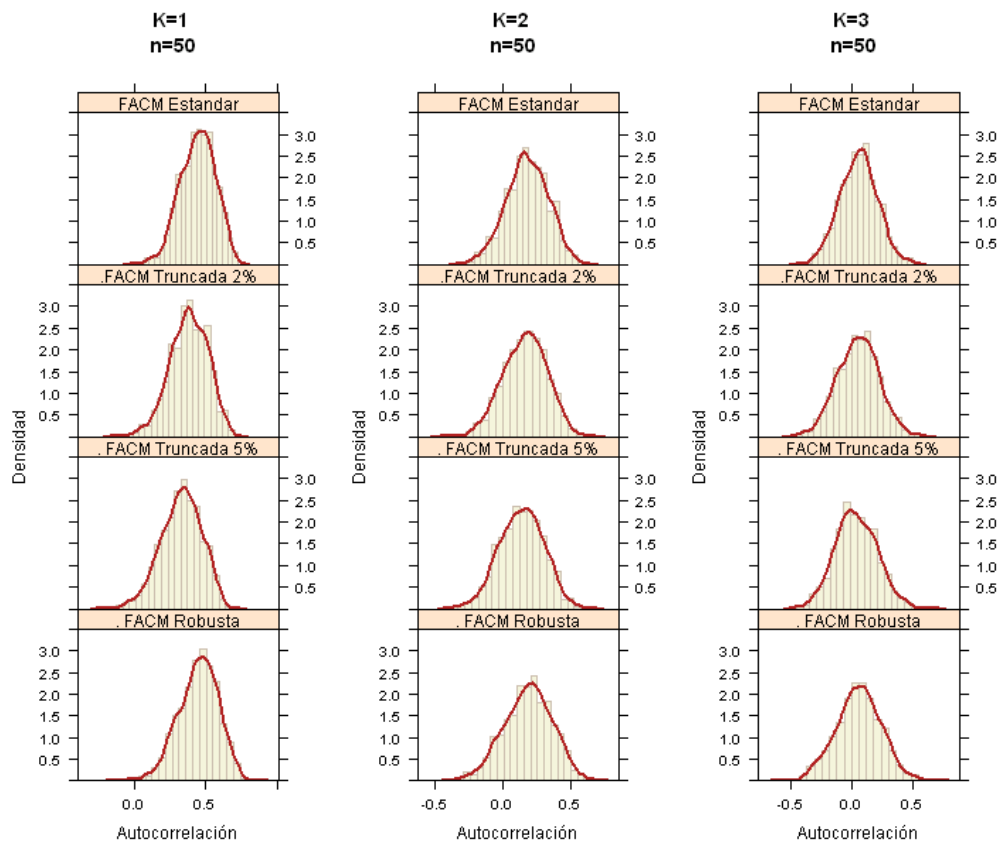


Gráfico 2: Histogramas de frecuencias para las 1000 muestras de tamaño 50 de un proceso ARMA(1,1) con parámetros $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$





Escenario 2: serie contaminada por un dato atípico

En esta sección se consideran los efectos de la presencia de datos atípicos aditivos o innovativos en la estimación de la función de autocorrelación del proceso subyacente libre de *outliers*. Las series temporales se generan a partir del ARMA(1,1) como en el escenario 1 de la sección anterior. Se usan las mismas seis combinaciones de valores de parámetros con tamaño de muestra $n = 100$. El valor extremo se encuentra en el instante $t = 64$ con magnitudes $\omega_A = \omega_I = sd$, $2 \times sd$, $7 \times sd$ y $10 \times sd^3$. El experimento se repite 1000 veces y el sesgo, el error estándar, así como el error cuadrático medio de cada estimador se presentan en las Tablas 2 y 3.

