Cristina Barbiero.(1)
María I.Flury.(1)
Alberto Pagura(1)
Marta Quaglino(1)
Marta Ruggieri(1)
(1) Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas. Escuela de Estadística.
Proyecto: "Métodos multivariados aplicados a procesos industriales".

CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIADOS MEDIANTE GRÁFICOS DE CONTROL MULTIVARIADOS T^2 DE HOTELLING, MEWMA Y MCUSUM

INTRODUCCIÓN

En la actualidad las técnicas del control estadístico de procesos (SPC) son herramientas muy utilizadas en la supervisión de los procesos productivos. El SPC tiene como objetivo controlar las características de calidad más importantes de un producto durante su proceso de fabricación. Las técnicas SPC ayudan a descubrir una causa especial de variación, que no es parte del proceso todo el tiempo, pero surge debido a circunstancias específicas.

Típicamente, el monitoreo de procesos consiste en medir y realizar controles sobre varias características de calidad correlacionadas. Si se ignora esta correlación y se utilizan para vigilar la estabilidad del proceso, gráficos de control Shewhart para cada variable por separado, se puede perder información importante. Debido a ello el Control Multivariado de Procesos (MSPC) constituye una valiosa alternativa al control univariado.

Entre los gráficos más divulgados, desarrollados hasta el momento para el MSPC pueden mencionarse:

- **T^2 de Hotelling**: a veces denominado gráfico Shewhart multivariado.[1947]

- **MEWMA**: gráfico multivariado de promedios móviles ponderados exponencialmente. [Lowry y colaboradores (1992)]

- **MCUSUM**: gráfico multivariado de sumas acumuladas [Crosier (1986)]

El MCUSUM y el MEWMA, a diferencia del T^2 , son gráficos ponderados en el tiempo, en los cuales cada punto graficado contiene información no sólo del último período, sino también de otros anteriores.
En el caso del MEWMA, la ponderación que se le da a cada período para el cálculo de la estadística, decrece en forma exponencial, a medida que se aleja del período actual.
En el MCUSUM, a cada período se le asigna la misma ponderación para el cálculo de la estadística.

El objetivo de este trabajo es desarrollar en forma breve estos gráficos de control multivariados, analizando sus características, propiedades, bondades y desventajas.

GRÁFICOS DE CONTROL MULTIVARIADOS

En todos los casos se consideran en forma simultánea **p** características de calidad, que pueden ser modeladas, cuando el proceso está bajo control, por una función de densidad normal p-variante, con vector de medias $\boldsymbol{\mu_0} = (\mu_{01}, \mu_{02}, ..., \mu_{0p})'$ y matriz de variancias y covariancias $\boldsymbol{\Sigma_0}$ de orden p.

GRÁFICOS T^2

El primer trabajo en control de calidad multivariado fue realizado por Hotelling en 1947, quien aplicó sus procedimientos a datos sobre precisión de bombas durante la segunda guerra mundial.

Estos gráficos pueden aplicarse para tamaños de subgrupos mayores o iguales que uno.
Geométricamente, la estadística T^2 es proporcional a la distancia al cuadrado entre una observación multivariada y el vector de valores objetivo, donde puntos equidistantes forman elipsoides alrededor de dicho vector. A mayor valor de T^2, mayor es la distancia entre la observación y el valor objetivo.

El estadístico de Hotelling es:

$$T_i^2 = \mathrm{n}(\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{i} - \boldsymbol{\mu}_0)' \sum\nolimits_0^{-1} (\overline{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0);$$

con $\overline{\mathbf{X}}_i = (\overline{\mathrm{X}}_{i1}, \overline{\mathrm{X}}_{i2}, ..., \overline{X}_{ip})$: vector de medias para las p- características, en la i-ésima muestra. Cuando el tamaño del subgrupo n = 1, se obtendrán vectores de observaciones en lugar de vectores de medias.
Si $\boldsymbol{\mu_0}$ y $\boldsymbol{\Sigma_0}$ son conocidos y el **proceso está bajo control**, la estadística T^2_i se distribuye como una chi-cuadrado central con p grados de libertad ($T_i^2 \sim \chi_p^2$).

