Quaglino, Marta
Pagura, José Alberto
Dianda, Daniela
Hernandez, Lucia
Puigsubira, Cristina
Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas de la Escuela de Estadística

INDICES MULTIVARIADOS DE CAPACIDAD DE PROCESOS.

1. Introducción - Fundamentos de los estudios de capacidad de procesos.

El control y la mejora continua de los procesos abarca toda acción que permita replantear los procesos, identificar acciones que conlleven a la optimización de las pautas de trabajo, y de esa manera generar ventajas productivas para la empresa, y a la vez, valor agregado para los clientes a los que se provee el producto o servicio.

Entendiendo como proceso al conjunto de actividades, tareas, decisiones, etc. que se combinan para obtener un resultado determinado, es claro y natural que las características de dicho resultado estarán sujetas a una cierta variabilidad aleatoria, de modo que no siempre se logrará el nivel ideal deseado para cada una de ellas. Dada la naturalidad de este hecho en cualquier ámbito o contexto en el que se trabaje, surge de inmediato la necesidad de controlar, o al menos cuantificar, la proporción de veces que el proceso dará resultados indeseados.

Entre las muchas técnicas y procedimientos dedicados al control estadístico de procesos, el ***Análisis de Capacidad*** ha sido desarrollado con este propósito particular: estudiar el comportamiento del proceso en relación a una serie de requerimientos establecidos para las características de calidad de interés en el resultado.

Dichos requerimientos, más comúnmente llamados especificaciones, pueden darse en forma de valor objetivo, es decir un valor que, en promedio, debe tener la característica de interés; o bien, en forma de límites de especificación, es decir, valores que especifican el máximo y/o mínimo valor que se considera aceptable para la característica analizada.

Durante los últimos 30 años, se ha desarrollado una amplia variedad de medidas que permiten comparar el comportamiento real del proceso con las especificaciones dadas al mismo, las cuales reciben el nombre de ***índices de capacidad***. Dichas medidas, en su mayoría, han sido construidas de modo que tomen un valor igual o superior a uno cuando el proceso está en concordancia con las especificaciones o incluso las supera, y un valor menor a uno cuando el proceso no es capaz de lograr los niveles de calidad requeridos.

En muchos casos, se asume que el proceso bajo estudio posee una única característica de interés a ser evaluada, y para dicha situación es extensa la variedad de índices de capacidad disponibles. Sin embargo, la situación más realista y habitual es aquella en la que el éxito en el resultado de un proceso queda descripto por dos o incluso más características. Dicha situación requiere que las mismas sean evaluadas simultáneamente, en orden de determinar la capacidad global del proceso.

Una alternativa frente a esta situación ha sido, por mucho tiempo, el análisis univariado de la capacidad del proceso respecto de cada una de las características de interés por separado. Sin embargo, el crecimiento de las técnicas de análisis multivariado de datos, dio lugar a la concepción y tratamiento de este problema precisamente como un problema multivariado.

El ***análisis de capacidad multivariado*** ha sido objeto de estudio durante los últimos años, período en el que muchos autores han desarrollado y propuesto diferentes alternativas para los índices multivariados. Sin embargo, este tema constituye una línea de investigación que se encuentra actualmente en pleno desarrollo y, como tal, existen muchos aspectos aún no resueltos en torno a su aplicación en contextos prácticos.

Este trabajo pretende hacer una breve reseña metodológica de las alternativas disponibles más difundidas para construir índices de capacidad multivariados, y presentar un ejemplo de aplicación de una de estas alternativas sobre un conjunto de datos reales. Como parte de la aplicación, se tiene por objetivo también comparar el comportamiento de los índices univariados construidos de manera independiente para cada característica de calidad, con el obtenido de manera multivariada, considerando diferentes situaciones de capacidad real del proceso en cuestión.

2. Reseña metodológica del análisis de capacidad.

2.1. Índices univariados de capacidad de procesos.

Los primeros intentos de cuantificar la capacidad de un proceso estuvieron inmersos en un contexto bastante simplificado, en el que se consideraba que el proceso bajo estudio poseía una única característica de calidad de interés, y más aún, que el comportamiento de dicha característica podía ser modelado adecuadamente por una distribución normal. Esto dio origen al desarrollo de los índices de capacidad univariados bajo distribución normal.