En presencia de datos atípicos los tres estimadores son sesgados, siendo la FACMR la que en general arroja los sesgos más pequeños. Cabe destacar que el estimador truncado al igual que el estimador de escala robusto parecen no estar afectados por la presencia de valores extremos, ya que el sesgo permanece en un valor constante para distintos valores de ω . Considerando el desvío estándar del estimador clásico en general se observa una leve disminución a medida que ω crece; aunque en algunos procesos el desvío converge a una constante al igual que para los dos estimadores robustos propuestos. Si se evalúa el desempeño de los tres estimadores en función del ECM, se puede observar que: a) cuando el efecto del valor atípico es pequeño, la FACM y FACMR presentan resultados similares y valores inferiores que el estimador truncado; b) en cambio, cuando el efecto es grande, los mejores resultados son obtenidos a partir de la FACMR. En conclusión, la FACMR es preferible a los otros estimadores cuando la serie está contaminada por un valor atípico.

Los tres estimadores presentan distribuciones aproximadamente simétricas y con forma de campana.

En la FACMT se nota que cuando la serie está contaminada por sólo un dato extremo, conviene utilizar $\alpha = 1 - 2\%$, valor recomendado para procesos con poca contaminación.

³sd es el desvío estándar teórico del proceso ARMA (1,1).



Tabla 2: Medidas descriptivas de los tres estimadores de la FAC basada en 1000 repeticiones de procesos ARMA(1,1) de tamaño 100 con un OA en t=64

Estimador		K= 1				2				3			
		$\omega=sd$	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd
a) $(\phi, \theta) = (-0.5, 0)$													
FACM	Sesgo	0,019	0,030	0,179	0,259	-0,025	-0,027	-0,103	-0,135	0,010	0,018	0,051	0,064
	Desvío Estándar	0,085	0,088	0,082	0,074	0,110	0,109	0,092	0,080	0,114	0,113	0,096	0,080
	ECM	0,008	0,009	0,039	0,073	0,013	0,013	0,019	0,025	0,013	0,013	0,012	0,011
FACMT	Sesgo	0,087	0,087	0,076	0,075	-0,059	-0,059	-0,057	-0,050	0,025	0,030	0,026	0,019
	Desvío Estándar	0,093	0,095	0,093	0,094	0,112	0,117	0,118	0,117	0,120	0,119	0,126	0,122
	ECM	0,016	0,016	0,014	0,014	0,016	0,017	0,017	0,016	0,015	0,015	0,016	0,015
FACMR	Sesgo	0,008	0,011	0,011	0,008	-0,017	-0,018	-0,024	-0,014	0,006	0,009	0,009	0,003
	Desvío Estándar	0,094	0,099	0,100	0,098	0,124	0,126	0,131	0,127	0,131	0,132	0,137	0,135
	ECM	0,009	0,010	0,010	0,010	0,016	0,016	0,018	0,016	0,017	0,017	0,019	0,018
b) $(\phi, \theta) = (0, 0.8)$													
FACM	Sesgo	-0,025	-0,038	-0,175	-0,254	-0,024	-0,026	-0,013	-0,009	-0,020	-0,024	-0,012	-0,008
	Desvío Estándar	0,071	0,072	0,073	0,066	0,116	0,116	0,093	0,076	0,118	0,111	0,093	0,075
	ECM	0,006	0,007	0,036	0,069	0,014	0,014	0,009	0,006	0,014	0,013	0,009	0,006
FACMT	Sesgo	-0,099	-0,102	-0,082	-0,082	-0,015	-0,018	-0,017	-0,016	-0,018	-0,025	-0,022	-0,025
	Desvío Estándar	0,083	0,084	0,081	0,080	0,122	0,124	0,120	0,121	0,122	0,115	0,119	0,120
	ECM	0,017	0,017	0,013	0,013	0,015	0,016	0,015	0,015	0,015	0,014	0,015	0,015
FACMR	Sesgo	-0,021	-0,026	-0,018	-0,018	-0,028	-0,031	-0,029	-0,029	-0,023	-0,029	-0,021	-0,027
	Desvío Estándar	0,082	0,085	0,086	0,086	0,131	0,136	0,136	0,131	0,135	0,130	0,134	0,134
	ECM	0,007	0,008	0,008	0,008	0,018	0,019	0,019	0,018	0,019	0,018	0,018	0,019
c) $(\phi, \theta) = (0.2, 0.8)$													
FACM	Sesgo	-0,043	-0,055	-0,223	-0,348	-0,076	-0,083	-0,206	-0,303	-0,095	-0,100	-0,189	-0,261
	Desvío Estándar	0,056	0,057	0,088	0,094	0,107	0,103	0,112	0,110	0,139	0,133	0,127	0,117
	ECM	0,005	0,006	0,058	0,130	0,017	0,017	0,055	0,104	0,029	0,028	0,052	0,082
FACMT	Sesgo	-0,128	-0,129	-0,111	-0,111	-0,147	-0,143	-0,119	-0,124	-0,135	-0,129	-0,116	-0,117
	Desvío Estándar	0,068	0,067	0,065	0,064	0,115	0,112	0,112	0,110	0,143	0,134	0,142	0,138
	ECM	0,021	0,021	0,016	0,017	0,035	0,033	0,027	0,027	0,039	0,035	0,034	0,033
FACMR	Sesgo	-0,037	-0,038	-0,036	-0,037	-0,076	-0,076	-0,074	-0,075	-0,098	-0,095	-0,097	-0,097
	Desvío Estándar	0,059	0,056	0,058	0,059	0,115	0,113	0,114	0,113	0,151	0,143	0,152	0,144
	ECM	0,005	0,005	0,005	0,005	0,019	0,018	0,019	0,018	0,032	0,030	0,032	0,030



