



Alsina, Sara M.

Wibly, Adrián

Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas, Escuela de Estadística

INTEGRACIÓN DE LA VARIABILIDAD DE LOS FENÓMENOS DEMOGRÁFICOS EN LA PROYECCIÓN PROBABILÍSTICA DE POBLACIÓN ¹

Introducción

El desarrollo de proyecciones de poblaciones por sexo y edad en un marco de probabilidad permite disponer de una medida de la incertidumbre asociada a los resultados.

Ello no es posible a partir de las usualmente utilizadas variantes alta, media (adoptada en general por los usuarios) y baja para cubrir los resultados determinísticos más "razonables", que provienen de la creación de escenarios asociados a supuestos de comportamiento de las componentes demográficas.

Este trabajo tiene como objeto el acercamiento a distintas propuestas metodológicas para la captación y especificación de elementos de variabilidad en la predicción probabilística de variables correspondientes a las componentes demográficas, para su posterior integración mediante el método de componentes en la proyección estocástica de una población por sexo y edad. De esta manera se habilita la obtención de intervalos probabilísticos de predicción para variables indicadoras asociadas a las poblaciones proyectadas en el tiempo.

Eje operativo en la proyección de población

El método de componentes se puede considerar como el eje operativo para la realización de las proyecciones poblacionales por sexo y edad. Permite el seguimiento de cada cohorte por edad y sexo, afectadas en el tiempo por el comportamiento del nivel y la estructura de la fecundidad, mortalidad y migración en cada período de proyección según modelos determinísticos o probabilísticos. Para cada sexo, cada cohorte del i -ésimo grupo de edad ($i= 1, 2, \dots, l$), en el momento t ($N_{i;t}$) se verá modificada en cada período de tiempo $t, t+n$ según el siguiente proceso:

$$N_{i;t} - D_{i;t,t+n} + SM_{i;t,t+n} = N_{i+n;t+n}$$

y para los nacimientos: $B_{t,t+n} - D_{B;t,t+n} = N_{0-n;t+n}$

siendo $D_{i;t,t+n}$ las defunciones y $SM_{i;t,t+n}$ el saldo migratorio que afectan al grupo de edad i durante el período $t, t+n$.

El método requiere de información específica por edad de las tres componentes demográficas para cada período de la proyección. La mayor parte de la incertidumbre de la proyección de poblaciones es debida a la incertidumbre asociada a estos valores.

¹ Alumna auxiliar de investigación: Paula Zerdá



Considerando la población femenina para cada grupo i de edad en cada período t de la proyección y , siendo además $P_{i,t}$ la relación de sobrevivencia y $F_{i,t}$ el coeficiente de fecundidad (función de las tasas específicas), la expresión matricial del método de componentes toma la forma:

$$\begin{pmatrix} N_{1;t+n} \\ N_{2;t+n} \\ N_{3;t+n} \\ \vdots \\ N_{I-1;t+n} \\ N_{I;t+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1;t,t+n} & F_{2;t,t+n} & F_{3;t,t+n} & \dots & F_{I-1;t,t+n} & F_{I;t,t+n} \\ P_{1;t,t+n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_{2;t,t+n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{3;t,t+n} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{I-1;t,t+n} & P_{I;t,t+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1;t,t+n} \\ N_{2;t,t+n} \\ N_{3;t,t+n} \\ \vdots \\ N_{I-1;t,t+n} \\ N_{I;t,t+n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} SM_{1;t,t+n} \\ SM_{2;t,t+n} \\ SM_{3;t,t+n} \\ \vdots \\ SM_{I-1;t,t+n} \\ SM_{I;t,t+n} \end{pmatrix}$$

El método de componentes proporciona un pronóstico de la población desagregada, según los supuestos de comportamiento adoptados para cada variable, o un conjunto de pronósticos a partir de distintos escenarios establecidos a priori.

Sin embargo, la mera aplicación del método de componentes no permite la obtención de una medida de la incertidumbre asociada a los futuros resultados poblacionales. Los enfoques estocásticos para proyección de población salvan este problema suponiendo una distribución probabilística para las componentes y permitiendo, de esta manera, asociar un rango probabilístico a los resultados poblacionales futuros. Entonces, las proyecciones probabilísticas requieren que los elementos de la matriz de proyección de población sean tasas estocásticas ($P_{i;t,t+n}$; $F_{i;t,t+n}$; $SM_{i;t,t+n}$) que pueden variar en cada período t de la proyección.