Hoy en día, la teoría desarrollada en torno de los índices de capacidad univariados es extensa, incluyendo el desarrollo de intervalos de confianza, test de hipótesis, alternativas para distribuciones no normales, especificaciones unilaterales, etc. Sin embargo, esto no es objeto de estudio en este trabajo, razón por la que sólo se dará una breve reseña sobre los índices univariados más tradicionales.

Los primeros índices en aparecer en la literatura, y los más habitualmente utilizados en la actualidad, son los índices C_p y C_{pm}.

El índice C_p, definido por Kane (1986), se construye como el cociente entre el rango de variación aceptable del proceso y su rango de variación natural:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma}$$

donde $LSE \; y \; LIE$ son los límites superior e inferior de especificación para el proceso y σ es el desvío estándar real del mismo.

Este índice fue diseñado para proveer una medida relativa de la magnitud de la variación total del proceso respecto de la variación permitida por especificación. Claramente, valores del índice superiores a uno indican que el proceso es capaz, ya que su intervalo de variación natural es menor que la tolerancia especificada.

Un aspecto desfavorable de este índice, en algunas situaciones, es que no toma en cuenta ninguna información relativa al centrado del proceso. De esta manera, este índice sólo mide su capacidad potencial de cumplir con las especificaciones.

Para salvar esta deficiencia del índice C_p se definieron varios índices alternativos que incluyen en su construcción medidas de divergencia respecto del centro nominal del proceso. Ejemplos de éstos son los índices, k, C_a, C_{pk} y C_{pm}, todos ellos definidos de manera que capturen tanto problemas en la variación del proceso como problemas con el centrado respecto de un objetivo especificado.

En particular, el C_{pm} es uno de los más utilizados, y se define de la siguiente manera:

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$$

Su construcción considera dos componentes de variación: por un lado la variación de los datos respecto de la media del proceso, y por otro la variación de la media del proceso respecto del valor medio nominal especificado. Es evidente por su construcción, que valores grandes de este índice señalan un proceso capaz y centrado alrededor del objetivo. Cuando el proceso se encuentra centrado los índices C_p y C_{pm} coinciden, de modo que las diferencias entre ellos indican la falta de centrado del proceso.

Un aspecto a tener en cuenta sobre este índice es que su utilización es válida sólo cuando el valor objetivo del proceso se ubica en el punto medio del intervalo de tolerancia. Si este no fuera el caso, deben utilizarse otra serie de indicadores diseñados para considerar este tipo de tolerancias asimétricas.

2.2. Índices multivariados de capacidad de procesos.

Cuando la calidad de un producto o servicio no se mide a través de una sola característica, sino que, por el contrario, su calidad corresponde a la interacción de múltiples características, una alternativa a la implementación de estudios de capacidad univariados independientes, consiste en considerar algún procedimiento que tenga en cuenta las relaciones que posiblemente existan entre las características estudiadas. En términos específicos, algún procedimiento que considere la información contenida en la estructura de covariancias de tales características. Durante las últimas décadas, varios autores han desarrollado y presentado alternativas de índices de capacidad basados en técnicas multivariadas de análisis estadístico.

En este trabajo se presentan tres de estas alternativas, cada una de las cuales enfoca el problema desde un punto de vista particular. El primero es un índice propuesto por Chan et al. (1991), basado en una comparación de esperanzas de distribuciones. En segundo lugar se presenta la alternativa de Taam et al. (1993), quienes proponen un índice construido mediante la comparación de los volúmenes de las regiones de tolerancia natural del proceso y de especificación. Por último, la alternativa de Wang y Du (2000) propone llevar a cabo el análisis de capacidad multivariado sobre una transformación de los datos originales, haciendo uso de la técnica multivariada de componentes principales.

El índice propuesto por Chan *et al*. (1991) es un análogo multivariado del índice univariado C_{pm}, definido por:

$$C_{pm} = \sqrt{\frac{v}{E[(X_i - T)A^{-1}(X_i - T)']}} \quad (1)$$

donde v es el número de características de calidad estudiadas, X_i es el i-ésimo vector de observaciones de las v características, T el vector que contiene los valores nominales para cada variable y A es la matriz que representa la estructura de covariancias determinada por los límites de especificación.

