**Nora Mabel Lac Prugent**
**Elda Gallese**
**Paola Verónica Giuliani**
*Instituto de Investigaciones Económicas, Escuela de Economía*

# MÉTODOS MATEMÁTICOS, COMPUTACIÓN Y SU APLICACIÓN ECONÓMICA.

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se muestra la integración de la herramienta computacional al aprendizaje de una materia totalmente abstracta, como es el álgebra lineal y su aplicación a la economía.

El desarrollo matricial del álgebra lineal, considerada muy difícil, facilita a los economistas -en este caso especial a los alumnos de la carrera de Licenciado en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la UNR- el abordaje al aprendizaje de un conjunto de conocimientos teóricos y sus aplicaciones. A través de la utilización del Sistema Basile se brinda un enfoque actualizado para el tratamiento computacional de su disciplina específica.

Este Sistema, desarrollado por el INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) de Francia es un sistema totalmente interactivo: recibe una línea de comando, la trata inmediatamente, imprime el resultado, si corresponde, y espera un nuevo comando. Además, ofrece una gran comodidad para la visualización de las soluciones obtenidas.

BASILE ha sido desarrollado a partir del software MATLAB del que se ha conservado en parte como intérprete. La base de datos, en cambio, ha sido modificada completamente para tratar los objetos específicos de la automática.

La práctica se realiza en el Laboratorio de Matemática. Este laboratorio ha sido asignado al proyecto de investigación “La enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales” dirigido por Mercedes Anido en el marco del Fondo para Mejoramiento de la Calidad Universitaria (FOMEC) Nº 615 del Departamento de Matemática de la FCEyE de la UNR.

## 2. FUNDAMENTOS.

Sin duda alguna, frente a la llegada del tercer milenio, uno de los temas preocupantes es el referido al capital humano. Las altas tasas de desocupación, especialmente entre los jóvenes, es una clara denuncia sobre el peligro que encierra para la sociedad toda el no haber invertido en educación acorde a las necesidades.

En este sentido, la preocupación de la comunidad de los docentes de matemática se ve reflejada en algunos hechos significativos. Es así como en los primeros meses de 1998 comienza a circular un Documento de Discusión con el siguiente título **“Sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario”,** elaborado por The International Commision on Mathematical Instruction (ICMI).

Algunos considerandos se detallan a continuación, intentando dar respuesta a la pregunta ¿Por qué un estudio sobre la enseñanza y aprendizaje de matemática en el nivel universitario.

."(...)*Numerosos cambios han tenido lugar en años recientes que han afectado profundamente la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario. Cinco cambios que aún tienen considerable influencia son : i) el incremento del número de estudiantes que actualmente cursan estudios terciarios; ii) importantes cambios pedagógicos y curriculares en el nivel pre-universitario; iii) las crecientes diferencias entre la educación matemática de nivel secundario y la nivel terciario, con respecto a sus propósitos, objetivos, mëtodos y enfoques de enzeñanza; iv) el rápido desarrollo de la tecnología; y v) presiones sobre las universidades para que den cuenta públicamente de sus acciones. Por supuesto, todos estos cambios son generales y han tenido influencia en otras disciplinas. Sin embargo, dada su posición central en la educación general, y su naturaleza obligatoria para muchos estudiantes, puede argüirse que estos cambios quizás han tenido una mayor influencia en matemäticas que en cualquier otra disciplina.(...)".*

*"(...) Nuevos desarrollos en la enseñanza y aprendizaje de matemática tratan de resolver estos problemas. Por ejemplo nuevos enfoques para Cálculo y Álgebra Lineal en Estados Unidos reflejan, en parte intentos de hacer estos temas más atrayentes y significativos para la mayoría de los estudiantes. También se han producido cambios de contenido, con énfasis creciente en algunas universidades en aplicaciones y modelos, historia y filosofía de las matemáticas etc. (...)"*

*"(...) Mundialmente se estä haciendo mayor uso de computadoras y calculadoras en la instrucción matemática. Hay muchos software y paquetes de enseñanza disponibles para un gran rango de tópicos curriculares. Esto, por supuesto, plantea la cuestión de qué es lo que estos software y paquetes ofrecen para la enseñanza y aprendizaje del tema, y que problemas potenciales pueden generar para la comprensión y el razonamiento. Sería beneficioso juntar aquellos ejemplos donde el uso de la tecnología informática y software resultan enriquecedores para la experiencia de los estudiantes y devienen en una mejor comprensión y aprendizajedizaje (...)"*

Este documento fue sometido a discusión de la comunidad matemática y del 8 al 12 de diciembre de 1998 se realizó la conferencia de Estudio en Singapur. Está previsto para agosto del 2000 la "Presentación de las principales consideraciones y hallazgos" en el ICME-9 a realizarse en Japón. Entre 1999 y 2001 los editores producirán un volumen con las contribuciones, y los resultados de las deliberaciones de los grupos de trabajo y paneles de la conferencia que se espera sea una referencia básica para el tema por algún tiempo.