Este estadístico corresponde al ensayo de hipótesis: **H_0: $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_o$** vs. **$H_1$: $\boldsymbol{\mu}_i \neq \boldsymbol{\mu}_0$.**

Cuando el proceso está bajo control, **($\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\mu}_o$),** existe una probabilidad α de que el estadístico T^2_i exceda al valor critico $\chi^2_{p,\alpha}$. Por ello se toma como indicación o señal de "fuera de control" un valor de la estadística T^2_i que supera al valor $\chi^2_{p,\alpha}$.

Cuando **el proceso no está bajo control** , la estadística T^2_i se distribuye como una variable chi- cuadrado no central con p grados de libertad y con parámetro de no centralidad:

$$\lambda = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \textstyle\sum_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$$

con $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$; donde $\boldsymbol{\mu}_1$ es el vector de medias de las p características, cuando existe un cambio en al menos una de las medias.

Una medida del cambio en el vector de medias puede definirse a partir de la distancia de Mahalanobis:

$$d = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \textstyle\sum_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)} \text{ resultando } \lambda = nd^2$$

Esta expresión del parámetro λ de no centralidad indica que es más probable detectar un cambio "d" en el vector de medias, cuando se toma un n más grande, ya que ello conduce a un λ mayor y similarmente, que para un n dado es más fácil detectar un cambio " d" cuando éste es más grande.

En el caso en el cual los valores de $\boldsymbol{\mu}_0$ y $\sum_0$ no sean conocidos, se pueden estimar a partir de m muestras preliminares de tamaño n, tomadas de un proceso bajo control.

Los estimadores insesgados de $\boldsymbol{\mu}_0$ y $\sum_0$, son:

$$\overline{\overline{\mathbf{X}}} = (\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_j, \ldots, \overline{X}_p)' \text{, siendo } \overline{X}_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \overline{\mathbf{X}}_{ij} \text{ , j = 1,2,...p}$$

$$\overline{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i \text{ , siendo } S_i \text{ la matriz de covariancias del i-ésimo subgrupo.}$$

NOTA: En la práctica es preferible basar el análisis en datos agrupados, más que en observaciones individuales, ya que la estimación de la matriz de covariancias a partir de una matriz amalgamada **(**$\overline{S}$**)** resulta más confiable. Los subgrupos racionales son más adecuados para detectar cambios en el vector de medias.

El cálculo de la estadística se realiza mediante:

$$T_i^2 = n(\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\overline{\mathbf{X}}})' \overline{S}^{-1} (\overline{\mathbf{X}}_i - \overline{\overline{\mathbf{X}}})$$

cuya distribución bajo la hipótesis nula es:

$$T_i^2 \approx \frac{p(m-1)(n-1)}{(mn-m-p+1)} F_{p,\,\mathrm{mn-m-p+1}}$$

Si $\boldsymbol{\mu_0}$ y $\sum_0$ son estimados a través de tamaños grandes de muestras preliminares (n ≥ 20 ó 25), entonces el límite de control superior en el gráfico T^2 será:

$$\text{L.S.C} = \chi^2_{p,\alpha}$$

Caso contrario, el límite superior de control será:

$$\text{L.S.C} = \frac{p(m-1)(n-1)}{(mn-m-p+1)} F_{p,\,\mathrm{mn-m-p+1},\,\alpha}$$

Los dos problemas principales que surgen al aplicar un gráfico T^2 son:

- La escala que se utiliza para graficar los valores, no está relacionada con la escala de ninguna de las variables involucradas.

- Cuando la estadística T^2 excede el límite superior de control (L.S.C), el usuario no posee información relevante sobre qué pudo haberla causado. Se requiere información adicional para determinar qué variables son responsables de ese valor fuera de límite de control. Esta información es esencial en cualquier intento de detectar las causas de las desviaciones y posiblemente corregir el proceso. Por eso se aconseja llevar en forma paralela, gráficos de control univariados para cada característica, utilizar métodos como los propuestos por Mason, Tracy y Young (1995) o Kourty y Mc Gregor (1996).