Gráfico 3: Diagramas de caja para las 1000 muestras de tamaño 100 de un proceso ARMA(1,1) con parámetros $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$ y un OA en $t=64$

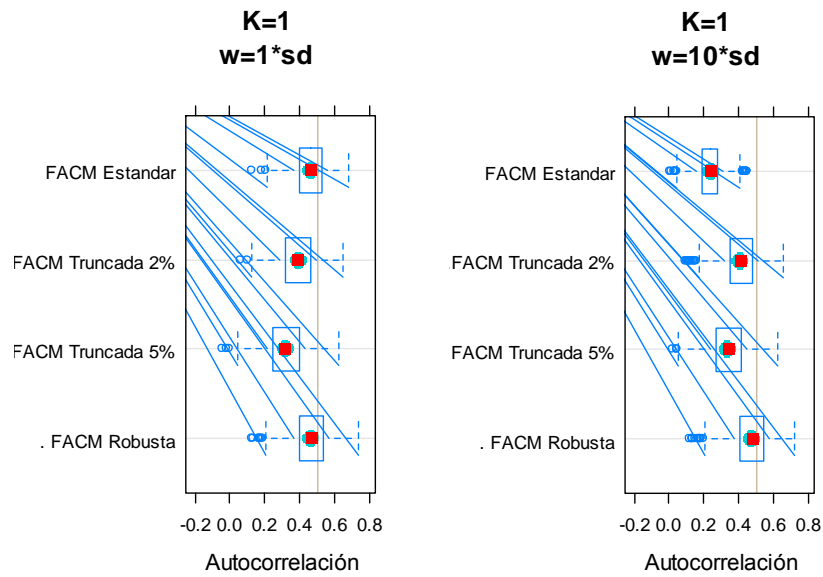


Gráfico 4: Histogramas de frecuencias para las 1000 muestras de tamaño 100 de un proceso ARMA(1,1) con parámetros $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$ y un OA en $t=64$

