Teresita Terán
Irma Rosa
Graciela Molina
Liliana Cuciarelli
César Mignoni
Norberto Martín
Dpto. de Matemática, Instituto de Investigaciones Económicas, Escuela de Estadística

PERFILANDO EL MARCO TEÓRICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA*

Introducción

Godino (2002) presenta un modelo teórico sobre la cognición matemática que proporciona herramientas conceptuales y metodológicas para plantear y abordar problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Entre los rasgos característicos de su enfoque se destacan la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos. Esta teoría será el sustento de nuestro trabajo de investigación ya que el modelo de cognición matemática elaborado considera los elementos "clave" sobre los cuales se basa el desarrollo de una teoría de la instrucción matemática significativa.

Godino elabora el constructo "significado (institucional y personal) de los objetos matemáticos", interpretándolo como un sistema de prácticas operativas y discursivas, ligado a un campo de problemas matemáticos apto para facilitar el análisis macroscópico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Desarrolla la noción de función semiótica y de una ontología matemática basada en cinco tipos de entidades primarias, elementos que facilitan el análisis microscópico de la realización de tareas matemáticas y de los actos de comunicación en la interacción didáctica y esboza una teoría de la instrucción matemática significativa basada en el modelo "ontológico semiótico" de la cognición matemática, los supuestos del interaccionismo simbólico y la teoría de las situaciones didácticas.

Este modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática, que se designa brevemente como "Teoría de las Funciones Semióticas" proporciona un marco unificado para el estudio de las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones en el seno de los sistemas didácticos

* Del Proyecto: "El significado de la inferencia estadística en la etapa básica de carreras donde el carácter de la estadística es predominantemente instrumental". (teresitateran@hotmail.com)

La ontología y la epistemología matemática como problema para la didáctica de las matemáticas

Según Godino (2002) el fin específico de la Didáctica de la Matemática como campo de investigación es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Para lograr este objetivo, la didáctica de las matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, sociología, etc.

Además, debe tener en cuenta un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, sobre los que se debe basarse y a los que se ha de problematizar, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de los sistemas didácticos. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la didáctica de las matemáticas ya que difícilmente se podrían estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos.

Así pues, la investigación en Didáctica de la Matemática no puede ignorar cuestiones filosóficas tales como:

¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?

¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?

¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?

¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

Reiteramos que en Didáctica de la Matemática se adoptan modelos cognitivos no centrados exclusivamente en la psicología cognitiva, ya que en el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares se propone, como uno de sus fines esenciales que el sujeto se apropie de los conocimientos matemáticos a los que se les atribuye una realidad cultural (Vygotsky, 1934).

Asimismo, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que se debe citar la faceta ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos).

Godino plantea además, que es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición tales como el realismo-pragmatismo, la cognición individual-institucional, el constructivismo-conductismo, etc. Para ello se deben tener en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas utilizadas por disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la didáctica de las matemáticas.

La *antropología* se ocupa del estudio de los seres humanos desde una perspectiva biológica, social y humanista. Al considerar las matemáticas como un aspecto o dimensión de la cultura humana, el estudio de su desarrollo en las distintas sociedades puede ser abordado como una faceta específica de la antropología cultural.

La manera de considerar la matemática por parte de Wittgenstein (Bloor ,1983) se suele presentar como antropológica ya que este filósofo del lenguaje postula que los hombres en diferentes épocas y culturas, tienen educaciones, intereses y preocupaciones diversas y que también son variadas las relaciones humanas y relaciones con la naturaleza y el mundo, por lo cual constituyen distintas *formas de vida*. Debido a ello tales culturas forman diferentes estructuras conceptuales y adoptan diversas formas y normas de representación. Este planteamiento cognitivo general puede aplicarse también a las matemáticas, lo que implica atribuir a dicho conocimiento una relatividad institucional donde la necesidad lógica de las proposiciones matemáticas se justifica mediante la aceptación de convenciones en el uso del lenguaje que describe el mundo que nos rodea y el propio mundo de las matemáticas.

Otro uso del enfoque antropológico en Didáctica de las Matemáticas es el propuesto por Chevallard (1992) cuyo supuesto clave es considerar la matemática como una actividad humana que se desarrolla en el seno de ciertas instituciones con el concurso de determinados instrumentos, principalmente lingüísticos y que aporta técnicas para realizar determinado tipo de tareas. Como consecuencia, también aquí se asume que todo conocimiento es relativo a una institución. Los matemáticos profesionales constituyen una institución, al igual que la escuela, o las diversas profesiones y es en el seno de estas instituciones donde se realizan prácticas matemáticas específicas que generan conocimientos matemáticos específicos.

En general, la adopción del enfoque antropológico para las matemáticas supone también atribuir un papel clave a los instrumentos lingüísticos usados para el desarrollo de la actividad matemática.

Enfoque unificado de la Cognición y la Instrucción Matemática: la Teoría de las Funciones Semióticas

A la Teoría de las funciones semióticas podemos describirla brevemente como la elaboración de un enfoque teórico unificado de la cognición e instrucción matemática.

Según Godino (2002), el análisis de los procesos de estudio matemático requiere transcribir en forma textual las manifestaciones lingüísticas de los sujetos participantes, y los acontecimientos que tienen lugar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El investigador en didáctica dispone finalmente para realizar su trabajo de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a pruebas de evaluación, etc. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática y didáctica desarrollada por los sujetos participantes.

Esta circunstancia ha llevado a Godino, a incorporar como herramientas teóricas algunas nociones procedentes de las teorías del lenguaje y la semiótica, configurando un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática y de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Una de las nociones introducidas es la función semiótica, adoptada de la teoría del lenguaje de Hjelmslev y complementada con una tipología de objetos matemáticos que incluye a los propios objetos lingüísticos, las situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos.

