



Anido, Mercedes

Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas, Escuela de Estadística

LOS ENFOQUES TEÓRICOS QUE ORIENTAN UNA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

1- INTRODUCCIÓN

En este artículo se presentan algunos referentes teóricos de proyectos institucionalizados en la Universidad Nacional de Rosario, en los que desarrollan un trabajo de investigación colaborativa, desde hace más de diez años, un grupo constituido por docentes de distintas facultades que, buscan la construcción de aportes a una Didáctica de la Matemática adecuada a un nivel terciario.

Tomando como objetivo comunicar los lineamientos didácticos, epistemológicos y metodológicos que han fundamentado la propuesta investigativa, es necesario plantear algunas preguntas que ayuden a comprender las elecciones teóricas realizadas. Por ejemplo:

¿Qué relación existe entre la Didáctica de la Matemática y la llamada Educación Matemática? ¿Qué se entiende por Matemática Educativa?

¿De qué se ocupa la Didáctica de la Matemática? ¿Su campo de estudio es autónomo?

¿Existen teorías específicas acerca de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, o son apropiadas y suficientes las teorías más generales de tipo psicopedagógico? ¿Cuáles de las múltiples disciplinas vinculadas han tenido una influencia realmente fecunda en la investigación en Educación Matemática?

¿La Didáctica de la Matemática es una disciplina científica?

¿Qué clase de cuestiones son planteadas en investigación en Educación Matemática? ¿Cuál es el objeto de estudio en un nivel universitario?

¿Qué es investigar en Educación Matemática? ¿Cuáles son sus métodos investigativos?

¿Qué fundamentos teóricos consideramos apropiados para un nivel universitario?

Sin intentar trasladar el monumental análisis histórico-epistemológico implicado en las respuestas, señalaremos algunas ideas que orienten al objetivo señalado..

2-¿DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, EDUCACIÓN MATEMÁTICA, MATEMÁTICA EDUCATIVA?

Douady (1992) concibe a la Didáctica de la Matemática como un conjunto de relaciones establecidas explícita e implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio, un sistema educativo (el enseñanza) a fin de hacer que se apropie el alumno o a los alumnos de un saber matemático constituido o en vías de constitución

En la tradición anglosajona se habla de Educación Matemática y en la tradición continental europea (Francia, Alemania, España, Italia) se habla de Didáctica de las Matemáticas y, si no es necesario hacer más precisiones, todo el mundo identifica Didáctica de



la Matemática con Educación Matemática (Kilpatrick; Rico; Gómez, 1994) y su objeto último es mejorar las actividades de enseñanza y aprendizaje de la Matemática

En México y zona latinoamericana de influencia se habla de Matemática Educativa incorporando a la Didáctica de la Matemática el "paradigma sociocultural" (Cantoral y Farfán, 2005).

En España y en la Argentina el uso diario no los hace equivalentes. Educación Matemática es un término más general, más comprensivo, que abarca una comunidad más amplia, una problemática más compleja, menos técnica y menos académica y que incluye todo el sistema escolar, mientras que Didáctica de las Matemáticas se toma como el término académico formal universitario de trabajo de investigación y que toma la Educación Matemática como una de sus posibilidades (Kilpatrick; Rico; Gómez, 1994).

Díaz Godino (1991), también realiza una clarificación terminológica. Nos dice que si bien el término Educación es más amplio que Didáctica, y por tanto se podría distinguir entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática, en los autores anglosajones se utiliza la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc., se denomina Didáctica de la Matemática.

Para Steiner (1985), la Didáctica de la Matemática admite, además, una interpretación global dialéctica como "disciplina Científica", y como "sistema social" interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica.

¿La Didáctica de la Matemática es una disciplina científica? ¿Qué condiciones debe reunir una teoría para ser científica?

Según Godino(1991):

- Las teorías científicas no pueden ser realizaciones individuales, ni hechos aislados
- Debe haber una comunidad de personas en las que exista un acuerdo, al menos implícito sobre los problemas significativos de investigación y los procedimientos aceptables para plantearlos y resolverlos
- Es preciso compaginar la autonomía personal en la elaboración de ideas y conceptos nuevos con la necesidad de que estas ideas sean contrastadas y compartidas. Las teorías son pues frutos o consecuencias de las líneas de investigaciones sostenidas por una comunidad más o menos grande de especialistas en un campo determinado.

3-¿QUÉ ES INVESTIGAR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CUALES SON SUS RESULTADOS?

Gutiérrez Rodríguez (1991) al analizar el objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática dice: "En la Didáctica de la Matemática cuyo objetivo último es mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática los investigadores tienen como misión preferente ofrecer respuestas los problemas planteados por los profesores y diseñadores de currículum cuando quieren conseguir que las matemáticas sean comprendidas mejor y aprendidas más profundamente por los estudiantes".

La investigación en esta área está situada en una posición intermedia entre los campos científicos de la Psicología Cognitiva y Educativa, Matemática y Pedagogía con influencia de Sociología, Epistemología, Antropología e Historia.



La Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), constituida por investigadores en Matemática y en Educación Matemática en 1990 afirman que el objeto de investigación en Educación Matemática puede ser por ejemplo: la enseñanza de la Matemática, el aprendizaje de la Matemática, las situaciones de enseñanza aprendizaje, las situaciones Matemáticas, la relación entre enseñanza-aprendizaje y conocimiento matemático, la realidad de las clases de matemática, la visión social de la matemática y su enseñanza o del sistema de educación en si mismo.

En el documento del ICMI "What is Research in Mathematics Education, and What are its Results" (1993), en cuya realización contribuyeron Balacheff, Howson, Sfard, Steinbring, Kilpatrick, y Sterpinski, se dice que los intentos de describir la investigación en Educación Matemática o Didáctica de la Matemática, o cualquier otro nombre que se utilice, pueden parecerse "a la preocupación del legendario hombre ciego explorando las patas de un gran elefante". En dicho documento no se busca describir el estado del arte. En lugar de eso los organizadores del estudio se proponen clarificar diferentes significados que estas ideas tienen para los educadores en matemáticas, sus diferentes perspectivas, metas, problemas de investigación y formas de aproximarse a esos problemas.