2- GRÁFICOS PONDERADOS EN EL TIEMPO

2.1- GRÁFICOS MEWMA

Estos gráficos, como su contrapartida univariada, acumulan información proveniente de períodos pasados, haciéndolos más sensibles para detectar pequeños cambios en el vector de medias.

Llamando $\mathbf{X}_i$ a los vectores p-dimensionales de observaciones, los correspondientes vectores MEWMA se definen como:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{R}\,\mathbf{X}_i + (\mathbf{I} - \mathbf{R})\,\mathbf{Z}_{i-1} \qquad \text{para } i \in \mathrm{N}$$

con $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$; $\mathbf{R} = \mathrm{diag}\,(r_1, r_2,..., r_p)$; $0 < r_j \leq 1$; $j = 1, 2,..., p$,

$\mathbf{I}$: matriz identidad de orden p.

Los r_j marcan la profundidad de la memoria para cada variable. A mayor valor de r_j, menor profundidad.

Para cada observación se calcula la estadística :

$$T_i^2 = Z_i' \Sigma_z^{-1} Z_i$$

con Σ_z matriz de covariancias de los $\mathbf{Z}_i$ (definida más adelante)

La señal de salida de control se produce cuando T_i^2 supera un cierto valor "h", (h>0) seleccionado de manera tal de lograr un cierto valor de ARL cuando el proceso está bajo control. El ARL (longitud de corrida promedio) es una característica usada con frecuencia para evaluar el comportamiento de un diagrama de control. Es el número de puntos que en promedio deberán graficarse hasta que se produzca una señal de salida de control. Son deseables valores grandes de ARL cuando el proceso está bajo control y valores pequeños, cuando el proceso cambia a un nivel inaceptable.

Si no existe a priori ninguna razón para ponderar en forma diferente las observaciones pasadas de cada una de las p variables (como generalmente sucede), entonces puede tomarse $r_1 = r_2 = ... = r_p = r$. En este caso, la performance del ARL del MEWMA depende solamente del parámetro de no centralidad λ, donde en general,

$$\lambda = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \sum\nolimits_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$$

En el caso de distintos valores de r, el ARL depende de la dirección del cambio y no sólo del valor de λ.

Si $r_1 = r_2 = ... = r_p = r$ los vectores MEWMA se pueden reescribir como:

$$\mathbf{Z}_i = r\mathbf{X}_i + (1 - r)\, \mathbf{Z}_{i-1} \qquad \text{para } i \in N$$

La estadística que se calcula para construir el gráfico es:

$$T_i^2 = Z_i' \sum\nolimits_z^{-1} Z_i$$

donde

$$\sum\nolimits_z = \frac{r}{2-r}\left[1-(1-r)^{2i}\right] \sum\nolimits_x$$

siendo su valor asintótico

$$\sum\nolimits_z = \frac{r}{2-r} \sum\nolimits_x$$

Cuando r=1, el gráfico MEWMA coincide con el gráfico de control T^2.

Valores adecuados de r (profundidad de memoria) y de h (L.S.C.) pueden obtenerse de las Tablas proporcionadas por Lowry y colaboradores (1992). Las mismas están en función del ARL, del número p de variables considerado y del parámetro de no centralidad λ.

Para interpretar señales de fuera de control se recomienda usar en forma simultánea gráficos EWMA univariados.

2.2-GRÁFICOS MCUSUM

Estos gráficos acumulan desviaciones de los valores muestrales (valores individuales o promedios de subgrupos de tamaño n) con respecto a valores objetivos.
En 1988 Crosier propuso dos procedimientos para el gráfico CUSUM.
El primer procedimiento reduce cada observación multivariada a un escalar y luego construye la estadística CUSUM con los escalares.
El segundo procedimiento forma un vector CUSUM directamente a partir de las observaciones.