Si la matriz A es conocida, un estimador natural de este índice es:

$$\hat{C}_{pm} = \sqrt{\frac{nv}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - T)'A^{-1}(X_i - T)}} \quad (2)$$

cuyo numerador es el producto entre el tamaño muestral y el número de variables utilizadas. Este valor indica los grados de libertad asociados al denominador, que representa la suma de las distancias de Mahalanobis observadas respecto de los valores nominales.

Aquellos procesos que generen observaciones agrupadas alrededor del vector nominal, tendrán en el $\hat{C}_{pm}$ un denominador pequeño en magnitud en comparación con el que tendría este mismo proceso si las observaciones generadas presentaran más dispersión y un centrado no localizado sobre los valores nominales. Por lo tanto, valores pequeños de $\hat{C}_{pm}$ indican que el proceso no es capaz de cumplir las especificaciones, mientras que valores grandes indican que el proceso goza de un buen nivel de capacidad.

La alternativa de Taam *et al*. (1993) consiste de un índice basado en la razón de dos volúmenes:

$$MC_{pm} = \frac{Vol(R_1)}{Vol(R_2)} = \frac{Vol(\text{región de tolerancia modificada})}{Vol\left((X-\mu)'\Sigma_T^{-1}(X-\mu) \leq K(q)\right)} \quad (3)$$

La región R_1, llamada región de tolerancia modificada, es el mayor elipsoide con centro en el vector objetivo y completamente contenido en la región de tolerancia original y R_2 es la región que conduce a una proporción esperada de ítems no conformes de 0,27%, bajo la distribución natural de los datos, la cual tiene forma también elíptica bajo el supuesto de distribución normal multivariada.

Un estimador de MC_{pm} puede ser expresado como:

$$\widehat{MC}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\hat{D}}$$

donde

$$\hat{C}_p = \frac{Vol(\text{región de tolerancia})}{Vol(\text{región del proceso estimada } 99{,}73\%)}$$

y

$$\hat{D} = \left[1 + \frac{n}{n-1}(\bar{X} - T)S^{-1}(\bar{X} - T)'\right]^{1/2}$$

Cuando el proceso se encuentra bajo control estadístico, de modo tal que la media del proceso se encuentra en el objetivo y la variabilidad del proceso es pequeña en relación a las especificaciones, el índice toma un valor aproximadamente igual a 1. En esta situación, el 99,73% de los datos se encuentran dentro de la región de tolerancia modificada. Valores de $\hat{C}_p$ mayores a 1 implican que el proceso tiene menor variabilidad que la establecida por los límites de especificación con cierto nivel de confianza; mientras que los valores menores a 1 implican una variabilidad mayor. Análogamente, $0 < 1/\hat{D} < 1$ mide la cercanía entre el vector de medias del proceso y el de valores nominales; un valor grande de $1/\hat{D}$ indica que el proceso está centrado muy cerca de los valores objetivo especificados.

Wang y Du (2000) propusieron un método que utiliza el análisis de componentes principales para describir el comportamiento de un proceso para datos multivariados. La ventaja de este enfoque radica en que el análisis de componentes principales es capaz no sólo de reducir la dimensión del problema, sino también de transformar datos correlacionados en independientes, lo cual simplifica considerablemente los cálculos.

Sea X la matriz de datos observados de orden $n \times v$, donde v es el número de características de calidad del producto, n el tamaño muestral de unidades observadas, $\bar{X}$ es el vector de medias muestrales de las observaciones de orden $1 \times v$ y S es la matriz de variancias y covariancias de orden $v \times v$. Sean LIE y LSE los vectores de orden $1 \times v$ que contienen los límites de especificación inferiores y superiores respectivamente. El vector T de orden $1 \times v$ contiene los valores nominales de las v características de calidad.

Aplicando el método de componentes principales, los datos observados quedan representados en un nuevo sistema de coordenadas, determinado por las v componentes principales que es posible calcular. Estas componentes se obtienen mediante la expresión:

$$PC_i = x\, u_i \qquad i = 1, 2, \dots, v$$

donde x representa a los vectores de orden $1 \times v$ de las observaciones originales sobre las variables, y los u_i son los vectores columna que contienen los autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$, de la matriz de variancias y covariancias.