En lo práctico y concreto consideramos que se mantiene actual, como principio esencia esencial para un avance en el tema, el punto de vista de Lesh (1979): "el objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la Didáctica de las Matemáticas". Desarrollar conocimientos útiles significa: "a) identificar problemas importantes para la enseñanza de la Matemática, b) plantear conjuntos de cuestiones concretas (y resolubles) relacionadas entre si y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el tema subyacente, c) encontrar respuesta a esas cuestiones que sean útiles en una diversidad de contextos eliminando la información poco válida o inútil, y d) comunicar los resultados y conclusiones de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores".

Selden (2002) se refieren a una forma de indagación disciplinar que frecuentemente involucra observaciones contextualizadas de estudiantes activamente comprometidos en tareas matemáticas que los desafían. Ésta es conducida usando una variedad de metodologías en un dominio específico relativo a la Matemática. Los investigadores en Educación Matemática estudian como la gente aprende y está pensando "matemáticamente". Esto incluye aspectos de la matemática (cálculos, funciones, demostraciones), cognición (resolución de problemas, conceptos erróneos), factores psicológicos (motivación, interés, visualización), métodos de enseñanza (aprendizaje cooperativo, usos de la tecnología) y cultura (género, entorno, estudios comparativos). Los métodos de investigación han sido prestados por la antropología, sociología y psicología, psicología cognitiva especializada así como de la filosofía e inteligencia artificial.

Niss (1999) describe la naturaleza de la investigación en Educación Matemática como el campo científico y escolar de investigación y desarrollo que se propone la identificación, caracterización y entendimiento de fenómenos y procesos actuales potencialmente involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en cualquier nivel educacional

Schoenfeld (2000) nos dice que siendo la Educación Matemática una ciencia social, la Investigación es una muy diferenciada empresa de lo que se considera investigación en la propia Matemáticas. La evidencia no tiene el rigor de una demostración, es acumulativa moviéndose hacia conclusiones que puedan ser consideradas mas allá de una razonable duda. Para la investigación en Educación Matemática se necesita sobre todo



un sólido entendimiento de la matemáticas que vaya más allá del nivel en que los estudiantes trabajan y son observados. Lo mismo que en matemáticas hay que poner el esfuerzo en la selección de las cuestiones a investigar. Éstas no deben ser triviales, no obvias y la respuesta potencial debe ser interesante.

4-¿QUE CLASE DE CUESTIONES SON PLANTEADAS EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA? ¿CUÁL ES EL OBJETO DE ESTUDIO EN UN NIVEL UNIVERSITARIO?

Selden (2002) nos dice que un "caso" de estudio puede ser un sólo individuo, un par de estudiantes, el aprendizaje de la matemáticas (con una perspectiva cognitiva). O, se pueden estudiar las interacciones en la clase o la cultura que envuelve a la escuela que promueve el aprendizaje de la matemática (una perspectiva socio cultural). También puede interesar coordinar estas dos perspectivas, tratando de entender como ambos psicológico y social factores están involucrados. En Selden y Selden (1993) ya se planteaban cuestiones actualmente vigentes como el caso de la cognición individual, dado que uno necesita conocer como los estudiantes llegan a entender aspectos de la Matemáticas, la destreza de resolución de buenos problemas o la habilidad de generar razonables conjeturas y producir demostraciones. Desde una perspectiva social, en un solo salón de clases o en una amplia comunidad, se busca información en relación a las interacciones sociales que afectan al grupo así como a los individuos involucrados. Por ejemplo como puede uno cambiar la cultura de los estudiantes en la clase desde el punto de vista de recepción pasiva del conocimiento a una activa construcción del mismo? O, como puede uno reestructurar un currículum para lograr ese efecto? ¿Cuáles son los efectos de varias estrategias de aprendizaje cooperativo? ¿Qué clase de interacciones son más productivas? Algunos estudiantes avanzan mientras otros tienen desventajas por la introducción de un aprendizaje cooperativo? ¿Cuál es el efecto del género, clase social en el éxito en Matemáticas? En coordinación con la psicológica y perspectiva social, cualquiera de las cuestiones formuladas pueden ser planteadas. Por ejemplo como una contribución individual afecta a la total clase en discusión y recíprocamente.

Un tema de mucho interés son los estudios evaluativos que proveen información sobre los efectos de reformas curriculares en grandes números de estudiantes. Por ejemplo hay un rango a lo largo del tiempo (una década) de los efectos de la reforma del Cálculo en Estados Unidos ¿cuál es su efecto? Varios aportes investigativos se han sumado desde distintas universidades americanas que la evalúan como positiva.

En el Documento "Discusión sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario" propuesto por The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI-1998), se aproxima una respuesta al interrogante que encabeza este epígrafe, a partir de la mención de lo que consideran principales cambios ocurridos a final de siglo, que han afectado profundamente la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario.