## 3. EL CONTEXTO ACTUAL: LA ASIGNATURA MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS II.

La materia Matemática para Economistas II es cursada en el segundo cuatrimestre por los alumnos del tercer año de la carrera de Licenciado en Economía dictada en la FCEyE de la UNR. Entonces, es de duración cuatrimestral con una carga horaria de seis horas teórico-prácticas semanales. La práctica en Laboratorio es, en promedio, de dos horas semanales dependiendo de la coordinación necesaria con el desarrollo de los temas teóricos.

El programa de la asignatura Matemática para Economistas II abarca los siguientes temas fuertes:

* Repaso de álgebra matricial y de álgebra vectorial.
* Formas lineales y cuadráticas.
* Eigenvalues y eigenvectors. Diagonalización de matrices simétricas y reales.

* Matrices semejantes.
* Programación matemática: programación lineal y no lineal.
* Teoría de los juegos.
* Nociones de programación dinámica.

Es evidente lo extenso del programa para ser dictado en un cuatrimestre. Solamente el desarrollo de la parte específica del álgebra lineal en las asignaturas de otras carreras insume una duración igual al desarrollo completo del programa en cuestión y en otros casos para un mayor análisis y comprensión teórico y práctico los cursos de álgebra lineal tienen una duración anual.

En este contexto, y gracias a la posibilidad de utilizar el Laboratorio de Matemática se decidió la incorporación de la práctica en computadoras para, por un lado, paliar el factor “olvido” de los alumnos en los repasos de los contenidos temáticos y poder así avanzar en la aplicación económica. Por otro lado, agilizar el desarrollo más completo relacionados con la programación matemática.

De esta manera, en el Laboratorio de Matemática se trabaja en forma interactiva con la computadora, centrando el aprendizaje en la actividad del alumno. El docente es un facilitador del aprendizaje, a cargo de consultas actuando sólo cuando los comandos de ayuda del sistema sean insuficientes.

## 4. LAS GUÍAS DE TRAAJO PROPUESTAS.

Esta experiencia pedagógica se está realizando en la Facultad desde el año académico 1997 y continúa. Los ejercicios se desarrollan utilizando cinco guías de trabajo. La **primera guía** consiste en ejercicios de simple ejemplificación de las habilidades del sistema a través de la revisión del álgebra vectorial, los temas abordados son:

* Introducción de vectores en máquina por sus componentes.
* Transposición de vectores.
* Operaciones con vectores.

La **segunda guía** se efectiviza mediante ejercicios de revisión del álgebra matricial en los que por reiterativos se adquiere el manejo de las cualidades del sistema logrando mayor velocidad y fluidez. Con el espíritu de aprender las notaciones y operaciones con matrices, los tópicos aquí abordados son:

* Introducción de matrices en máquina.
* Transposición de matrices.
* Operaciones con matrices.
* Inversión de matrices.
* Submatrices.

Se completa el análisis con la resolución de sistema de ecuaciones.

Es sabido, que los modelos económicos, últimamente tan utilizados, han estimulado enormemente el interés por el álgebra lineal. Por ello, se considera oportuno que la **tercera guía de trabajo** contemple los siguientes casos:

* Modelo de mercado con dos bienes.
    - obtención de cantidades y precios de equilibrio

- obtención de cantidades y precio de equilibrio de un mercado
- análisis de un mercado compuesto por dos bienes.

∗ Modelo de la renta nacional
- otención de cantidades óptimas de ingreso y consumo
- verificación si la solución matemática es significativa desde el punto de vista económico.

El objetivo perseguido en la **cuarta guía de trabajo** es el de trabajar con polinomios matriciales, calcular los autovalores y autovectores asociados a una matriz cuadrada. En este caso se contemplan los siguientes temas:

∗ Cálculo de autovalores y autovectores.

∗ Cálculo de matrices diagonales.

∗ Verificación del teorema de Hamilton-Caley.