Los límites de especificación y los valores nominales de cada característica son transformados de la misma manera obteniéndose:

$$\begin{cases} LIE_{PC_i} = LIC\, u_i' \\ LSE_{PC_i} = LSC\, u_i' \\ T_{PC_i} = T\, u_i' \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, v$$

Similarmente, los estimadores muestrales, S y $\bar{X}$, de las PC_i pueden ser definidas como:

$$\begin{cases} S_{PC_i} = \lambda_i \\ \bar{X}_{PC_i} = \bar{X}\, u_i' \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, v$$

La razón entre el valor de un autovalor y la suma de todos ellos representa la proporción de variabilidad que explica la componente principal asociada a ese autovalor. Usualmente, sólo algunas de las componentes principales contribuyen a gran parte de la variabilidad total, de modo que utilizando sólo dicho subconjunto de componentes, se reduce la dimensión del problema multivariado. Jackson (1980) propuso un test χ^2 para identificar las componentes significativas. Utilizando dicho método, se puede elegir el número adecuado de PC_i a utilizar.

Una vez identificadas las componentes principales significativas, el análisis de capacidad se realiza siguiendo un procedimiento similar al caso univariado, pero sobre estas nuevas variables definidas por las PC_i.

Los índices obtenidos por este método no requieren el supuesto de distribución conjunta normal de los datos, ya que se desarrollaron formas de obtención de los mismos en situaciones donde este supuesto no es válido.

En el caso de contar con datos distribuidos según una ley normal multivariada, las alternativas multivariadas para los índices C_p y C_{pm} se obtienen de la siguiente manera:

$$\widehat{MC}_p = \left(\prod_{i=1}^{v} \hat{C}_{p;PCi}\right)^{1/v}$$

$$\widehat{MC}_{pm} = \left(\prod_{i=1}^{v} \hat{C}_{pm;PCi}\right)^{1/v}$$

donde los índices que componen el producto en cada caso, son simplemente los índices univariados pero calculados sobre las componentes principales, usando los límites de especificación, valores nominales, medias y variancias transformados. Por ejemplo,

$$\hat{C}_{p;PCi} = \frac{LSE_{PC_i} - LIE_{PC_i}}{6\sqrt{S^2_{PC_i}}}$$

Una variación de estos índices para el caso de datos no normales fue propuesta por los mismos autores de este desarrollo.

3. Ejemplo de aplicación.

3.1. Presentación del problema.

El objetivo de la aplicación que se realiza en este trabajo es presentar comparativamente el comportamiento de los índices de capacidad univariados, en relación a sus alternativas multivariadas, considerando diferentes situaciones dadas por la capacidad real del proceso.

Para ello, se dispone de un conjunto de datos reales correspondientes a 150 mediciones de tres variables de interés sobre un lote de comprimidos medicinales. Estas variables representan el peso, la dureza y el espesor de los comprimidos.

Cada una de las variables consideradas tiene asociados, en la práctica real, un valor objetivo y límites de especificación inferior y superior que deben satisfacerse. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, se consideran cuatro situaciones ficticias en las que los valores objetivos y límites de especificación se seleccionaron a priori para lograr cuatro escenarios diferentes respecto de la capacidad real del proceso. Esto es, a partir de las estadísticas descriptivas de cada variable, se definieron especificaciones que generan las combinaciones de proceso centrado y no centrado, junto con límites de especificación estrechos y amplios.

El análisis descriptivo individual de cada variable se muestra en los gráficos 1 a 3.