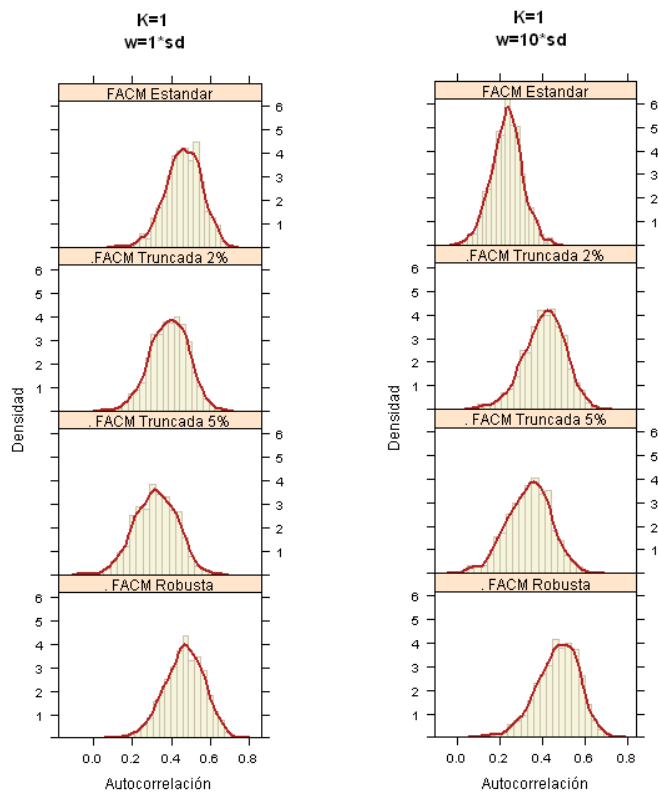




Tabla 3: Medidas descriptivas de los tres estimadores de la FAC basada en 1000 repeticiones de procesos ARMA(1,1) de tamaño 100 con un OI en t=64

Estimador		K= 1				2				3			
		$\omega=sd$	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd
a) $(\phi, \theta) = (-0.5, 0)$													
FACM	Sesgo	0,009	0,010	0,006	0,004	-0,014	-0,017	-0,013	-0,011	0,003	0,003	0,002	0,006
	Desvío Estándar	0,087	0,088	0,079	0,071	0,110	0,115	0,104	0,095	0,116	0,119	0,110	0,101
	ECM	0,008	0,008	0,006	0,005	0,012	0,014	0,011	0,009	0,013	0,014	0,012	0,010
FACMT	Sesgo	0,082	0,078	0,048	0,043	-0,055	-0,052	-0,037	-0,032	0,018	0,013	0,009	0,008
	Desvío Estándar	0,096	0,098	0,090	0,093	0,114	0,121	0,113	0,120	0,119	0,122	0,120	0,127
	ECM	0,016	0,016	0,010	0,011	0,016	0,017	0,014	0,015	0,014	0,015	0,014	0,016
FACMR	Sesgo	0,002	0,000	-0,010	-0,005	-0,009	-0,010	-0,007	-0,004	-0,004	-0,005	-0,005	-0,006
	Desvío Estándar	0,101	0,100	0,096	0,097	0,124	0,130	0,123	0,132	0,133	0,135	0,131	0,139
	ECM	0,010	0,010	0,009	0,010	0,015	0,017	0,015	0,018	0,018	0,018	0,017	0,019
b) $(\phi, \theta) = (0, 0.8)$													
FACM	Sesgo	-0,037	-0,082	-0,455	-0,623	-0,023	-0,023	-0,010	-0,005	-0,016	-0,020	-0,011	-0,005
	Desvío Estándar	0,073	0,075	0,079	0,067	0,115	0,113	0,083	0,065	0,112	0,112	0,083	0,067
	ECM	0,007	0,012	0,213	0,392	0,014	0,013	0,007	0,004	0,013	0,013	0,007	0,004
FACMT	Sesgo	-0,110	-0,114	-0,069	-0,067	-0,016	-0,019	-0,016	-0,014	-0,018	-0,021	-0,018	-0,018
	Desvío Estándar	0,083	0,087	0,082	0,079	0,115	0,119	0,126	0,122	0,114	0,117	0,119	0,118
	ECM	0,019	0,021	0,012	0,011	0,013	0,015	0,016	0,015	0,013	0,014	0,014	0,014
FACMR	Sesgo	-0,027	-0,046	-0,034	-0,029	-0,025	-0,030	-0,028	-0,025	-0,019	-0,021	-0,019	-0,019
	Desvío Estándar	0,085	0,085	0,090	0,083	0,129	0,131	0,136	0,136	0,126	0,129	0,130	0,134
	ECM	0,008	0,009	0,009	0,008	0,017	0,018	0,019	0,019	0,016	0,017	0,017	0,018
c) $(\phi, \theta) = (0.2, 0.8)$													
FACM	Sesgo	-0,041	-0,044	-0,091	-0,121	-0,076	-0,076	-0,108	-0,130	-0,097	-0,093	-0,117	-0,134
	Desvío Estándar	0,056	0,056	0,063	0,065	0,108	0,107	0,104	0,100	0,140	0,139	0,132	0,122
	ECM	0,005	0,005	0,012	0,019	0,017	0,017	0,023	0,027	0,029	0,028	0,031	0,033
FACMT	Sesgo	-0,127	-0,124	-0,088	-0,072	-0,146	-0,138	-0,105	-0,084	-0,137	-0,128	-0,105	-0,095
	Desvío Estándar	0,069	0,069	0,063	0,059	0,116	0,116	0,107	0,099	0,143	0,143	0,139	0,131
	ECM	0,021	0,020	0,012	0,009	0,035	0,032	0,022	0,017	0,039	0,037	0,030	0,026
FACMR	Sesgo	-0,037	-0,034	-0,020	-0,010	-0,076	-0,071	-0,056	-0,040	-0,098	-0,090	-0,083	-0,068
	Desvío Estándar	0,060	0,059	0,055	0,052	0,118	0,115	0,112	0,108	0,154	0,151	0,149	0,146
	ECM	0,005	0,005	0,003	0,003	0,020	0,018	0,016	0,013	0,033	0,031	0,029	0,026