El propósito de este Documento de Discusión fue destacar importantes temas relacionados con el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de nivel universitario. Los aspectos principales del Estudio también se presentaron en la reunión ICME-9 en Makuhari, Japón, en el año 2000. Las conferencias y publicaciones relacionadas con este Estudio se pensaba tendrían posiblemente una influencia positiva en la



comprensión y práctica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario en los primeros años del siglo XXI

Las principales influencias tenidas en cuenta en la propuesta del documento del ICMI están dadas por:

- El incremento del número de estudiantes que actualmente cursa estudios terciarios.
 - Importantes cambios pedagógicos y curriculares en el nivel preuniversitario.
 - Las crecientes diferencias entre la educación matemática de nivel secundario y la de nivel terciario, con respecto a sus propósitos, objetivos, métodos y enfoques de enseñanza.
 - El rápido desarrollo de la tecnología.
-
- No hay duda que en muchos países un número significativamente mayor de estudiantes, respecto a diez años atrás, están accediendo a la Universidad y tomando cursos de matemáticas. Por otra parte un porcentaje cada vez menor de estudiantes parece optar por estudios que requieren una cantidad sustancial de matemáticas. Así, los departamentos universitarios se encuentran frente a un doble desafío. Por un lado, tienen que tratar con el ingreso de estudiantes cuya preparación, conocimientos previos y aún actitudes, son muy diferentes de las que tenían los estudiantes anteriormente. Por otro lado, tienen que atraer a estudiantes para seguir estudios en matemáticas, donde las oportunidades de empleo y trabajos bien remunerados no parecen ser tan ciertos como en otras disciplinas.
 - Nuevos desarrollos en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas tratan de resolver estos problemas. Por ejemplo, Cálculo y Álgebra Lineal en Estados Unidos reflejan, en parte, intentos de hacer estos temas más atractivos y significativos para la mayoría de los estudiantes. También se han producido cambios de contenidos, con énfasis creciente en algunas Universidades en aplicaciones y modelado, historia y filosofía de las matemáticas, etc. Sin embargo, en muchos ambientes se tiene una impresión general de que hasta el momento no se ha hecho un esfuerzo suficiente en la enseñanza de las matemáticas, en el nivel de pre-grado, para abordar las cuestiones relacionadas con la formación previa y las necesidades de los estudiantes actuales.
 - También se percibe muchas veces una discontinuidad entre la educación matemática en la escuela secundaria y la educación matemática en la Universidad. Ciertamente, las expectativas y exigencias puestas sobre los estudiantes se incrementan en el nivel terciario. No se presta la misma atención a las teorías de enseñanza en la universidad como se hace en niveles más bajos. Los métodos de enseñanza universitaria tienden a ser más conservadores. Muchas veces los docentes de este nivel tienen responsabilidad simultánea sobre investigación y docencia. Esto es claramente beneficioso pero puede producir un mayor énfasis en la investigación matemática en los lugares en que éste sea el principal criterio para la promoción en los cargos.
 - Los docentes de cursos universitarios de matemáticas, en general, no han sido entrenados para considerar (y pocas veces consideran) criterios educativos, didácticos o pedagógicos más allá de la determinación de los contenidos curriculares; pocos han recibido incentivos o han sido alentados para informarse de los avances en educa-



ción matemática. En otras épocas, la responsabilidad del aprendizaje se dejaba en gran parte a los estudiantes; se suponía que la responsabilidad de los docentes era principalmente el presentar el material claramente, y que los "buenos" estudiantes aprobarían y los "malos" no. La pedagogía contemporánea considera que los docentes tienen gran responsabilidad en el aprendizaje de los estudiantes. El papel de la instrucción (especialmente las clases magistrales) y la responsabilidad de los docentes están siendo reconsideradas.

- Muchos matemáticos son conscientes de los cambios que están sucediendo a su alrededor y de la experimentación con diferentes enfoques de enseñanza, pero tienen limitadas oportunidades para hacer cambios sustanciales debido a la estructura y organización de la docencia de nivel terciario. Más aún, las relaciones entre matemáticos en departamentos de matemáticas y sus colegas en educación matemática es muchas veces difícil, con menos diálogo productivo entre ellos del que debería haber. Otro tanto puede decirse de las relaciones entre matemáticos e ingenieros, economistas, etc., aún cuando la enseñanza de las matemáticas, como servicio para otras disciplinas, es una tarea enorme. Estos factores tienden a trabajar en contra, o demorar mejoras, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente para aquellos estudiantes con intereses principales en otras disciplinas.

El ICMI señala que es importante que los profesionales involucrados en la enseñanza de la Matemática:

- Cambien puntos de vista y experiencias de una amplia variedad de lugares y entornos.
- Comuniquen los desarrollos y proyectos que se han llevado a cabo.
- Consideren las contribuciones de la teoría y la investigación, e identifiquen áreas que aún necesitan investigarse.

Más específicamente los estudios que se recomiendan cubrirían los siguientes puntos relacionados:

- Identificar, revisar, fomentar y diseminar la investigación en temas de educación en el nivel terciario.
- Identificar y describir los enfoques más importantes de la enseñanza de las matemáticas de nivel terciario dentro de diferentes culturas y tradiciones.
- Identificar obstáculos que puedan impedir el aprendizaje de las matemáticas.
- Discutir los propósitos de la enseñanza de las matemáticas para un amplio espectro de estudiantes con diferentes necesidades y formación, y quién debería ser responsable por esa enseñanza.
- Encontrar formas de satisfacer las necesidades cambiantes sin comprometer la integridad del tema.
- Identificar, publicar y someter a críticas, nuevos métodos de enseñanza y los usos positivos de la tecnología.
- Discutir la transacción y las relaciones entre la escuela de nivel secundario y la Universidad.
- Considerar formas de mejorar la preparación de los docentes de matemáticas de nivel universitario.

Pocos matemáticos académicos tienen conocimiento de la investigación que se ha llevado a cabo en educación matemática en general, o en el nivel terciario en particular. La mayoría de ellos no están al tanto de los métodos usados por los investigadores en edu-



cación. Uno de los aspectos más valiosos es que podrían unirse los mayores hallazgos de la investigación en educación matemática, revisarlos, y hacerlos accesibles a una vasta audiencia. Tanto la utilidad potencial como las limitaciones de estas investigaciones debieran considerarse bajo la luz de la práctica de la enseñanza. Asimismo, sería valioso determinar qué áreas de investigación no han sido aún exploradas y alentar el trabajo en ellas.