Gráfico 1: *Resumen descriptivo para la variable Peso.*

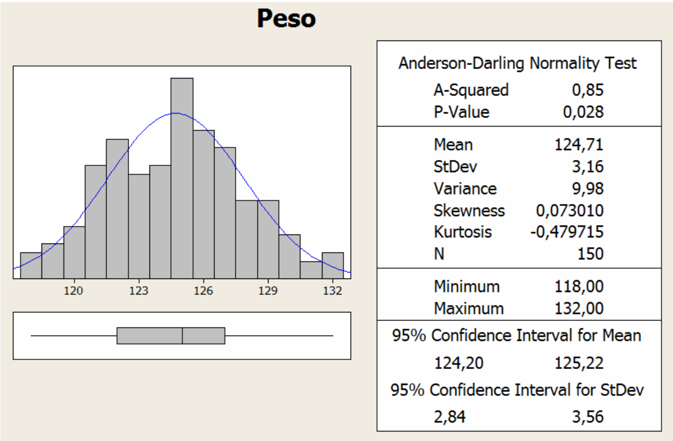


Gráfico 2: *Resumen descriptivo para la variable Dureza.*

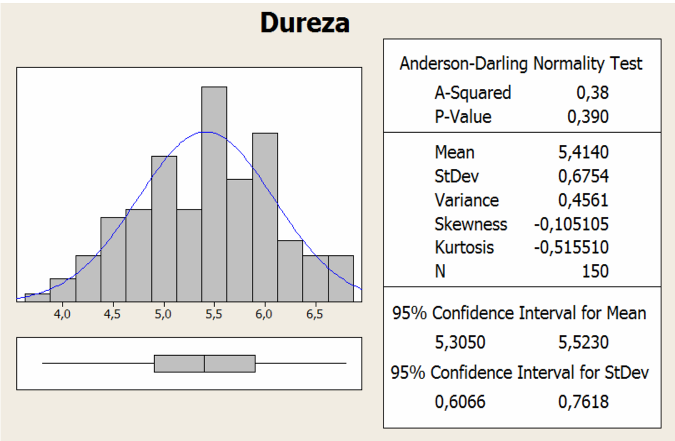
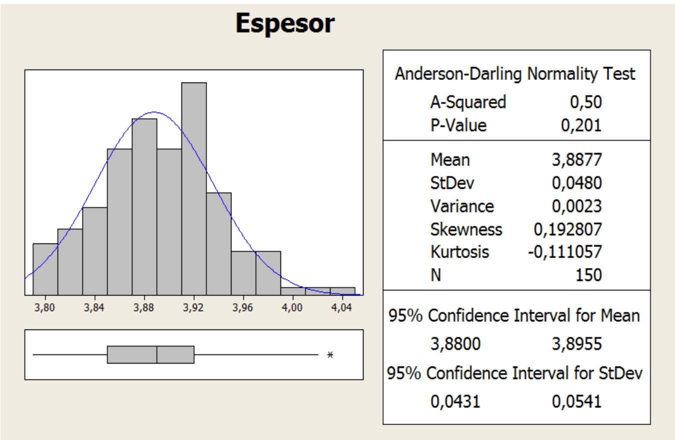


Gráfico 3: *Resumen descriptivo para la variable Espesor.*



Los cuatro escenarios considerados se describen en la tabla 1.

Tabla 1: *Escenarios diseñados para el análisis de capacidad.*

Escenario	Variable	Objetivo ± tolerancia		
1	**Peso**	125	±	5
	Dureza	5,4	±	1
	Espesor	3,9	±	0,07
2	**Peso**	125	±	10
	Dureza	5,4	±	2,1
	Espesor	3,9	±	0,15
3	**Peso**	122,5	±	5
	Dureza	5,7	±	1
	Espesor	3,88	±	0,07
4	**Peso**	122,5	±	10
	Dureza	5,7	±	2,1
	Espesor	3,88	±	0,15

El análisis de los datos se realizó utilizando de manera conjunta y complementaria los programas estadísticos MINITAB (v16) y SAS (v9.2).

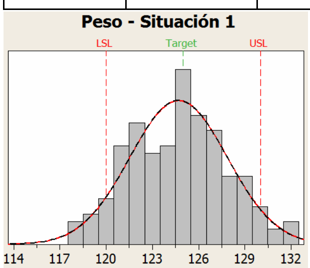
3.2. Análisis de capacidad univariado.

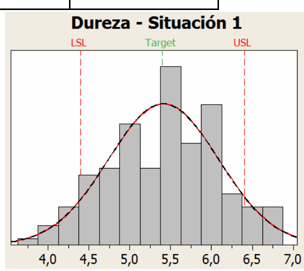
La primera instancia de análisis comprende el cálculo de los índices de capacidad univariados para cada variable en forma independiente. Con este propósito se emplean los índices C_p y C_{pm}, definidos anteriormente.