Gráfico 3: Diagramas de caja para las 1000 muestras de tamaño 100 de un proceso ARMA(1,1) con parámetros $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$ y un OI en $t=64$

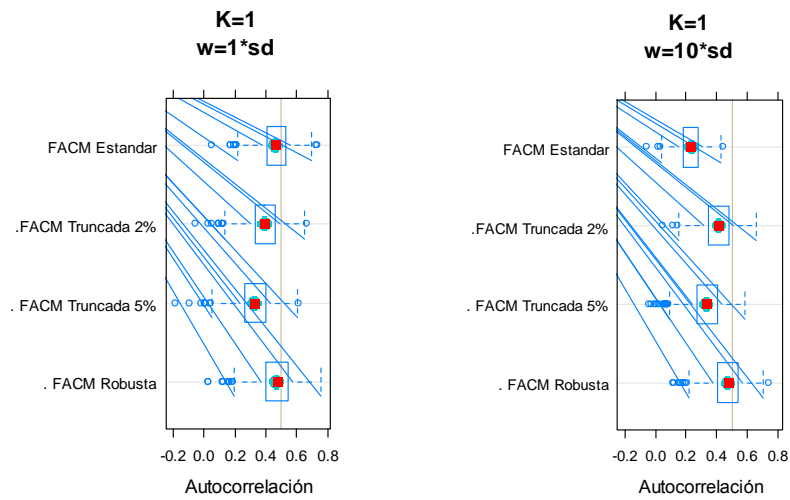
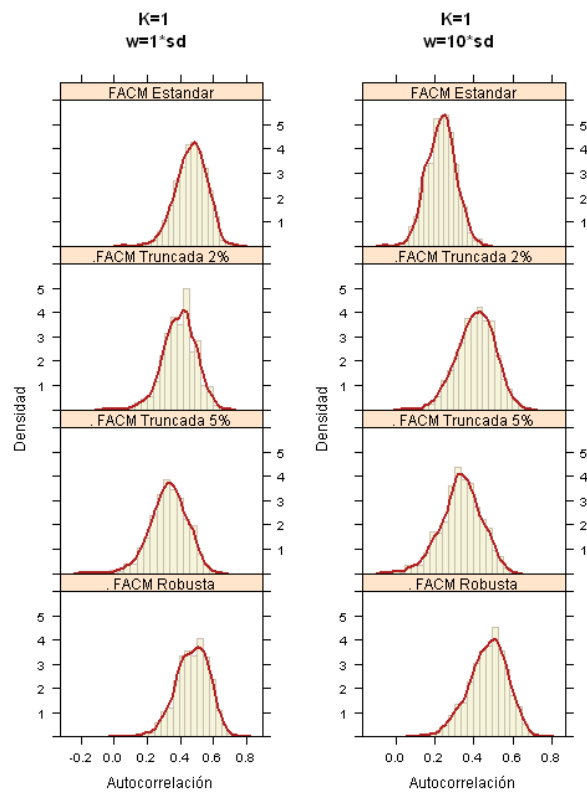