Primer procedimiento: **COT** (CUSUM of T)

Se basa en el cálculo de una estadística CUSUM, en la cual interviene la raíz cuadrada del estadístico T^2 definido anteriormente, o sea:

$$T_i = \sqrt{T_i^{\,2}} = \sqrt{\mathrm{n}(\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{i}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \textstyle\sum_0^{-1} (\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{i}} - \boldsymbol{\mu}_0)}$$

Si bien los gráficos Shewhart multivariados basados en la estadística T^2 son equivalentes a los basados en la estadística T; esto no sucede en los esquemas CUSUM. Crosier prefirió utilizar valores de T porque de esa manera , se acumulan distancias en lugar de distancias al cuadrado.

La estadística MCUSUM se calcula de la siguiente manera:

$$S_i = \text{máx}\,(0, S_{i-1} + T_i - k)$$

donde $S_0 \geq 0$ (en general $S_0 = 0$) y k >0.

El gráfico da una señal de fuera de control cuando el valor de S_i es mayor que un cierto valor h que depende del valor del ARL deseado cuando el proceso está funcionando en el valor objetivo [$S_i > h$].
Empleando procesos de Markov, Crosier obtuvo valores de h y k para p = 2, 5,10 y 20 y para valores de ARL de 200 y de 500 cuando el proceso está bajo control. Estas tablas se diseñaron para detectar un cambio d = 1 en el vector de medias, donde d = $\sqrt{\lambda}$, con λ parámetro de no centralidad .En este caso especial los valores de k óptimos se aproximan a $\sqrt{p}$.

Segundo procedimiento: CUSUM MULTIVARIDO

La estadística que se calcula es:

$$Y_i = \left[\mathbf{S}_i' \textstyle\sum^{-1} \mathbf{S}_i\right]^{1/2}$$

siendo:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_i = (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)\,(1 - \dfrac{k}{c_i}) & \text{si } c_i > k \\ \mathbf{S}_i = 0 & \text{si } c_i \le k \end{cases}$$

Con $\mathbf{C}_i = \left[(\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \textstyle\sum^{-1} (\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_0)\right]^{1/2}$

Siendo **Xi** : vector de observaciones o de promedios de subgrupos de tamaño n, de la i- ésima muestra.

$\boldsymbol{\mu}_0$: vector de valores objetivos.

$\sum$: matriz de variancias y covariancias.

$\mathbf{S}_o$: generalmente es igual a cero.

El método señala una situación fuera de control si:

$$Y_i = \left[\mathbf{S}_i' \textstyle\sum^{-1} \mathbf{S}_i\right]^{1/2} > \mathrm{h}$$

Crosier sugiere utilizar valores de $k = \frac{\mathrm{d}}{2}$, porque minimizan el valor del ARL cuando el vector de medias ha cambiado en una magnitud d. Proporciona tablas con valores de h para el caso de p = 2, 5, 10 y 20 variables.

COMPARACIÓN DE LOS ESQUEMAS

La estadística T^2 está basada en la observación más reciente, siendo insensible a cambios pequeños a moderados en el vector de medias del proceso.

Un problema práctico que surge con estos gráficos es su falta de robustez: son sensibles a los outliers multivariados. Éstos son observaciones (**X**) que tienen grandes valores de T^2, aunque ninguna componente del vector sea considerada un outlier en un test univariado.

La interpretación de “señales de fuera de control” en cualquiera de los procedimientos multivariados descriptos es, en general, bastante dificultosa. El problema más importante que surge es la identificación de la (s) variable(s) responsable(s) de esa señal.

En la década del noventa diversos autores trabajaron sobre este tema, especialmente en lo relacionado con el gráfico T^2 y presentaron diferentes propuestas tales como:

- Ranqueo de las componentes del vector.
- Ajustes por regresión, para mejorar el poder diagnóstico del gráfico T^2.
- Descomposición de la estadística T^2.
- Empleo de diversos gráficos [gráficos de barras de los errores normalizados, gráficos de barras de los scores normalizados, gráficos de contribución].
- Análisis por Componentes Principales.
- Utilización del método de Proyección sobre Estructuras Latentes o Mínimos Cuadrados Parciales.