Los resultados de ambos índices se muestran a continuación junto con la representación gráfica de cada situación.

Tabla 2: *Resultados para la situación 1*

Índice	Peso	Dureza	Espesor
C_p	0,53	0,49	0,49
C_{pm}	0,53	0,49	0,47





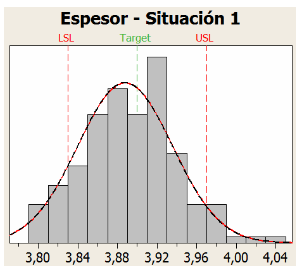
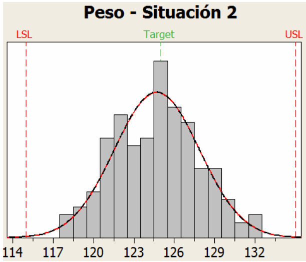
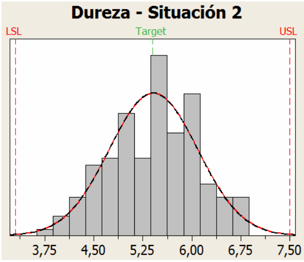


Tabla 3: *Resultados para la situación 2*

Índice	Peso	Dureza	Espesor
C_p	1,05	1,03	1,04
C_{pm}	1,05	1,04	1,01





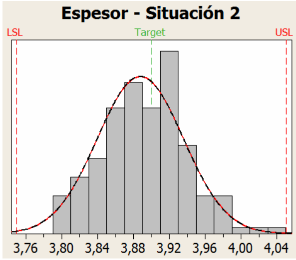
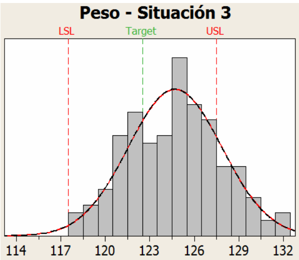
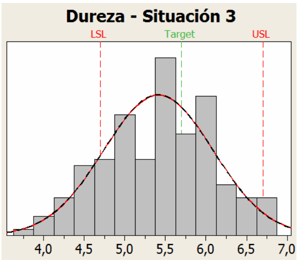


Tabla 4: *Resultados para la situación 3*

Índice	Peso	Dureza	Espesor
C_p	0,53	0,49	0,49
C_{pm}	0,43	0,45	0,48





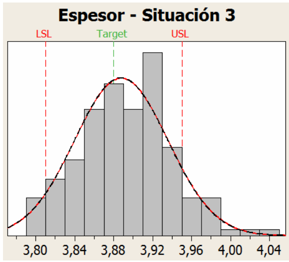
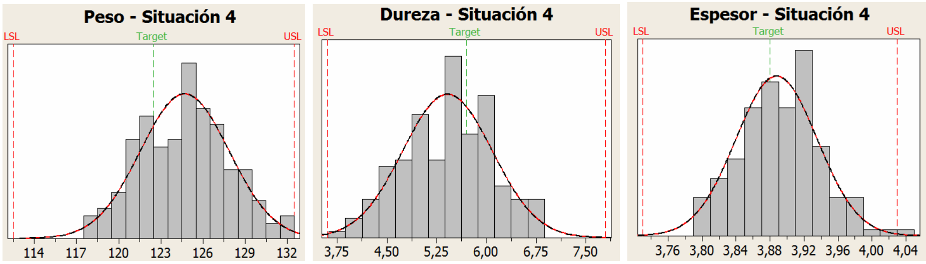


Tabla 5: *Resultados para la situación 4*

Índice	Peso	Dureza	Espesor
C_p	1,05	1,03	1,04
C_{pm}	0,86	0,95	1,03



En cada caso, los resultados de los índices se corresponden correctamente con la situación que se pretendía generar. El escenario número 2 es el que representa una situación ideal, esto es, el proceso está centrado y la tolerancia natural del proceso se encuentra contenida dentro de los límites de especificación, lo cual se refleja con valores del índice C_{pm} iguales o superiores a uno en las tres variables. Por el contrario, el escenario número 3 es el menos favorable, ya que supone un proceso no centrado en el valor objetivo y con límites de especificación más estrechos que los límites de variación natural del proceso, reflejado en valores de C_{pm} sustancialmente menores a la unidad.