Hjelmslev (1943) llama función de signo a la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata, por tanto de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre una antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas. Para Godino el papel de expresión y contenido puede ser adoptado por los distintos tipos de objetos matemáticos introducidos en el modelo ontológico, no sólo por las entidades lingüísticas.

Godino (2002) considera que las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación, tan usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje; en consonancia con la semiótica de Peirce (1965), los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos), pueden ser también signos de otras entidades.

Según Godino (2002) la noción de función semiótica permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto (sea ostensivo, no ostensivo; elemental o sistémico, etc.) por parte de un sujeto (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego el objeto como funtivo (Eco, 1991). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Godino (2002) considera que uno de los puntos diferenciadores de este modelo teórico está en la descomposición analítica que propone para los conocimientos, tanto personales como institucionales. Junto a los conocimientos procedimentales y conceptuales (técnicas, conceptos y proposiciones) distingue los conocimientos situacionales o fenomenológicos (situaciones-problemas, tareas) conocimientos lingüístico-notacionales y conocimientos argumentativo-validativos.

Por otra parte, Godino afirma que la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La “cognición personal” es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la “cognición institucional” es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos.

Según Godino (2002) en la práctica se usan con frecuencia los términos comprensión y competencia para describir los conocimientos del sujeto. En el modelo cognitivo que propone, la comprensión responde al componente discursivo/relacional del significado sistémico de un objeto (dominio de conceptos, propiedades y argumentos), mientras que la competencia se relaciona con el componente práctico (dominio de las maneras de actuar ante las situaciones-problemas o tareas).

Al respecto, en sus primeros trabajos publicados Godino (1998), y Godino y Batanero (1994; 1998), progresivamente desarrollan y precisan las nociones de "significado institucional y personal de un objetivo matemático" y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, se trata de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

Como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal), según hemos dicho, proponen "los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas". Sin embargo, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos que desencadenan procesos interpretativos, lo cual supone conocer tanto los diversos objetos emergentes de los tipos o subsistemas de prácticas, como su estructura.

En síntesis, estos autores llegan a la conclusión de que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos.

El modelo ontológico-semiótico que proponen para fundamentar la investigación en Didáctica de las Matemáticas es el resultado de un proceso de reflexión que partió inicialmente de una interpretación del clásico "triángulo epistemológico", con el objetivo de analizar las relaciones entre el pensamiento, el lenguaje y las situaciones en que tiene lugar la actividad matemática (Godino y Recio, 1998).

En tal sentido parten de una consideración de la *práctica matemática* como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Esta noción permite tener en cuenta el principio Piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

Al respecto es necesario considerar que en las prácticas matemáticas intervienen objetivos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual y que las prácticas de una persona al resolver un problema pueden ser observables (por ejemplo, cuando un alumno escribe su solución a un problema o relata al profesor sus acciones para resolverlo), aunque en otros casos, algunas de estas prácticas son acciones interiorizadas no observables directamente.

Pero en el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante el problema concreto, interesa considerar *los sistemas de prácticas puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante este tipo de situaciones problemáticas.*

Siguiendo a Godino y Batanero (1996), designaremos como *aprendizaje significativo* al que tiene en cuenta o atribuye un papel clave a la interacción social, la cooperación, el discurso, la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El sujeto aprende mediante su interacción con un medio instruccional, apoyado en el uso de recursos simbólicos, materiales y tecnológicos disponibles en el entorno. Este modelo de aprendizaje es, además, multidimensional, en concordancia con los supuestos sobre el significado de los objetos matemáticos, la comprensión y competencia matemática. Consideramos, además, necesario incorporar elementos procedentes de la teoría del aprendizaje verbal significativo basado en la concepción desarrollada por Ausubel (2002), cuando se trata de los componentes discursivos del conocimiento matemático.

Godino (2002) considera que el conocimiento progresa como resultado de la construcción personal del sujeto enfrentado a tareas problemáticas, pero la interacción con otras personas, bien sujetos en la misma posición, y sobre todo con el profesor - experto es crucial para orientar e impulsar el aprendizaje. Tal pensamiento surge como una consecuencia de tener en cuenta el componente discursivo (normativo y argumentativo) del conocimiento matemático, y no sólo el componente praxémico (situacional y actuativo).

Bibliografía

Ausubel, D. P. (2002). Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognoscitiva. Barcelona: Piados.

Bloor, D. (1983). Wittgenstein. A social theory of knowledge. London: The MacMillan Press.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol. 12(1). pp. 73-112.

Eco, U. (1991). Tratado de semiótica general. Barcelona: Lumen (1ª ed. 1977).

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques. Vol. 22(2/3).

Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. Comunicación presentada en el VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica. Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 14(3). pp. 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1996). Clarifyng the meaning of mathematical objetcs as priority area of research in mathematics education. En Sierpinska A. (Ed.), What is Research in mathematics Education, and What Are its Results? Dordrecht: Kluwer A. P.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En J. Kilpatrick y A. Sierpinska (Eds.) Mathematics Education as a research domain: A search for identity. pp. 177-195. Dordrecht: Kluwer A. P.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analising the relationships between thoughy, language and context in mathematics education. En A. Oliver y K. Newstead (Eds.). Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psichology of Mathematics Education. Vol. 3(1.8.) South Africa: University of Stellenbosh.

Hjemslev, L. (1971). Prolegómenos a una teoría del Lenguaje. Madrid: Gredos.

Peirce, Ch. S. (1965). Obra lógico-semiótica. Madrid: Taurus.

Vygotsky, L. S. (1934). Pensamiento y lenguaje. Buenos Aires: La Pléyade (1988).