Las siguientes preguntas que son de particular interés para los estudios que propone el ICMI:

- ¿Qué es la comprensión y el aprendizaje en matemáticas y cómo se logra? ¿Cuáles son las teorías subyacentes y cómo se relacionan con la enseñanza en el nivel universitario?
- ¿Cuáles son los métodos usados en la investigación de educación matemática? ¿Cuáles son los principales hallazgos de la educación matemática? ¿Cuáles son los obstáculos para hacer que la práctica de la enseñanza esté más informada y/o más influenciada por los hallazgos de estas investigaciones?
- ¿Puede una mayor comprensión de la naturaleza del proceso de enseñanza jugar un papel diferente en distintos niveles de enseñanzas? ¿Las teorías que son relevantes en el nivel escolar también lo son en el nivel universitario? ¿Hay necesidad de teorías específicas para el nivel universitario?
- ¿Qué investigaciones se han llevado a cabo sobre métodos tradicionales y alternativos de enseñanza y qué nos dicen sus resultados?
- ¿De qué formas puede cambiar la enseñanza para tener en cuenta las diferencias en formación, habilidades e intereses del alumno? ¿Qué métodos son efectivos para la enseñanza a clases numerosas?
- ¿Qué es lo que sabemos sobre la enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos como Cálculo o Álgebra Lineal? ¿Hay características que son relevantes sólo para tópicos específicos? ¿Hay características que son comunes a varios tópicos?
- ¿Qué formas alternativas de evaluación existen? ¿Cómo puede usarse la evaluación para mejorar el aprendizaje y la comprensión?
- ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos necesarios en las diferentes profesiones?
- ¿Cuáles son las creencias y actitudes de un estudiante sobre las matemáticas? ¿Qué las hace cambiar? ¿De qué manera afectan su decisión de inscribirse en cursos y su posterior desempeño en ellos?
- ¿Cuáles son los efectos del uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? ¿De qué maneras puede usarse la tecnología para mejorar la comprensión?
- ¿Cuáles son los puntos importantes que están poco representados en la bibliografía de investigación y cómo se puede alentar a los investigadores a trabajar en estas áreas?

Dado el acceso relativamente fácil a las computadoras y calculadoras, merece la pena examinar en qué medida podemos aliviar a nuestros estudiantes de algunos de los trabajos penosos que experimentaron generaciones pasadas. ¿Cómo ha cambiado la tecnología el contenido y la filosofía del currículum? ¿Cómo pueden beneficiarse los estudiantes que se especializarán en matemáticas del uso de la tecnología de las computadoras? ¿Cómo pueden beneficiarse los que se especializarán en otras disciplinas? ¿Deberían darse los programas existentes de la misma forma que en el pasado, o puede la tecnología asistir en el desarrollo de habilidades superiores o más importantes? ¿Qué cambios



están, o deberían estar, produciéndose en el currículum? Algunas áreas temáticas de matemáticas están declinando mientras que otras están en ascenso. ¿Cuál es la lógica detrás de estos cambios? ¿Hay áreas que son ahora menos importantes y deberían otras áreas tomar su lugar?

Las matemáticas, como campo de investigación que se desarrolla rápidamente, está continuamente avanzando, con nuevos temas que aparecen, cambios de énfasis, etc. Actualmente se aprecian fuertes interacciones entre diferentes ramas, un interés creciente en aplicaciones, el desarrollo de un enfoque experimental, etc. ¿En qué medida está y debería estar reflejada esta evolución en la enseñanza de matemáticas en el nivel universitario?

¿Qué formas de estudio y qué actividades se usan actualmente en la enseñanza de las matemáticas? ¿Existen otras formas de participación que tengan el potencial para realizar un mejor aprendizaje en los diversos temas, por ejemplo en "laboratorios de matemáticas" donde los estudiantes exploran familias de objetos matemáticos mediante computadoras?

Esto nos trae al punto del enfoque filosófico. Muchos cursos parecen concentrarse en el contenido de conocimiento, poniendo el énfasis en aprender ciertos algoritmos o teoremas y aplicarlos en situaciones controladas. Esto oculta los aspectos creativos y de resolución de los problemas del tema. ¿Debería darse más énfasis a la forma en que los matemáticos piensan y crean? ¿Debería haber más énfasis en la capacidad del estudiante para resolver problemas en contraposición a que aprendan los resultados que produce el tema? ¿Cómo puede evaluarse el impacto de las clases basadas en resolución de problemas, o el uso de computadoras, o trabajos de proyectos, etc.?

El campo de investigación que abre el abanico de cuestiones planteadas nos lleva a otras preguntas esenciales para los procesos investigativos

5-¿SE PUEDE CONSIDERAR A LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA AUTÓNOMA?

En el significado común, el objeto de la Educación Matemática es investigar y desarrollar la enseñanza de la matemática en todos los niveles incluyendo sus premisas, metas y ambiente social. Como la didáctica de otras ciencias la Educación Matemática requiere cruzar límites entre disciplinas y depende en resultados y métodos de diversos campos que incluyen la Matemática, la Didáctica General, la Pedagogía, la Sociología, la Psicología, la Historia de las Ciencias.

¿Qué piensan los investigadores en Matemática de la investigación en Educación Matemática?

El conocimiento científico sobre la enseñanza de la matemática no puede ser ganado por una simple combinación de resultado de esos campos, mas bien presupone una específica aproximación didáctica que integra diferentes aspectos en una coherente y comprensiva representación de la enseñanza, y el aprendizaje de la Matemática y su transposición para usos prácticos en una forma constructiva e implica una profundización en el conocimiento de la matemática en si misma.

Schoenfeld (1991), señala que es importante que se establezca una relación entre matemáticos y educadores de las matemáticas en base a una participación conjunta.



La Educación Matemática, como campo de estudio, comenzó lentamente a desarrollarse hacia el final del siglo diecinueve en la medida en que las universidades de varios países, como respuesta a la necesidad de una mayor cantidad de profesores mejor preparados, comenzaron a ampliar sus programas de formación de profesores. La primera organización de profesores de matemáticas fue la "Asociación para la mejora de la enseñanza en geometría" (Association for the Improvement of Geometrical Teaching -AIGT-), fundada en 1871 en el Reino Unido. Esta organización fue la precursora de la "Asociación Matemática" (Mathematical Association). Otras organizaciones influyentes fueron posteriormente creadas en otros países.