1.1. Análisis de capacidad multivariado.

La contrapartida multivariada del análisis de capacidad se realiza empleando la alternativa multivariada del índice C_{pm}, propuesta por Chan et al. (1991).

Como ya se ha expresado, el empleo de una técnica multivariada para analizar la capacidad del proceso posee la ventaja de incorporar en el estudio a las correlaciones que posiblemente existen entre las variables estudiadas.

Este índice en particular, incorpora la estructura de asociación mediante una matriz de variancias y covariancias "especificada". Esto es, además de los valores objetivo y los límites de especificación para cada variable, debe definirse también la estructura de asociación que deben respetar las variables al moverse de manera conjunta dentro de sus intervalos de especificación.

De esta manera, a las especificaciones de cada escenario detalladas en la tabla 1, se agrega una matriz de especificaciones para las variancias y covariancias. En esta aplicación, las especificaciones para las covariancias se determinaron de modo que se respete la estructura de asociación real observada en los datos.

Los resultados del índice para cada situación se muestran en la tabla 2.

Tabla 2: *Valores de C_{pm} multivariado para cada escenario.*

Escenario	C_{pm} Multivariado
1	0,6355
2	0,8611
3	0,5230
4	0,7395

Al igual que con los resultados univariados, los valores obtenidos en los índices respetan las características de cada situación, siendo nuevamente la situación 2 la que arroja el nivel de capacidad más alto, y la situación 3 el nivel de capacidad más bajo.

No obstante esto, la magnitud de los niveles de capacidad ha variado respecto de las magnitudes observadas en el caso univariado.

La situación 2 es, a primera vista, la que recibe mayor atención, ya que la diferencia en la magnitud del índice multivariado respecto de los tres univariados modifica la decisión respecto de la capacidad del proceso. Esto puede resultar inicialmente confuso, pero no debe perderse de vista el hecho de que ambos enfoques son conceptualmente diferentes, de modo que no necesariamente el estudio debe proveer resultados consistentes.

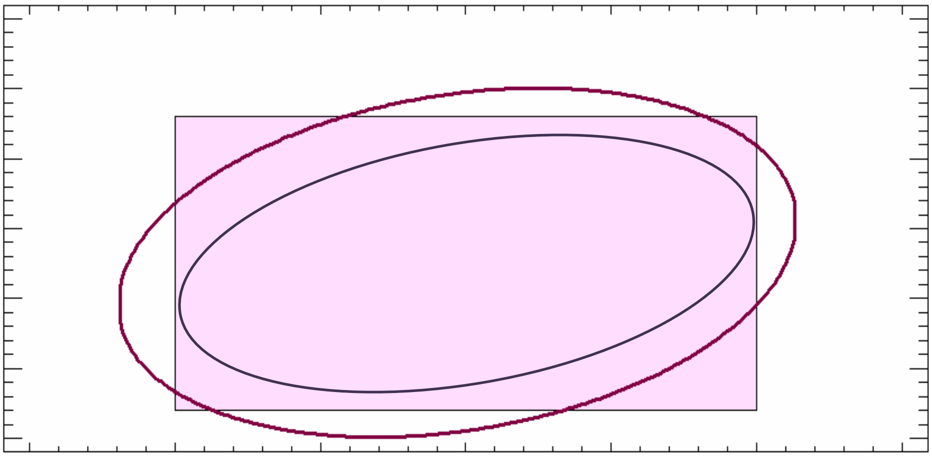
A este respecto, y en un sentido más general, una visión geométrica sencilla permite comparar el punto de vista de cada enfoque.

Considérese una situación elemental en la que el proceso queda descripto por dos variables de interés que se encuentran significativamente correlacionadas y cuya distribución conjunta puede ser descripta adecuadamente por un modelo normal bivariado.