Gráfico 4: Histogramas de frecuencias para las 1000 muestras de tamaño 100 de un proceso ARMA(1,1) con parámetros $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$ y un OI en $t=64$





Conclusiones

En este trabajo se aborda el problema de la robustez de la función de autocorrelación muestral, y se proponen dos estimadores: uno basado en un estimador robusto de escala y la función de autocorrelación truncada. Se realiza un estudio de simulaciones para investigar y comparar el comportamiento del estimador clásico -FACM- y estos dos nuevos estimadores en procesos contaminados con valores atípicos. Se observa que la FACM no es resistente a la presencia de observaciones extremas y se confirma la robustez de la FACMR en situaciones con *outliers* de diferentes magnitudes. Por lo tanto, dado que en la práctica se suele desconocer la existencia de valores extremos, se aconseja calcular conjuntamente el estimador clásico y los estimadores robustos de la función de autocorrelación. Si dichas estimaciones son similares, se puede asumir que el efecto de los valores atípicos es insignificante. Por el contrario, si son significativamente diferentes, se debe actuar con cuidado. Queda pendiente el análisis del desempeño de estos estimadores en presencia de múltiples datos atípicos en la serie y en el caso de procesos con estacionalidad.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bartlett, M. S.** (1946), On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series. *Journal Royal Statistical Society*, B8, 27-41.
- Brockwell, P. J.; Davis, R. A.** (1991), *Time Series: Theory and Methods*. Springer Verlag.
- Chan, W.; Wei, W.** (1991), A comparison of some estimators of time series autocorrelations. *Computational Statistics & Data Analysis*, 14, 146-163.
- Dunsmuir, W; Robinson, R. M.** (1981), Asymptotic theory for time series containing missing and amplitude modulated observations, *Sankhya*, Ser. A, 260-281.
- Ma, Y.; Genton, M.** (1998), Highly robust estimation of the autocovariance function. *Journal of time series analysis*, 21, N°6, 663-684.
- Maronna, R.A.; Martin, R.D.; Yohai, V.J.** (2006), *Robust Statistics: Theory and Methods*. John Wiley and Sons.
- Masarotto, G.** (1987), Robust identification of autoregressive moving average models. *Applied Statistics*, 36, 214-220.
- Peña, D.** (2005), *Análisis de series temporales*. Alianza Editorial.
- Peña, D.; Tiao, G.; Tsay, R.** (2001), *A course in time series analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Rousseeuw, P. J.; Croux, C.** (1992), Explicit scale estimators with high breakdown point. *L1- Statistical Analysis and Related Methods*, 77-92.
- Rousseeuw, P. J.; Croux, C.** (1992), Alternatives to the median absolute deviation. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 1273-83.
- Quenouille, M. H.** (1949), Approximate tests of correlation in time series, *Journal of Royal Statistics*, B11, 68-84.
- Wei, W.** (2006), *Time Series Analyses. Univariate and Multivariate Methods. Second edition*. Pearson Education, Inc.



ANEXO

Tabla A.1: Medidas descriptivas de los tres estimadores de la FAC basada en 1000 repeticiones de tamaño 20, 50 y 100 para procesos ARMA(1,1)