Error de predicción en una proyección de población

Una proyección probabilística de población puede ser descrita en forma simple como una predicción puntual y una estructura de error asociada; a lo largo del tiempo los resultados poblacionales oscilarán alrededor de dicha estimación puntual; los errores usualmente crecerán a lo largo del período de proyección y estarán autocorrelacionados de período a período (Alho et al., 2005).

La variabilidad de las componentes demográficas no es la única causa de imprecisión en la predicción en una proyección de población. Las posibles fuentes de error (Alho, 1990; Keilman, 1990; Lee, 2004), que operan en forma interrelacionada, pueden sintetizarse en:

- * Registración y estimación de datos básicos de la población y de sus componentes
- * Fluctuación aleatoria de los hechos vitales
- * Inadecuación de los modelos utilizados (y de sus supuestos) para estimar las componentes demográficas
- * Errores en la estimación de los parámetros aunque los modelos sean adecuados
- * Desaciertos en los juicios de expertos.
- * Tamaño y estructura de la población proyectada

En este trabajo se prioriza la consideración del error que puede sumar la forma de integración de la variabilidad de los fenómenos vitales en la proyección de la población. , inquietud de los analistas de la población al realizar sus proyecciones. Ya Sykes (1969) manifiesta: "...la más importante fuente de incertidumbre fue que las propias tasas vitales cambian a



través del tiempo, y que nosotros cometemos errores en predecir estos cambios”.

El problema se plantea en la elección de los recursos metodológicos para evaluar y prever la variabilidad de cada una de las variables correspondientes a nivel y estructura por edad de mortalidad, fecundidad y migración, y su forma de incorporación en el tiempo a las estimaciones de la población total y de su estructura por sexo y edad. La precisión de la proyección de la población depende de la adecuación de los supuestos en los que se ha apoyado la predicción de las componentes.

Como en el proceso de la proyección dichas variables operan en forma interrelacionada, a las autocorrelaciones temporales se sumarán otras correlaciones:

- * entre las edades
- * entre componentes demográficas
- * entre poblaciones por sexo y/o regiones

Por ejemplo, la tasa global de fecundidad para el siguiente período será una suma de tasas específicas por edad intercorrelacionadas; el error de predicción de cualquier tasa vital específica para la edad x , considerando su incremento anual, es una suma de términos anuales autocorrelacionados.

Debido a la combinación de las predicciones de las componentes en el proceso de “regeneración” poblacional a través de su proyección con el método de componentes, sus errores se “propagan” (se trasladan combinando los errores provenientes de la estimación de las distintas variables y sus correlaciones) afectando el grado de incertidumbre de la predicción de la población.

Dicha **propagación del error** es incorporada por los autores mediante distintos enfoques metodológicos:

- * Enfoque analítico: se evalúa la contribución de los errores relativos de las estimaciones de la mortalidad, fecundidad y migración en el error final con procedimientos matemáticos que requieren aproximaciones y supuestos simplificadores (Sykes, 1969; Alho, 1998; Alho y Spencer, 1997; Lee y Tuljapurkar, 2000). A tal fin Alho y Spencer (2005) utilizan y aplican con el programa PEP (desarrollado a tal fin), el denominado “modelo escalado para el error”, método de extrapolación para series de tiempo que asume que los errores de las tasas demográficas crecen con el tiempo y que las variancias de los procesos demográficos son independientes entre ellas. Se proponen distintos métodos para especificar el error de predicción (asociado a la aplicación de modelos estadísticos, de predicciones pasadas o referentes o de juicios criteriosos).
- * Enfoque basado en simulaciones: se seleccionan aleatoriamente valores de las componentes a partir de sus distribuciones predictivas y se combinan en cada período de la proyección, para lograr distribuciones predictivas de variables de interés relativas a las poblaciones proyectadas que se expresan en general por sus percentiles. Presenta ventajas respecto al enfoque analítico: no requiere aproximaciones para derivar los momentos de la distribución predictiva; a pesar de que se necesitan supuestos distribucionales relativos a la descripción de la incertidumbre de las tasas vitales, no requiere la formulación de supuestos sobre la distribución predictiva del vector de la futura población (la distribución empírica de la población futura calculada sobre la muestra de trayectorias poblacionales, sirve como estimación).