¿Cuales de las múltiples disciplinas vinculadas han tenido una influencia realmente fecunda en la investigación en Educación Matemática?

- 1º) La Matemáticas mismas: A medida que la Educación Matemática se desarrollaba en las universidades, comenzó a atraer a un grupo de personas cuyo principal interés era el tema matemático en sí mismo y quienes, en general, se consideraban a sí mismos como matemáticos. Estos educadores matemáticos realizaron estudios históricos y filosóficos, encuestas, y, eventualmente, otro tipo de investigación empírica.
- 2º) La psicología. Una de las condiciones previas para el desarrollo de la Educación Matemática fue la escuela nivelada según edades en la cual el maestro podía manejar grupos homogéneos y comenzar a observar patrones cognitivos. Hacia el comienzo del siglo veinte, los institutos de psicología en Alemania y los departamentos de psicología en los Estados Unidos comenzaron a realizar estudios empíricos en educación. La psicología se convirtió en la "ciencia central" de la escuela y por tanto en una parte central del currículo de la escuela normal (Kilpatrick, Rico , Gómez, . 1994) .

6-¿QUÉ METODOLOGÍAS CARACTERIZAN A LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA?

Se adoptan diferentes posturas, que suelen estar asociadas a las diversas escuelas o metodologías de enseñanza actualmente en uso (conductismo, neopiagetianos, constructivismo, escuela francesa, enseñanza por diagnóstico, etc.). Es evidente que el hecho de que un investigador se sitúe en una u otra corriente influye en los métodos y objetivos de su trabajo, pero también influye en los contenidos, pues para cada corriente hay ciertas componentes del aprendizaje más importantes que otras (matemáticas, psicológicas, metodológicas, sociales, etc.).

En algunas ocasiones el choque las dos diferentes aproximaciones metodológicas prevalente, ha dado lugar a lo que se conoce como "el debate cualitativo-cuantitativo".

Los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos y que, en general, tratan de indagar sobre cómo se desarrolla un proceso cognitivo o de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él. Tendríamos aquí la influencia de la misma Matemática en cuanto al análisis de sus propios conceptos y del estudio de casos de la Psicología (el análisis "clínico" de una situación de aprendizaje en el contexto de un individuo o grupo o institución)



Santos Trigo (1996), indica que mucha gente en Educación Matemática identifica la investigación en esta área como una actividad para encontrar respuestas definitivas a preguntas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se ha asociado la investigación en Educación metafóricamente con la búsqueda de un remedio mágico. Esta creencia lleva a expectativas no realísticas.

Por otra parte, la validez de los resultados se ha sustentado en muchos trabajos en los métodos estadísticos que se utilizan en el análisis de la información. De hecho, mucha de la investigación realizada hasta hace algunos años se inclinaba a medir los efectos de determinados métodos de enseñanza, para así determinar la eficiencia en base a ciertos indicadores (generalmente exámenes). Esta línea de investigación en Educación Matemática fue influenciada por el tipo de estudios que se realizaban también en ese momento en otras disciplinas como la psicología.

Gutiérrez Rodríguez (1991), observa que no es razonable comparar las metodologías cuantitativas y cualitativas para decidir cuál es la mejor, pues se basan en concepciones, métodos y objetivos diferentes. La preponderancia de una de ellas sobre la otra no es clara ni permanente, dependiendo de finalidades, épocas, países y, sobre todo, de escuelas científicas.

En los años 50 y 60 en la Unión Soviética casi todas las investigaciones educativas, en Didáctica de las Matemáticas, son de tipo cualitativo.

En las investigaciones de EE.UU. los métodos cuantitativos eran completamente dominantes hasta fines de la década de los 70; sin embargo, en los años 80 comenzó en el mundo occidental un movimiento de análisis crítico de la metodología cuantitativa y de mayor consideración de las cualidades de la investigación cualitativa. Por los mismos años tuvo lugar el florecimiento del constructivismo en la enseñanza y aprendizaje de diversas áreas de las Ciencias, entre ellas en la Didáctica de las Matemáticas.

¿qué recaudos deben contemplarse para dar valor científico a una investigación de naturaleza eminentemente cualitativa? ¿cómo se ponen en evidencia estos recaudos en las fases de una investigación?

Lincoln y Guba (1989) indican que los criterios convencionales utilizados para convencer a la audiencia (incluyendo uno mismo) del valor de los estudios cuantitativos, difieren de los criterios usados en los estudios de carácter cualitativo.

La palabra en inglés "trustworthiness" resume el criterio de confianza en un estudio cualitativo. En la discusión de este criterio intervienen aspectos como credibilidad, transferencia, dependencia y confirmación del estudio. Estos aspectos pueden considerarse, respectivamente, alternativos a los usados por el paradigma cuantitativo, es decir, validez interna, validez externa, confiabilidad y objetividad. (Santos Trigo, 1996)

- **CREDIBILIDAD** Este aspecto se refiere al grado en que los resultados obtenidos en el estudio presentan o revelan las ideas de los sujetos en estudios. Para alcanzar este criterio, cada categoría o resultado identificado en el análisis debe ser soportado y contextualizado con varios ejemplos tomados de la información (entrevistas, observaciones de clase, problemas) (Santos Trigo, 1996)

Una estrategia importante aquí es el uso de la triangulación de la información. Es decir, una misma exploración puede plantearse a través de diversos acercamientos. Aquí un observador independiente debe estar de acuerdo con los resultados provenientes de los datos y representan las ideas de los sujetos en estudio. La consistencia



interna, o carencia de contradicciones, del estudio debe mostrar bases para creer que los resultados o categorías fueron obtenidas vía el análisis de los datos desde diversos ángulos. Por ejemplo, el trabajo escrito de un estudiante se puede analizar con los resultados de alguna entrevista.