Estimador	K= 1			2			3			
	n= 20	50	100	20	50	100	20	50	100	
a) $(\phi, \theta) = (-0.5, 0)$										
FACM	Sesgo	0,056	0,019	0,010	-0,088	-0,030	-0,017	0,031	0,010	0,007
	Desvío Estándar	0,178	0,121	0,090	0,222	0,158	0,119	0,224	0,164	0,121
	ECM	0,035	0,015	0,008	0,057	0,026	0,014	0,051	0,027	0,015
FACMT	Sesgo	0,033	0,075	0,082	-0,070	-0,059	-0,053	0,015	0,012	0,020
	Desvío Estándar	0,188	0,130	0,095	0,246	0,161	0,120	0,264	0,171	0,122
	ECM	0,036	0,023	0,016	0,065	0,029	0,017	0,070	0,029	0,015
FACMR	Sesgo	0,024	0,004	0,002	-0,062	-0,020	-0,009	0,006	-0,005	-0,001
	Desvío Estándar	0,227	0,140	0,098	0,288	0,181	0,133	0,309	0,195	0,135
	ECM	0,052	0,019	0,010	0,087	0,033	0,018	0,095	0,038	0,018
b) $(\phi, \theta) = (0.8, 0)$										
FACM	Sesgo	-0,225	-0,085	-0,039	-0,346	-0,141	-0,064	-0,396	-0,172	-0,080
	Desvío Estándar	0,180	0,100	0,067	0,236	0,154	0,109	0,235	0,182	0,134
	ECM	0,083	0,017	0,006	0,175	0,043	0,016	0,212	0,063	0,024
FACMT	Sesgo	-0,194	-0,162	-0,124	-0,313	-0,167	-0,132	-0,376	-0,175	-0,121
	Desvío Estándar	0,190	0,116	0,079	0,262	0,164	0,118	0,277	0,194	0,140
	ECM	0,074	0,040	0,022	0,167	0,055	0,031	0,217	0,068	0,034
FACMR	Sesgo	-0,217	-0,078	-0,037	-0,325	-0,135	-0,065	-0,384	-0,168	-0,079
	Desvío Estándar	0,231	0,110	0,072	0,302	0,173	0,121	0,332	0,211	0,147
	ECM	0,101	0,018	0,007	0,197	0,048	0,019	0,258	0,072	0,028

Tabla A.2: Medidas descriptivas de los tres estimadores de la FAC basada en 1000 repeticiones de procesos ARMA(1,1) de tamaño 100 con un OA en t=64

Estimador	K= 1				2				3				
	$\omega = sd$	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd	
a) $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$													
FACM	Sesgo	-0,038	-0,049	-0,185	-0,266	-0,040	-0,044	-0,110	-0,142	-0,038	-0,033	-0,067	-0,081
	Desvío Estándar	0,090	0,090	0,084	0,073	0,115	0,109	0,094	0,079	0,120	0,114	0,094	0,080
	ECM	0,010	0,010	0,041	0,076	0,015	0,014	0,021	0,026	0,016	0,014	0,013	0,013
FACMT	Sesgo	-0,111	-0,105	-0,085	-0,090	-0,074	-0,066	-0,060	-0,061	-0,052	-0,040	-0,045	-0,044
	Desvío Estándar	0,095	0,099	0,092	0,095	0,115	0,113	0,117	0,116	0,119	0,114	0,123	0,117
	ECM	0,021	0,021	0,016	0,017	0,019	0,017	0,017	0,017	0,017	0,015	0,017	0,016
FACMR	Sesgo	-0,035	-0,034	-0,028	-0,028	-0,039	-0,037	-0,039	-0,032	-0,038	-0,028	-0,034	-0,033
	Desvío Estándar	0,101	0,101	0,099	0,100	0,129	0,123	0,130	0,124	0,134	0,131	0,137	0,129
	ECM	0,011	0,011	0,011	0,011	0,018	0,017	0,018	0,016	0,019	0,018	0,020	0,018
b) $(\phi, \theta) = (0.8, 0)$													
FACM	Sesgo	-0,054	-0,075	-0,312	-0,439	-0,083	-0,095	-0,271	-0,367	-0,101	-0,107	-0,234	-0,307
	Desvío Estándar	0,072	0,075	0,095	0,087	0,116	0,112	0,108	0,094	0,144	0,134	0,115	0,095
	ECM	0,008	0,011	0,106	0,200	0,020	0,022	0,085	0,144	0,031	0,029	0,068	0,103
FACMT	Sesgo	-0,135	-0,133	-0,113	-0,112	-0,145	-0,136	-0,116	-0,116	-0,137	-0,127	-0,115	-0,110
	Desvío Estándar	0,081	0,085	0,077	0,073	0,122	0,117	0,114	0,109	0,145	0,140	0,142	0,130
	ECM	0,025	0,025	0,019	0,018	0,036	0,032	0,026	0,025	0,040	0,036	0,033	0,029
FACMR	Sesgo	-0,047	-0,046	-0,042	-0,040	-0,078	-0,076	-0,069	-0,068	-0,097	-0,093	-0,087	-0,084
	Desvío Estándar	0,076	0,075	0,074	0,071	0,126	0,120	0,117	0,115	0,157	0,147	0,149	0,138
	ECM	0,008	0,008	0,007	0,007	0,022	0,020	0,019	0,018	0,034	0,030	0,030	0,026