El análisis de capacidad univariado sobre cada característica por separado, generará sobre el campo de variación de las variables una región de tolerancia rectangular, en la que todas las combinaciones de valores de ambas variables son consideradas “conformes” o “aceptables” para el proceso.

Sin embargo, si los datos realmente presentan una estructura de asociación, no es cierto que todas las combinaciones de valores dentro de las especificaciones de cada variable sean igualmente aceptables. Esta es la ventaja de considerar el problema desde la perspectiva multivariada. Las especificaciones sobre la matriz de variancias y covariancias de los datos generan una región de tolerancia elíptica, que respeta la estructura de asociación deseada en los datos.

Gráfico 4: *Elipse de capacidad del proceso de nivel 99,73% (elipse exterior), región de especificación elíptica (elipse interior) y región de especificación rectangular.*



Es claro y prácticamente indiscutible que la ventaja fundamental del enfoque multivariado es que la construcción de los índices tiene en cuenta la estructura de asociación de las variables, información sumamente valiosa que es completamente ignorada al realizar el análisis de manera univariada.

Sin embargo, el costo asociado a esta ganancia en precisión es un incremento en la complejidad de cálculo de los índices y una mayor dificultad para interpretar los resultados obtenidos, ya que, en caso de obtener resultados negativos, tener una medida de resumen unidimensional para representar un comportamiento multivariado no permite identificar de manera directa las causas de la falta de capacidad del proceso.

En relación a los índices presentados en este trabajo, el índice $\hat{C}_{pm}$ propuesto por Chan et al. considera proximidad y dispersión respecto del objetivo, a la vez que mantiene ciertas propiedades estadísticas que permitirían realizar test de hipótesis para evaluar la capacidad del proceso. La situación ideal es que este índice tome un valor igual a 1, sin embargo, aunque esto indique que el proceso es capaz, no es posible determinar cuál es el porcentaje de disconformidad que se está tolerando.

El índice MC_{pm} presentado en segundo lugar tiene las mismas propiedades que un índice de capacidad univariado, esto es, cuando el proceso se encuentra centrado en el objetivo y el índice toma el valor uno, se puede deducir que el 99,73% de los resultados del proceso caen dentro de la región de especificación.

Por su parte, la propuesta de Wang y Du, basada en la utilización de componentes principales, no requiere el supuesto de normalidad de los datos. El enfoque permite además reducir la dimensión de los datos y transformar datos correlacionados en independientes, simplificando los cálculos.

Para terminar, es importante mencionar que ninguno de los índices propuestos en la literatura hasta el momento es el mejor, en el sentido de cubrir todos los aspectos involucrados en el comportamiento multivariado de un proceso. Si bien todos los métodos propuestos gozan de cualidades razonables, aún no se ha podido establecer un método completamente consistente para evaluar la capacidad multivariada de un proceso.

4. Bibliografía.

CHAN, L. K., CHENG, S. W. and SPIRING, F. A. (1991). A Multivariate Measure of Process Capability. Journal of modeling and Simulation, 11(1), pp. 1-6.

GARCIA, T., VASQUEZ, M., RAMIREZ, G. and GARCIA, J. (2007). Extensión Multivariante del Índice de Capacidad Real de Procesos, Revista Ingeniería UC, 14(3), pp. 86-91.

JACKSON, J. E. (1980). Principal Component and Factor Analysis: Part 1 – Principal Components. Journal of Quality Technoloy, 12, pp. 201-213.

KANE, V. E. (1986). Process Capability Indices. Journal of Quality Technology, 18(1), pp. 41-52. Corrigenda, 18(4), pp. 265.

PEARN, W. L. and KOTZ, S. (2006). Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, Vol 12. Word Scientific.

TAAM, W., SUBBAIAH, P and LIDDY, J. W. (1993). A note on multivariate capability indices. Jurnal of Applied Statistics, 20(3), pp. 339-351.

WANG, F. K. and DU, T. C. T. (2000). Using Principle Component Analysis in Process Performance for Multivariate Data. Omega, 28(2), 185-194.

XEKALAKI, E. y PERAKIS M. (2000). The Use of Principal Components Analysis in the Assessment of Process Capability Indices. Joint Statistical Meetings – Section on Physical & Engineering Sciences (SPES), pp. 3818-3823.