- **TRANSFERENCIA** Este criterio se refiere a la aplicabilidad del estudio en otros contextos o lugares. Una forma de alcanzar este criterio es proveyendo una descripción comprensiva del estudio. Esta descripción puede guiar a otros investigadores a diseñar estudios similares y contrastar los posibles resultados. Así, si el estudio estuviese relacionado con identificar las estrategias usadas por los estudiantes del cálculo al resolver ciertos tipos de problemas, el investigador debe presentar no sólo los resultados del estudio sino también la forma en que recabó y analizó la información para posibilitar la replicación de la experiencia. (Santos Trigo, 1996)
- **DEPENDENCIA:** La naturaleza de los datos y los procedimientos empleados en el estudio determinan la dependencia del mismo. Aquí los estudios similares desempeñan un papel importante en la selección de los instrumentos y sus usos. El papel de un estudio piloto es también importante para valorar el potencial de los instrumentos a utilizar. Por ejemplo, es común al diseñar una entrevista o un problema que se recurra a algún o algunos sujetos para valorar el potencial esperado antes de llevar a cabo el estudio. (Santos Trigo, 1996)
- **CONFIRMACIÓN:** Cualquier persona en el campo de la Educación Matemática con cierta familiaridad en el área de estudio debe estar de acuerdo con la naturaleza de los resultados. Si algún desacuerdo mayor surgiera, entonces el investigador debe clarificar y proveer suficientes bases para soportar tal resultado. (Santos Trigo, 1996)

La discusión de la validez de los estudios cualitativos se enmarca así en un contexto diferente contrastado con el paradigma cuantitativo. El uso de métodos cualitativos en campos como la psicología, la inteligencia artificial, y ahora en la Educación Matemática, han aportado valiosa información que se relaciona con la forma en que el estudiante aprende (Santos, 1993). Además, los resultados emanados de estudios cualitativos han jugado un papel importante en el diseño de estudios en el paradigma cuantitativo. Es aquí donde se observa la dependencia o complementariedad entre estas dos tendencias. Al respecto, coincidimos con Biddle y Anderson (1986) en que la investigación cualitativa es muy útil en indagaciones iniciales del problema, dado que este tipo de investigación puede producir descripciones profundas e interesantes del fenómeno, identificar variables relevantes y generar hipótesis acerca de posibles relaciones de causa-efecto entre ellas, la investigación cuantitativa, seguidamente, puede aportar mediciones rigurosas de esas variables y probar la presencia de las supuestas relaciones



Kilpatrick (1992) ha indicado que es importante que la Educación Matemática desarrolle sus propios métodos de investigación y reconocido que la Educación Matemática ha luchado por alcanzar su propia identidad. Ha tratado de formular sus propios problemas y sus formas de investigarlos y en las últimas décadas ha habido un gran avance que permite identificar a una comunidad internacional activa que participa en diversos e importante congresos, publicaciones científicas y en trabajos conjuntos con otras disciplinas

7-LOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE NUESTRO TRABAJO INVESTIGATIVO

Desde año 1993, se han desarrollado sucesivos proyectos PID financiados por la UNR, a partir de un proyecto original "La enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales, raíz de la propuesta que se presenta. La transferencia realizada a través de mas de 29 cursos de formación docente suscitó la adhesión de numerosos docentes universitarios , generándose así un "programa de hecho, en el sentido de Lakatos. Los docentes integrantes han compartido una comunidad de intereses en un campo abierto a la investigación en Educación Matemática en el nivel universitario. Orientado a distintas carreras no matemáticas, en las que la Matemática se considera como disciplina prioritariamente instrumental, se ha buscado rescatar lo esencial de su carácter



formativo y dirigirlo a la riqueza de sus aplicaciones. En las presentaciones y publicaciones realizadas se tratan, como situaciones problemáticas, verdaderas anticipaciones del Documento "Discusión sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario" propuesto por The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI-2000) ésta sería la génesis del Programa de Educación Matemática 2ECO3 de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) "La formación matemática en carreras no matemáticas".

La idea de Programa de investigación de Lakatos ha sido empleada en la investigación de la enseñanza para describir "aquello que comparte cierta comunidad de investigadores." Una comunidad, con un Programa de investigación maduro y desarrollado, considerará ciertos trabajos como fundamentales, sus miembros compartirán un conjunto de determinados problemas y cierto lenguaje técnico, ignorarán también ciertos problemas en investigaciones que a su vez podrán ser relevantes en otra comunidad.

En esta concepción se trata de sintetizar los fundamentos teóricos que se siguieron, en una trayectoria de investigación en Educación que ha implicado innovación curricular y el desarrollo de recursos humanos, culminando en la institucionalización de un Programa. Se busca mostrar que tipo de trabajos se consideran "como fundamentales", que problemas "comparten" sus miembros y que "lenguaje técnico" "usan".

En la concepción descripta, "el Programa" no es fruto de un diseño o planificación previa se construye naturalmente y comienza a funcionar, de hecho, como conjunto coordinado de proyectos de investigación que comparten el objeto de estudio y los objetivos de conocimiento.

Se encuentra actualmente integrado por ocho proyectos de investigación y desarrollo (PID) acreditados por la Secretaría de Investigación de la UNR en él participan 36 docentes investigadores de distintas facultades de la universidad.

En el proyecto "La Ingeniería Didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares" se busca modelizar, observar, contrastar empíricamente, y consignar, los fenómenos didácticos; a partir de la problematización y cuestionamiento de un conocimiento matemático a enseñar.-En el transcurso de la investigación se realizarán caracterizaciones de las condiciones que deben implementarse en la enseñanza para facilitar un aprendizaje que reúna ciertas características fijadas a priori. (Laborde, 1989). Se busca: la detección de obstáculos que devienen en errores generalizados. La investigación se dirige al diseño de Ingenierías didácticas en el ámbito de: Geometría Analítica, Álgebra Lineal y Cálculo, en un proceso cíclico de análisis de condicionantes, diseño, ejecución, evaluación, ajuste; repetición de la experimentación y nueva evaluación de los resultados; para la detección de regularidades y situaciones replicables. El proyecto: "Dificultades del aprendizaje de la matemática básica en carreras en carreras de ingeniería, dirigido especialmente al análisis de errores en alumnos ingresantes y los obstáculos de los que devienen; proporcionara importantes elementos para los "análisis previos" que requiere una Ingeniería Didáctica y sus aportes serán valiosísimos para todos los proyectos.