Se podría pensar que los dos enfoques tienen ventajas complementarias. Mientras las simu-



laciones pueden ser utilizadas para controlar la precisión del cálculo de los momentos de las distribuciones basada en aproximaciones analíticas, las fórmulas analíticas pueden ser usadas para identificar posibles errores en los programas utilizados en simulaciones.

Ambos presentan la dificultad de gran cantidad de covariancias, por lo que se propone adicionar supuestos a los modelos, como la parametrización de las autocorrelaciones con pocos parámetros, por ejemplo considerándolas constantes o nulas.

Construcción de las distribuciones predictivas de las componentes

Se observa en general que la diversidad de los enfoques para la realización de proyecciones probabilísticas obedece a las distintas formas de incorporación de la incertidumbre de la predicción de las componentes.

Una distribución predictiva de una tasa de hechos vitales puede ser definida como la distribución condicional dado su comportamiento pasado. Resulta entonces fundamental observar el desempeño de dichas tasas e identificar y predecir el comportamiento de las causas de los cambios, hecho que resulta un real desafío. La predicción de indicadores de una población deben incluir dos elementos: un rango de posibles resultados y una probabilidad correspondiente a ese rango. Esos dos elementos constituirán los intervalos de predicción para cada indicador.

La particular elección de un modelo para cada componente y de los supuestos o juicios aplicados para la construcción de sus distribuciones predictivas se pueden apoyar en distintos factores y en su combinación:

- * Tendencias pasadas y rangos de variación observados.
- * Modelos teóricos y estructurales
- * Contextos determinantes
- * Opiniones de expertos
- * Resultados de proyecciones anteriores
- * Predicciones históricas de errores
- * Predicciones teóricas de errores
- * Conocimiento de las características estructurales a las poblaciones
- * Comportamiento en poblaciones referentes

Los modelos estadísticos para observaciones repetidas en el tiempo se utilizan usualmente para disponer de una estimación puntual con errores de predicción asociados y formular una distribución predictiva de las tasas vitales. Algunos de ellos son relevantes en aplicaciones demográficas: regresión con estructura de covariancia conocida, caminos aleatorios, modelos ARIMA simples (Alho y Spencer, 2005). Frecuentemente estos modelos estadísticos se implementan como punto de partida en la formulación de las distribuciones predictivas.

La disponibilidad de estos recursos y el comportamiento particular de las variables van determinando su utilización y su combinación. Por ejemplo, resulta indispensable una determinada longitud de las series para la aplicación de ciertos modelos estadísticos y para la ubicación de la población en la transición demográfica, pero puede suceder que para la misma componente, los expertos y el contexto opinen que sólo convenga considerar sólo las últi-



mas observaciones para la realización de predicciones. O los modelos pueden producir predicciones que excedan los valores que una tasa global de fecundidad o una esperanza de vida ha tomado o tomará, por lo que requerirán ajustes. O se puede estar en conocimiento de descubrimientos o acontecimientos que harán variar las tendencias observadas en las tasas vitales. O las observaciones consideradas pueden no haber registrado períodos de calma o de gran variabilidad típicos de la variable demográfica analizada.

Es también usual para la predicción la utilización de los valores que las variables presentan en el momento inicial de la proyección, a veces sólo como referencia.

La consideración de los errores de predicciones pasadas de las tasas vitales resulta también de utilidad para evaluar el cumplimiento de los supuestos a partir de los cuales fueron realizadas y de qué manera podrán ser minimizados dichos errores en las siguientes proyecciones. Con el mismo objetivo, la adopción de variancias y covariancias estimadas de predicciones realizadas para otras poblaciones.

También los objetivos, la estructura de la información disponible y la necesidad de generalización de los modelos propuestos han sido determinantes en la formulación metodológica para construcción de distribuciones a priori y a posteriori de las variables demográficas de interés. Las propuestas son desarrolladas y aplicadas para una población o región en particular, o incluso con modelos aplicables a cualquier población.