∗ Cálculo de matrices semejantes.

De esta manera, los estudiantes poseen un conjunto de conocimientos computacionales del álgebra lineal aplicados a la economía. Con este aprendizaje, se considera que el alumno de la carrera de Licenciado en Economía puede abordar un tema tan importante como es el modelo de insumo-producto de Leontieff desde su perspectiva algebraica. Entonces, los items que abarca la **quinta guía de trabajo** son:

∗ Modelo de insumo-producto de Leontieff.
- cálculo de la matriz de coeficientes de requerimientos directos e indirectos
- cálculo del vector de producción
- cálculo de la matriz de transacciones intersectoriales.

La práctica en el Laboratorio se complementa obviamente con desarrollos teóricos realizados en el aula. Es importante recordar que esta ejercitación está dirigida a usar la computadora como una "calculadora inteligente" y ésto NO es suficiente para realizar el aprendizaje de un curso de álgebra lineal, debiéndose completar los conocimientos con la adecuada bibliografía y marco teórico.

## 5. EL MODELO DE INSUMO-PRODUCTO DE LEONTIEFF.

### 5.1. Introducción teórica al modelo.

A principios de la década del '30 W. Leontieff desarrolló un modelo lineal de la economía nacional. Este sistema insumo – producto suministra la estructura para analizar y medir la corriente de insumos y de productos que circulan entre los distintos sectores relacionados de la economía. Concretamente, la matriz de insumo producto (MIP) en su versión original es un registro ordenado de las transacciones entre los sectores productivos de una economía, orientados a la satisfacción de la demanda final. En la actualidad este análisis se aplica predominantemente al estudio de sistemas más reducidos (por ejemplo las relaciones entre distintos sectores de una misma empresa) y más amplios (economía internacional).

La relevancia de este sistema, también conocido en la literatura como input - output, es que aplica el mismo procedimiento para todos los casos, a saber, "(...) se define la interdependencia existente entre los diferentes sectores que componen el sistema en cuestión, mediante una serie de ecuaciones lineales cuyos coeficientes numéricos representan las características estructurales propias del mismo. El valor de estos coeficientes se determina empíricamente (...)"[1].

El análisis de insumo producto de Leontief, en su versión estática, busca el nivel de producción que se deberán alcanzar en cada sector de la economía para satisfacer la demanda final y el nivel de precios, dado el valor agregado de cada sector. En la versión estática – comparada se trata de predecir los efectos de cambios en las distintas variables que intervienen en el modelo, como consecuencia de cambios acontecidos entre dos momentos de tiempo. El presente análisis se realizará sólo en su versión estática.

Cualquiera sea el sistema input - output de que se trate (economía nacional o empresas, estático o estático - comparado) el interés principal del mismo radica en la posibilidad de planificación de la producción por parte de las autoridades.

A continuación se desarrollan los conceptos fundamentales de este modelo para una economía nacional, haciendo especial énfasis en la resolución matemática y las condiciones que aseguran la existencia de una solución económicamente significativa.

### 5.2. Supuestos del modelo.

1. Economía que produce *n* bienes (producidos en *n* sectores): j = 1, 2, ..., *n*. Esos mismos bienes son utilizados como insumo en todos los sectores: i = 1, 2, ..., *n*.
   De cada bien o sector hay una demanda final o excedente o producto neto ($d_i$).
2. Los coeficientes de insumos o coeficientes técnicos (definidos $a_{ij}$) son constantes; es decir, independientes del nivel de producción (rendimientos constantes a escala).
3. No hay producción conjunta. Esto significa que con una misma técnica se produce un solo bien. La no existencia de producción conjunta implica que con una sola técnica se produce un solo bien: Si $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ produce una unidad del bien j y una unidad del bien i, entonces j e i son el mismo bien.
4. No existen técnicas alternativas; es decir, no se puede producir un mismo bien con distintas técnicas. La no existencia de técnicas alternativas significa que dos técnicas no pueden producir un mismo bien: Si $a_{ik}$ y $b_{ik}$, con i = 1, 2, ...., n producen una unidad del bien k, entonces $a_{ik} = b_{ik}$ ($\forall$ i = 1, 2, ..., n).
5. No existe exceso de factores, lo cual implica que disponibilidad y uso de un factor son sinónimos. Es decir, es una economía de subsistencia que sólo produce los insumos necesarios para seguir produciendo.