Complementando y en coordinación con los procesos investigativos mencionados, se generan los proyectos "La elaboración y evaluación de los materiales didácticos para ciencias económicas" y "La elaboración y evaluación de los materiales didácticos para ingeniería" en los que el "medio" esencial en la teorización de Brosseau incluye los "diferentes dispositivos" de ayuda al estudio (guías, listados de problemas, libro de texto, etc.) a través de los cuales se contextualiza la matemática a enseñar. La incorporación de los materiales con soporte informático, a los dispositivos disponibles en dicho "me-



dio”, potencian la necesidad de investigación de los componentes del mismo, para la que se propone: análisis, adecuación, diseño y producción de materiales con soporte papel, estudio de las formas de diseño de materiales con soporte informático; determinación de criterios y construcción de instrumentos para su evaluación investigativa. Esos proyectos mencionados se articulan con el Proyecto “Diseño y análisis de una modalidad semi presencial” donde se buscará desarrollar y evaluar estrategias posibles de aprendizaje autónomo y colaborativo”, especialmente importante como respuesta a la masividad de los cursos de Matemática Básica en nuestra Universidad. Sin caer en reduccionismos facilistas, pero en la búsqueda de métodos que permitan un cierto grado de conocimiento de las formas de aprender de los alumnos, en cursos masivos, en el proyecto: “Los estilos de aprendizaje de la matemática en carreras no matemáticas” se busca indagar con instrumentos específicos, siguiendo modernas corrientes, características comunes a grupos de alumnos, y en concordancia desarrollar una diversificación y adecuación de las estrategias de enseñanza. En conjugación con los estudios mencionados previamente, en dos de los proyectos integradores, se encara específicamente la comprensión de conceptos fundamentales en la formación básica. Se trata de “La comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas de modelización matemática” y “El significado de temas de inferencia estadística en carreras no estadísticas”

En relación al posicionamiento didáctico, epistemológico y metodológico, los fundamentos teóricos elegidos para la investigación se han fundado en “ideas claves”

- la concepción de “herramienta cognitiva” de Jonassen y Mosquera.
- en una concepción llamada por sus autores "fundamental" de la Didáctica (Brousseau, Chevallard, Vergnaud) se han considerado especialmente:
 - las situaciones de aprendizaje de Brousseau
 - el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica (Artigue y Douady).
- la concepción de Wittmann de la Educación Matemática como “ciencia de diseño”

Si bien este ha sido el marco teórico que ha prevalecido y prevalece, también se consideran para el análisis didáctico de determinadas fases de las distintas ingenierías didácticas desarrolladas: los aportes de las teorías de los “Estilos de Aprendizaje” (Honey – Alonso), del “Modelo Ontosemiótico” de Batanero – Godino, la teoría de las representaciones de Duval, el marco evaluativo de la “Enseñanza para la comprensión” (Proyecto Cero de Harvard) y el trabajo de Alan Schoenfeld en el análisis de la actividad de resolver problemas con un enfoque constructivista (el “microcosmos matemático en el salón de clases”).

Nos detendremos en los puntos siguientes en algunos de estos aportes teóricos que constituyen el marco de análisis de nuestras experiencias.

8-LA CONCEPCIÓN TEÓRICA DE JONASSEN

Jonassen (1995) arguye que la tecnología debería ser usada como herramienta de “construcción cognitiva” por el que aprende, más que como tutor. Los estudiantes deben aprender "con" tecnología, no "de" la tecnología. Las herramientas cognitivas deben



comprometer al que aprende en la creación del conocimiento que refleje comprensión y concepción de la información más que intentar reproducir el conocimiento. No son herramientas "fingertip" (programas tutoriales donde solo se presionan teclas) para aprender sin esfuerzo. Las herramientas cognitivas deben proveer un ambiente y ser un vehículo que requiera frecuentemente un trabajo intelectual sobre dominio del tema y que genere "pensamientos" que serían imposibles sin la herramienta

Una "herramienta cognitiva" es todo aquel instrumento del que pueden servirse las personas para amplificar su capacidad de comprender y operar en el mundo. La cualidad de herramienta cognitiva no es intrínseca a un instrumento. En el caso de la computadora tenemos que ésta no es por sí sola un medio cognitivo; para llegar a serlo tiene que ser utilizada dentro de un cierto dominio conceptual de manera que ayude al usuario a comprender mejor dicho dominio y actuar con mayor eficacia en el mismo. Si consideramos a la matemática como un dominio conceptual, entonces utilizar la computadora como herramienta cognitiva en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina significa que la máquina se utiliza en formas que ayuden al aprendizaje a comprender y operar en ese dominio conceptual.

Encontramos también Mosquera (1996) una definición que describe nuestra concepción. Esta concepción es la que también sustenta Jonassen (1995) y la que ha orientado desde un comienzo las experiencias realizadas y analizadas en nuestro contexto investigativo.

La repetición de tareas, generalmente de bajo orden cognitivo, no promueve un aprendizaje significativo en los estudiantes. Pero sí una visión restringida de la matemática como una disciplina que se ocupa sólo de cuentas y algoritmos, como una disciplina formada por una cantidad de conocimientos aislados sin interconexión alguna. Por el contrario, cuando la computadora es utilizada como herramienta cognitiva en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, a los estudiantes les son planteadas situaciones problemáticas de alto orden cognitivo que van más allá de la simple ejecución de operaciones aritméticas, y de la mera repetición de conceptos y algoritmos. Los estudiantes son expuestos a una actividad matemática en la que se trata de comunicar una visión de la matemática como una ciencia inacabada en constante proceso de evolución y desarrollo en el cual la computadora juega un papel cada vez más importante. Tenemos así una situación donde la forma como se usa la herramienta en la actividad matemática influye sobre la manera como se concibe la matemática y el instrumento mismo (Mosquera, 1996).