El esquema MEWMA puede tener mejor comportamiento que el MCUSUM cuando el proceso está desde el inicio fuera de control y se comporta de manera muy similar cuando el cambio en el vector de medias se produce con posterioridad.

El vector MEWMA da una indicación de la dirección del cambio pero no proporciona una estimación precisa del vector de medias en curso.

El gráfico MEWMA puede diseñarse de manera tal que sea robusto a la no normalidad y es muy efectivo para detectar cambios de cualquier tamaño o dirección, aún en el caso de distribuciones multivariadas muy asimétricas o con colas pesadas. Esto lo convierte en una mejor alternativa que los gráficos T^2 ya que pueden desempeñarse en la forma deseada cuando el proceso está bajo control, bajo una amplia gama de distribuciones y al mismo tiempo pueden tener un comportamiento adecuado, cuando el proceso se sale de control.

Los dos esquemas MCUSUM proporcionan una detección más rápida de un cambio en el vector de medias que los gráficos T^2, siendo preferible en este sentido el CUSUM multivariado al esquema COT. Además el CUSUM multivariado (como el MEWMA) proporciona una indicación de la dirección en la cual han cambiado las medias.

CONCLUSIONES

Si bien los métodos de control multivariados se adaptan mejor a la naturaleza de los datos, su empleo en la industria local, no es frecuente.

Las dificultades para su implementación pueden tener su causa fundamental en las actividades y cálculos más complejos que ellos requieren.

Los programas estadísticos de mayor difusión contienen una amplia variedad de procedimientos gráficos útiles para el control univariado de procesos. En análisis multivariado, el gráfico T^2 se encuentra en software estadísticos de aplicación masiva

[STATGRAPHICS, S-PLUS; SIMCA y PLS Toolbox de MATLAB]. Los gráficos MCUSUM y MEWMA requieren de una mayor complejidad de cálculo frente al gráfico T^2 y no están aún incorporados en software accesible o de uso frecuente. Sin embargo, presentan una gran potencialidad en su aplicación y su divulgación debería enfatizarse en el ámbito industrial

BIBLIOGRAFÍA

- Crosier, R. (1988). "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality- Control Schemes". *Technometrics*,30 (3), 291-303.
- Fuchs, C. and Kenett, R.S. (1998). "Multivariate Quality Control". Marcel Dekker, Inc., New York, NY.
- Linderman, K. A(como el CUSUM multivariado) And Love, T.E. (2000). "Economic and Economic Statistical Designs for MEWMA Control Charts". ". *Journal of Quality Technology*, 32 (4), 410-417.
- Lowry, C.A.; Woodall, W.H.; Champ, C.W. and Rigdon, S.E. (1992). "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart". *Technometrics*,34 (1), 46-53.
- Lucas, J.M. and Saccucci, M.S. (1990). "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhacements". *Technometrics*, 32 (1), 1-12.
- Lucas, J – Crosier, R (1982). " Fast Initial Response for CUSUM Quality- Control Schemes: Give your CUSUM a Head Start". *Technometrics*,24 (3), 199- 205.
- Kourti, T. and Mac Gregor ,J.F. (1996). "Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring". *Journal of Quality Technology*, 28, 409-428.
- Mason, R.L.; Tracy, N.D. and Young, J.C. (1995). "Decomposition of T^2 for Multivariate Control Chart Interpretation". *Journal of Quality Technology*, 27, 99-108.
- Prabhu, S.S. and Runger, G.C. (1997). " Designing a Multivariate EWMA Control Chart". *Journal of Quality Technology*, 29(1), 8-15.
- Stoumbos, Z.G. and Sullivan, J.H. (2002). "Robustness to Non-normality of the Multivariate EWMA Control Chart". *Journal of Quality Technology*, 34(3) .
- Wodall, W and Ncube, M. (1985). "Multivariate CUSUM Quality-Control Procedures". *Technometrics*, 27 (3), 285-412.