Los autores van usando los diferentes recursos metodológicos en sus trabajos: errores de predicción históricos (Keyfitz, 1981; Stoto, 1983); (Pflaumer, 1988); opinión de expertos (Lutz, W., 1996; Lutz, W., Sanderson, W. & Scherbov, S., 1998, 2004, 2008), análisis de series temporales para proyectar parámetros poblacionales (Lee y Carter, 1992; Lee y Miller, 2003; Alho y coautores, 1998, 1997, 2005).

Usualmente se proponen modelos probabilísticos sólo para variables relativas al nivel de las componentes demográficas y luego se adoptan supuestos o soluciones estándares (tablas modelo, estructuras constantes, estructuras de otras poblaciones, métodos iterativos, etc.) para asociarles sus correspondientes estructuras etáreas. También se trabaja con modelos que abarcan nivel y estructura (Lee y Carter, 1992 y sus derivados).

Se presenta también otra opción, a partir de una forma tradicional en demografía, con modelos que relacionan las variables demográficas con la edad para luego introducir variación para alguno o todos los parámetros de los modelos a través del tiempo (curvas de Gompertz o de Heligman-Pollard para mortalidad, funciones gamma para fecundidad, etc.). Otro enfoque relacional va generando nuevos esquemas de edad transformando uno existente observado o estándar con modelos aditivos o proporcionales o con el modelo logit de Brass.

Para la migración se proponen modelos particulares para cada población por la característica de esta variable en cuanto a su poca predicibilidad, pero también se trabaja frecuentemente adoptando el último nivel observado o considerándola nula desde el inicio.

La formulación de escenarios también es utilizada en el desarrollo de proyecciones probabilísticas, permitiendo considerar para los hechos vitales no sólo los comportamientos más probables sino comportamientos impuestos que pueden conducir incluso a situaciones poblacionales no deseadas, pero que servirán también para medir riesgos, y evaluar los márgenes de error de los diferentes escenarios.



Secuencia y resultados de una proyección probabilística.

En la secuencia de una proyección probabilística se recorren los pasos para la construcción de las distribuciones predictivas de las variables relativas a las componentes demográficas y su posterior integración para la formulación de distribuciones predictivas de medidas estadísticas de la población proyectada para cada período, permitiendo asociar intervalos de predicción a sus estimaciones.

De forma concisa se podrían considerar los siguientes pasos en la secuencia de una proyección probabilística:

- Obtención, monitoreo y corrección de información para la determinación de la población base, construcción de indicadores demográficos, observación de su comportamiento y formulación de hipótesis de comportamiento futuro (variación intra y entre momentos de proyección, interrelaciones).

- Elección e implementación de metodología para el establecimiento de distribuciones predictivas de cada variable de fecundidad, mortalidad, migración (nivel y estructura, o procedimientos que los relacionen). Evaluación de las correspondientes estimaciones.

- Aplicación del método de componentes en forma iterativa con valores de las variables indicadores de mortalidad, fecundidad y migración seleccionados aleatoriamente de sus correspondientes distribuciones predictivas, para cada uno de los períodos de proyección, para la obtención en cada período de tantas poblaciones proyectadas como iteraciones.

- Elección de indicador/es de la población para construcción de su/s distribución/es de probabilidad para cada período de proyección a partir de los valores observados a través de todas las iteraciones (Ej.: expresión gráfica o percentiles de la distribución del porcentaje de población mayor de 65 años).

- Elección de medida/s estadística/s de cada distribución predictiva resultante de la variable de población elegida, en cada período y análisis del comportamiento a través del tiempo de la medida estadística elegida de la distribución de probabilidad del indicador de población de interés y de su intervalo de predicción (Ej: mediana del porcentaje de población mayor de 65 años).

- Construcción de bases de datos (como formato más adecuado) integradas por archivos de datos y archivos de programas que permitan guardar, actualizar y extraer resultados. Se archiva información necesaria relativa a los datos y los modelos predictivos de las tasas vitales aplicados para poder obtener las distribuciones predictivas de las variables elegidas relativas a las poblaciones proyectadas. Esta información tendrá características diferentes según el enfoque adoptado en la incorporación de los errores:

- * Enfoque analítico: se archivan las estimaciones puntuales de los indicadores y la descripción de sus errores; también programas que aproximan los errores de predicción para los indicadores de población requeridos por los usuarios.