### 5.3. El desarrollo del modelo.

Sean:

$x_j$ Producción total del bien *j* (j = 1, 2, ..., n)

$x_{ij}$ Cantidad de *i* necesaria para producir del bien *j* la cantidad $x_j$ (i = 1, 2, ..., n;
j = 1, 2, ..., n)

$d_i$ Cantidad de *i* destinada a satisfacer la demanda final o excedente.

Teniendo en cuenta los supuestos anteriores, la <u>producción total del bien k</u> (en un período de tiempo dado) es igual a la suma de los insumos o materias primas que se utilizan de este bien para producir todos los demás bienes, más la demanda final del mismo. Esto es, en términos matemáticos:

---

[1] LEONTIEFF, W. "Análisis Económico Input - Output". Edit. Planeta - Agostini. España. 1993. p. 207.

$$x_k = x_{k1} + x_{k2} + ... + x_{kn} + d_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + d_k \qquad (1)$$

El coeficiente de insumos se define como la cantidad del bien i necesaria para producir una unidad del bien j, es decir, en términos relativos:

$$\boxed{a_{ij} = x_{ij} / x_j} \qquad 0 \leq a_{ij} < 1 \qquad (2)$$

donde $a_{ij}$ es constante $\forall$i y $\forall$j. Adicionalmente, $\sum_i a_{ij} < 1$, debido a que el modelo es abierto (parte de los producido se destina a demanda final).

Si se multiplica y divide cada sumando del segundo miembro de (1) por $x_j$:

$$x_k = \frac{x_{k1}}{x_1} x_1 + \frac{x_{k2}}{x_2} x_2 + ... + \frac{x_{kn}}{x_n} x_n + d_k = \sum_{i=1} \frac{x_{ki}}{x_i} x_i + d_k$$

Reemplazando en la expresión anterior por el coeficiente de insumos [expresión (2)] correspondiente se obtiene:

$$x_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + ... + a_{kn} x_n + d_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + d_k \qquad (3)$$

Así, el modelo input – output más sencillo en <u>cantidades físicas</u>, puede ser escrito de la siguiente manera (para k = 1, 2, ..., n):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n + d_1 = \sum a_{1i} x_i + d_1 \\ x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n + d_2 = \sum a_{2i} x_i + d_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4) \\ x_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + a_{nn} x_n + d_n = \sum a_{ni} x_i + d_n \end{aligned}$$

Claramente, en notación matricial:

$$\boxed{x = \mathbf{A} x + d} \qquad (5)$$

donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$ : vector de producción

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$ : vector excedente o demanda final

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ : matriz de (coeficientes de) insumo - producto (o matriz estructural)

Para que puedan aplicarse sin restricciones todos los teoremas del álgebra lineal, la matriz **A** debe ser irreducible. Económicamente esto significa que debe existir interconexión regional entre todos y cada uno de los sectores productivos.

A partir de la expresión (5), se deduce que:

$$\mathbf{I}\,x - \mathbf{A}\,x = d \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,x = d} \qquad (6)$$

donde la expresión (6) es un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas. Se supone que el vector d > 0 (si d = 0 no existe excedente en ningún sector, siendo la economía no reproducible, y el modelo será cerrado; d < 0 no es económicamente posible). **(I – A)** (denominada matriz tecnológica **T**), se pre-multiplica por su inversa –si existe- $(I - A)^{-1}$, (conocida como la inversa de Leontief):

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,x = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,d$$

$$\mathbf{I}\,x = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,d$$

$$\boxed{x = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,d} \qquad (7)$$

Matemáticamente, existe $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ si $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$. Pero económicamente se requiere, además, que x sea no negativo, es decir, que las cantidades de producción en cada sector no sean negativas y no todas ellas nulas. Para satisfacer esta última condición, dado d no negativo, es necesario que la matriz inversa de Leontief sea, a su vez, no negativa (positiva semidefinida). Es decir, se necesita que $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} > 0$, lo cual dependerá de que se cumpla $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| > 0$. La matriz tecnológica (**T**), de orden n, puede ser expresada también como un polinomio de grado n: $\mathbf{T} = f(\lambda) = 0$ (donde $\lambda$ es el vector = $\{\lambda_i\}$, $i \leq 1, 2, ..., n$).

Si **A** es no negativa e irreducible y la raíz máxima es real, positiva y menor que 1, se verifica que la matriz inversa de Leontief es definida positiva (por los teoremas de Perron – Frobenius y el de Metzler.