Tabla A.3: Medidas descriptivas de los tres estimadores de la FAC basada en 1000 repeticiones de procesos ARMA(1,1) de tamaño 100 con un OI en t=64

Estimador	K= 1				2				3				
	$\omega = sd$	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd	sd	2*sd	7*sd	10*sd	
a) $(\phi, \theta) = (0.5, 0)$													
FACM	Sesgo	-0,035	-0,049	-0,184	-0,267	-0,038	-0,042	-0,105	-0,141	-0,036	-0,033	-0,064	-0,077
	Desvío Estándar	0,092	0,090	0,080	0,073	0,115	0,106	0,091	0,078	0,117	0,113	0,093	0,077
	ECM	0,010	0,010	0,040	0,077	0,015	0,013	0,019	0,026	0,015	0,014	0,013	0,012
FACMT	Sesgo	-0,106	-0,107	-0,086	-0,090	-0,069	-0,069	-0,059	-0,058	-0,049	-0,045	-0,038	-0,043
	Desvío Estándar	0,098	0,096	0,094	0,095	0,118	0,111	0,116	0,114	0,121	0,117	0,120	0,116
	ECM	0,021	0,021	0,016	0,017	0,019	0,017	0,017	0,016	0,017	0,016	0,016	0,015
FACMR	Sesgo	-0,029	-0,035	-0,024	-0,029	-0,035	-0,035	-0,035	-0,035	-0,035	-0,032	-0,027	-0,036
	Desvío Estándar	0,102	0,102	0,098	0,100	0,133	0,124	0,126	0,126	0,135	0,132	0,134	0,130
	ECM	0,011	0,011	0,010	0,011	0,019	0,016	0,017	0,017	0,019	0,019	0,019	0,018
b) $(\phi, \theta) = (0.8, 0)$													
FACM	Sesgo	-0,044	-0,044	-0,034	-0,030	-0,073	-0,074	-0,057	-0,053	-0,092	-0,091	-0,073	-0,069
	Desvío Estándar	0,068	0,069	0,055	0,045	0,108	0,110	0,092	0,075	0,133	0,138	0,118	0,096
	ECM	0,007	0,007	0,004	0,003	0,017	0,018	0,012	0,008	0,026	0,027	0,019	0,014
FACMT	Sesgo	-0,129	-0,124	-0,046	-0,032	-0,137	-0,132	-0,050	-0,037	-0,128	-0,122	-0,063	-0,056
	Desvío Estándar	0,080	0,081	0,061	0,052	0,116	0,116	0,094	0,084	0,138	0,143	0,124	0,114
	ECM	0,023	0,022	0,006	0,004	0,032	0,031	0,011	0,008	0,035	0,035	0,019	0,016
FACMR	Sesgo	-0,040	-0,036	0,000	-0,001	-0,068	-0,067	-0,019	-0,025	-0,087	-0,085	-0,042	-0,048
	Desvío Estándar	0,073	0,071	0,064	0,068	0,116	0,118	0,110	0,117	0,145	0,151	0,145	0,150
	ECM	0,007	0,006	0,004	0,005	0,018	0,018	0,013	0,014	0,029	0,030	0,023	0,025