- * Enfoque basado en simulaciones: se seleccionan y archivan muestras seleccionadas de las distribuciones predictivas de las componentes para luego procesar la proyección y finalizar calculando medidas estadísticas asociadas a dichas muestras. Según la capacidad pueden guardarse todas las trayectorias a partir de muestras simuladas y con programas adicionales se producen resúmenes estadísticos de ellas.



Algunas propuestas en particular

Se incluyen de forma sintética dos propuestas concretas con el fin de visualizar diferentes recursos empleados en la construcción de distribuciones predictivas con distinta complejidad.

Pflaumer (1988)

Pflaumer es un iniciador en el tema de las proyecciones probabilísticas de población, proponiendo la utilización de distribuciones predictivas simples para los indicadores de nivel de fecundidad (TGF), mortalidad (e°) y migración (SM).

Por las características de las variables analizadas, no considera adecuada la predicción por medio de un modelo estadístico basada sólo en datos históricos. Asigna funciones rectangulares a las variables de nivel (Y_t) de los fenómenos demográficos, donde sólo los valores de límites inferior (a_t), superior (b_t) y mediana (m_t) deben ser especificados por expertos, siendo la expresión general de la función de densidad:

$$f(y_t) = \begin{cases} \frac{1}{2(m_t - a_t)}, & a_t \leq y_t < m_t \\ \frac{1}{2(b_t - m_t)}, & m_t \leq y_t \leq b_t \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para fecundidad considera la correlación temporal mediante la incorporación de una restricción sobre el máximo cambio en la TGF entre dos períodos consecutivos: $|TGF_t - TGF_{t-1}| < Z_t$ y la distribución de Z_t también como uniforme.

A partir de las distribuciones predictivas se extraen reiteradamente valores para cada una de las variables y para cada período. Los valores muestreados de cada variable de nivel son convertidos en tasas específicas por edad, considerando que la estructura por edad se mantiene constante en el tiempo (según estructuras observadas), para luego ser integradas con el método de componentes.

Raftery, Alkema, Gerland (2013)

Para la generación de proyecciones probabilísticas de población de la generalidad de los países estos autores proponen:

* Distribuciones predictivas para los indicadores de nivel de fecundidad (TGF) y mortalidad (e°) basadas en:

- modelos determinísticos que utiliza la ONU (doble logísticas)
- modelos jerárquicos bayesianos con dos niveles (país y total mundial) para la estimación de los parámetros de incremento (para e°) y declinación (para TGF) de cada país.

* Las estimaciones de TGF y e° son convertidas en tasas específicas por edad utilizando respectivamente programas de fertilidad modelo y una variante del método de Lee – Carter (1992), para ser luego integradas con el método de componentes.

* No consideran modelos estocásticos para la proyección de la migración.

* A partir de las respectivas distribuciones predictivas se simulan trayectorias futuras para la TGF y la e° masculina y femenina, con valores extraídos aleatoriamente en cada período.

* Desarrollan software para la aplicación de los modelos.



Discusión

La disponibilidad de las proyecciones en bases de datos con información y programas para la obtención de distribuciones predictivas para las componentes, permite asociar probabilidad a cada resultado y trabajar con mayor dinámica en la toma de decisiones.