Recordando lo que dice el **teorema de Perron - Frobenius**: Si **A** es una matriz no negativa e irreductible, existe una única raíz de **A**, $\lambda(\mathbf{A})$, que tiene el mayor valor absoluto. Esta raíz es positiva y simple, tal que:

Su vector característico asociado es estrictamente positivo.

Si $\rho > \lambda_{max}$ entonces existe la inversa de $(\rho I - A)$ y además $(\rho I - A)^{-1} > 0$.

$\lambda_{max}$ tiene un valor comprendido ente el mínimo y el máximo de la suma de las filas de A, y entre el mínimo y máximo de las columnas de A.

Por su parte, el **teorema de Metzler** propone sea **A** = $\{a_{ij}\}$ una matriz positiva. Una condición necesaria y suficiente para que todas las raíces características de **A** sean menores que 1 (en valor absoluto) es que los menores principales de (**I** – **A**) sean positivos. Si además **A** es irreducible $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \{\alpha_{ij}\} > 0$; $\alpha_{ii} > 1$ $(\forall i)$ y $a_{ij} \leq a_{ii}$.

De los dos teorema anteriores se puede extraer la siguiente conclusión: La matriz de Leontieff es una clase particular de matriz no negativa especificada por las siguientes condiciones:

$a_{ij} \geq 0$ (a)

$\sum_i a_{ij} < 1$ (b)

El producto del sector k se definió: $x_k = \sum a_{ki}\, x_i + d_k$ (3), k = 1, 2, ..., n.

Por las condiciones (a) y (b) anteriores, (3) tiene solución única, la cual es positiva si d > 0. Si **A** es, además, irreducible, $a_{ij} > 0$ y la matriz inversa de Leontieff será positiva.

Demostración: Para mostrar que $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ es una matriz positiva (suponiendo $a_{ij} > 0$), es suficiente mostrar que $|\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ es positivo.

Si $\lambda \geq 0$, la matriz $\lambda\mathbf{A}$ podrá satisfacer las mismas condiciones que A. Entonces, $|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}|$ será $\neq 0$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Como el determinante es positivo, si $\lambda = 0$ y continuo en $\lambda$, es positivo cuando $\lambda = 1$.

Es decir, la existencia de la inversa de (**I** – **A**) en un modelo abierto ($d > 0 \Rightarrow x \geq \mathbf{A}\, x$) está garantizada por el hecho de que **A** es no negativa e irreducible (por el Teorema de Metzler). Esta característica es especialmente importante para asegurar la existencia de solución al modelo.

De lo anterior, y teniendo en cuenta las hipótesis de comportamiento previamente enunciadas, se concluye que el modelo (planteado formalmente en (5)) tiene solución, la cual es única. Entonces, calculada empíricamente la matriz estructural y el vector de demanda final, es posible determinar el nivel de producción de cada uno de los bienes o sectores de esta economía por medio de la ecuación (7).

## 6. LA APLICACIÓN ECONÓMICA PROPUESTA.

1. En una economía con tres industrias se sabe que la industria I utiliza 0.05 de su propio producto, 0.33 del producto II y sólo 0.19 del producto III para producir una unidad de su bien. Del producto de este sector se destina el 25% para el sector II y el 34% para el sector III. Su demanda final es de 1,8 millones. El sector II, utiliza el 10% de su producción para autoabastecerse y destina el 12% al sector III. Este sector (II) utiliza 0.38 proveniente del sector III para producir una unidad del bien 2. El sector 3 no utiliza su bien como insumo en su sector. El excedente del sector II es de 0.2 millones y el del sector III es de 0.9 millones.

   a) Presente las matrices de transacciones intersectoriales y la de coeficientes de requerimientos directos e indirectos, según su definición matemática.

   b) Calcule el vector x. Analice sus componentes.

Con estos datos la matriz de coeficientes de insumo-producto es:

<>

A=[.05 .25 .34

.33 .1 .12

.19 .38 0]

A =
! .05 .25 .34 !
! .33 .1 .12 !
! .19 .38 0. !

El vector excedente o de demanda final es:
<>
D=[1.8
.2
.9]
D =
! 1.8 !
! .2 !
! .9 !

Cálculo de la matriz de requerimientos directos e indirectos.
<>
R=INV(EYE-A)
R =
! 1.3720805 .6089571 .5395822 !
! .5665613 1.4218634 .3632545 !
! .4759886 .6560099 1.2405573 !

Cálculo del vector de producción.
<>
X=INV(EYE-A)*D
X =
! 3.0771603 !
! 1.6311121 !
! 2.104483 !

De acuerdo a este resultado para satisfacer sus respectivas demandas finales, el sector 1 deberá tener una producción de 3.08 millones; el sector 2 de 1.63 millones y el sector 3 de 2.1 millones.

Cálculo de la matriz de transacciones intersectoriales

```
<>
B=[A(:,1)*X(1,:) A(:,2)*X(2,:) A(:,3)*X(3,:)]
B       =
!   .1538580     .4077780     .7155242 !
!  1.0154629     .1631112     .2525380 !
!   .5846604     .6198226    0.          !
```

**7. ALGUNOS RESULTADOS.**

Los alumnos llegan al cursado de Matemática para Economistas II con conocimientos previos de computación, pero sin el manejo de un software matemático específico.

El trabajo en Laboratorio se realiza asignando una computadora cada dos alumnos, mientras que la toma de exámenes se realiza en varios turnos para que cada alumno pueda trabajar con una computadora, lo que hace que la manifestación por los estudiantes de las **dificultades** del trabajo en laboratorio sean muy **leves**.

En cuanto al **interés , dinámica o estímulo** que produce el trabajo en Laboratorio es **altamente satisfactorio**.

Por último, el alumno hace una **muy buena valoración** en cuanto a la **utilidad** de la herramienta computacional en el proceso del aprendizaje.

**CONCLUSIONES.**

Los ejes temáticos de esta propuesta abarcan la utilización de las funciones especiales del álgebra lineal, efectivizada mediante el Sistema Basile y su aplicación económica. Los destinatarios son los alumnos de la cátedra Matemática para Economistas II, de la carrera de Licenciado en Economía de la FCEyE de la UNR.

De la revisión del programa actual es evidente lo extenso que es para ser dictado en un cuatrimestre, solamente el desarrrollo de la parte específica del álgebra lineal en otras disciplinas insume una duración igual al desarrollo completo del programa en cuestión y en otros casos para un mayor análisis y comprensión teórico y práctico los cursos de álgebra lineal tienen una duración anual.

En este contexto, y gracias a la posibilidad de utilizar el Laboratorio de Matemática se decidió la incorporación de la práctica en computadoras para, por un lado, paliar el factor “olvido” de los alumnos en los repasos de los contenidos temáticos y poder así avanzar en la aplicación económica. Por otro lado, agilizar el desarrollo más completo relacionados con la programación matemática.

Los ejercicios se desarrollan utilizando cinco guías de trabajo. La primera guía consiste en ejercicios de simple ejemplificación de las habilidades del sistema a través de la revisión del álgebra vectorial. La segunda guía se efectiviza mediante ejercicios de revisión del álgebra matricial y la resolución de sistemas de ecuaciones, para así abordar en la tercera guía la resolución de modelos económicos. La cuarta es la “específica” del álgebra lineal dejando para la última el modelo de insumo-producto de Leontief.

Esta integración de conocimientos ha permitido satisfacer los objetivos iniciales. Esto es, por medio de la herramienta computacional, incrementar la utilización del álgebra lineal motivando a los estudiantes de economía a través de un enfoque actualizado a la resolución sus problemas específicos.

“... y el consejo más importante. En Matemática la computadora es la segunda herrramienta. La primera es el lápiz y el papel.”[2]

**Bibliografía**

ANIDO,M., MEDINA,M Y RUBIO SCOLA, H.”Laboratorio de Análisis Numérico Matricial”. Publicación de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR. 1993BELLMAN, R. “Introduction to Matrix Analysis”. Ed. Mc Graw Hill. 1960.

CHIANG, A. C. “Métodos Fundamentales de Economía Matemática”. Ed. Mc Graw Hill. 3° Edición. 1996.

DOCUMENTO DE DISCUSION. “Sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario” . The international Commission on Mathematical Instruction. ICMI.1998.

GARCÍA, S. “Estática Comparada. Aplicación a modelos de insumo – producto”. Universidad Nacional de la Patagonia. 1997.

HADLEY, G. “Linear Algebra”. Ed. Addison – Wesley Publishing Company. 1961.

LEONTIEFF, W. "Análisis Económico Input - Output". Edit. Planeta - Agostini. España. 1993.

[2] ANIDO,M., MEDINA,M Y RUBIO SCOLA, H.”Laboratorio de Análisis Numérico Matricial”. Publicación de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR. 1993.