Sin embargo se deberá tener en cuenta que la precisión de las estimaciones de dichas variables, está condicionada a la estimación de cada componente demográfica, al método aplicado y a los supuestos realizados sobre sus errores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alho, J.. "Stochastic Methods in Population Forecasting", International Journal of Forecasting, 6, 1990.
- Alho, J.. "A stochastic forecast of the population of Finland", Reviews 1998/4, Statistics Finland, 1998.
- Alho, J.; Spencer, B.. "The practical specification of the expected error of population forecasts", Journal of Official Statistics, 13, 1997.
- Alho, J.; Spencer, B.. "Statistical Demography and Forecasting", Springer, 2005.
- Alsina, S.; Wibly, A.. "Proyección de población: Métodos de Construcción de un referente según supuestos e incertidumbre asociados". V Jornadas de Ciencia y Tecnología". UNR, 2011.
- Alsina, S.; Wibly, A.; Zerdá, P.; Gómez, A.. "Formulación de supuestos para sustentar la precisión de una proyección probabilística. Exploración para el caso de la provincia de Santa Fe", XVII Jornadas "Investigaciones en la Facultad" de Cs. Ecs y Estadística, www.fcecon.unr.edu.ar, nov. 2012
- Booth, H.. "Demographic Forecasting: 1980 to 2005 in review", International Journal of Forecasting, 22, 2006.
- Hunsinger, E.. "A probabilistic population forecasting technique applied to Alaska: 2005-2030", www.demog.berkeley.edu/~eddieh/documents/ProjPresentation.pdf, febrero 2013.
- Hunsinger, E.. "An expert-based stochastic population forecast for Alaska, using autoregressive models with random coefficients", www.demog.berkeley.edu/~eddieh/ documents, noviembre 2014.
- Keilman, N.. "Uncertainty in national population forecasting: issues, backgrounds, analyses, recommendations", Swets and Zeitlinger, Amsterdam, 1990.
- Keilman, N.; Pham, D.; Hetland, A.. "Why population forecasts should be probabilistic – illustrated by the case of Norway", Demographic Research, 6, 2002.
- Keyfitz, N.. "The limits of population forecasting", Pop.and Dev. Rev., 7, 1981.
- Lee, R.. "Quantifying our ignorance: stochastic forecasts of population and public budget", CEDA Papers, Berkeley, 2004.
- Lee, R.; Carter, L.. "Modeling and Forecasting the Time Series of U.S. Mortality", JASA 87, 1992.



- Lee, R.; Tuljapurkar, S.. "Stochastic pop. projections for the U.S.: beyond high, medium and low", JASA, 89, 428, 1994..
 - Lee, R.; Tuljapurkar, S.. "Population forecasting for fiscal planning: Issues and innovations". In: Alan Auerbach and Ronald Lee, eds., Demography and Fiscal Policy, Cambridge University Press, 2000.
 - Lee, R.; Miller, T.; Edwards, R.. "The Growth and Aging of California's Population: Demographic and Fiscal Projections, Characteristics and Service Needs.", Tech.Ass. Program, Univ.of California, 2003.
 - Lee, R.; Tuljapurkar, S.. "Population forecasting for fiscal planning: issues and innovations". CEDA papers, Center for the Economics and Demography of Aging, 2000.
 - Lutz, W. ed.. "The Future Population of the World: What Can We Assume Today?", Earthscan Publications, London, 1996.
 - Lutz, W.; Sanderson, W.; Scherbov, S.. "Frontiers of population forecasting", Sup. Pop. and Dev. Rev., 24, 1998.
 - Lutz, W.; Sanderson, W.; Scherbov, S.. "The end of world population growth century: new challenges for human capital formation and sustainable development", Earthscan, London, 2004.
 - Lutz, W.; Sanderson W.; Scherbov S.. "The coming acceleration of global population ageing", Nature, v. 451, 2008.
 - Lutz, Vaupel and Ahlburg (eds.). "Frontiers of Population Forecasting", Population Council, 1998.
 - Miller, T.. "Modelos demográficos para la proyección de la demanda del sector social", CEPAL, CELADE, 2007.
 - Miller T.. "California's Uncertain Population Future" www.demog.berkeley.edu/~tmiller/papers/p2002.california.forecast.pdf, 2002.
 - Pflaumer, P.. "Confidence intervals for population projections based on Monte Carlo Methods", Int. Journal of Forecasting, v.4, 1988.
 - Qiang, L.; Reuser, M.; Kraus, C.; Alho, J.. "Ageing of a giant: a stochastic population forecast for China, 2006-2060", Journal of Population Research, 26, 2009.
 - Raftery, A.; Alkema, L.; Gerland, P. "Bayesian probabilistic population projections for the UN". Statistical Science, 2013.
 - Raftery, A.E.; Li, N.; Ševčíková, H.; Gerland, P.; Heilig, G.K.. "Bayesian probabilistic population projections for all countries. - Supporting information", Proceedings of the National Academy of Sciences(PNAS), 109, 2012.
 - Smith; Tayman; Swanson. "State and Local Population Projections", Springer, 2001.
 - Sykes, Z.. "Some Stochastic Versions of the Matrix Model for Population Dynamics", JASA, 44, 1969.
 - Stoto, M.. "The Accuracy of Population Projections", JASA, 78, 1983.
-