Son herramientas de amplificación y reflexión cognitiva que ayudan al aprendiz a construir sus propias realidades y a diseñar sus propias bases de conocimiento. Aprender "con" computadora significa aprender en sociedad con la computadora. El estudiante debe trabajar con la tecnología y no ser controlado por ella. La planificación y la regulación del aprendizaje es responsabilidad del que aprende.

El concepto de las computadoras como herramientas cognitivas fue en ese momento nuevo. Existía poca literatura e investigaciones que sirvan de soporte a esta idea. Los educadores sólo ahora están aprendiendo a usar las computadoras de forma más constructivistas. Serán necesarias muchas más investigaciones si queremos que las computadoras se consideren herramientas cognitivas.

Cómo construimos nuestro conocimiento depende de lo que el que aprende ya conoce, de las experiencias que ha tenido, de cómo el aprendiz ha organizado las experiencias



que lo introducen en el conocimiento y de las creencias que se invocan cuando se interpretan eventos de su realidad.

9-LA "CONCEPCIÓN FUNDAMENTAL"

Se ha ido destacando en los últimos años, principalmente en Francia, donde sobresalen los nombres de Brousseau, Chevallard, Vergnaud, un grupo que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática (Peltier, 1993).

Fruto de este esfuerzo, ha surgido una concepción llamada por sus autores "fundamental" de la Didáctica se caracteriza por:

- concepción global de la enseñanza, estrechamente ligada a la Matemática y a teorías específicas de aprendizaje
- búsqueda de paradigmas propios de investigación, en una postura integradora entre los métodos cuantitativos y cualitativos. (La Ingeniería Didáctica como metodología de la Investigación)
- la ubicación de la didáctica de la en un cuadro sistémico centrado en tres componentes fundamentales "el saber", "el/los alumno/s", "el profesor" y en las relaciones que se generan entre ellos. Estos microsistemas se sitúan en una zona "la noosfera" que desempeña un papel de intermediario entre la sociedad y el sistema didáctico, en sentido estricto del término, al imponer un conjunto de restricciones a la tarea del profesor: programas, tiempos, conceptos acerca del papel de la escuela, selección, exámenes

Chevallard (1988) describe el "Sistema Didáctico" en sentido estricto, formado esencialmente por tres subsistemas: "profesor", "alumno" y "saber a enseñar".

1º) El "saber": "La comunicación de un saber a un público dado supone la transformación de ese saber. Es la noción de transposición didáctica introducida por Chevallard expresamente, proceso por el cual un elemento de un saber científico se convierte en un conocimiento a enseñar, y después, en un objeto de enseñanza.

Cuando el conocimiento matemático se hace objeto del discurso didáctico, es preciso considerar tres aspectos de importancia fundamental: los procesos de transposición didáctica de la disciplina, esto es, la determinación del saber a enseñar a partir del saber "sabio" académico, el concepto de obstáculo epistemológico, que deviene en didáctico en cuanto se refiere a las formas de recepción del conocimiento y sumada a estos elementos la dimensión social del proceso educativo.

Respecto al saber Vergnaud introdujo la noción de campo conceptual: espacio de problemas donde el tratamiento implica conceptos o procedimientos de diferentes tipos, en estrecha conexión.

Por otra parte, los conceptos matemáticos pueden ser considerados desde dos puntos de vista complementarios:

- su carácter de instrumento al estudiar su funcionamiento en los diversos problemas que permiten resolver;



- su carácter de objetos, en tanto que objetos culturales que tienen un lugar reconocido en el edificio del saber matemático.

2º) El "alumno": La Didáctica de las Matemáticas se dedica a estudiar las concepciones del sujeto que aprende. Por "concepción del alumno" entendemos lo que piensa acerca de:

- la clase de problemas que dan sentido a un concepto;
- el conjunto de significantes que es capaz de asociar (imagen mental, expresión simbólica);
- los instrumentos, teoremas, algoritmos, que es capaz de poner en marcha.

3º) El "profesor": El modelo llamado "aproximativo", centrado en la construcción del saber por el alumno, se propone partir de concepciones existentes en el alumno para ponerlas a prueba mediante el siguiente proceso:

- el docente propone y organiza una serie de situaciones jugando con diversas restricciones (variables didácticas), organiza las diferentes fases (investigación, formulación, validación, institucionalización); maneja la comunicación en la clase; da, llegado el momento, elementos convencionales del saber;
- el alumno intenta, busca, hace hipótesis, propone soluciones, las confronta con sus compañeros, las defiende...
- el saber es considerado con su propia lógica;
- el problema es medio de aprendizaje.

9.1-LA ESCUELA FRANCESA Y LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Existen tres aproximaciones que se han realizado a los objetos de estudio señalados (saber, alumno profesor), complementarias entre sí y parcialmente articuladas

- La aproximación "cognitiva" que se ha desarrollado alrededor de los trabajos de Vergnaud en el área de la teoría de los campos conceptuales.
- La aproximación a través de los "saberes" que se han desarrollado alrededor de los trabajos de Chevallard en el área de la teoría de la transposición didáctica,
- La aproximación a través de las "situaciones" que es finalmente la que ha tenido, sin duda, la influencia más determinante y cuyo padre fundador es Brousseau.

¿Qué es la Ingeniería Didáctica?

En la concepción de la Ingeniería Didáctica, la Didáctica de la Matemática amplía su problemática incluyendo "el conocimiento matemático" entre sus objetivos de estudio y "el proceso de adquisición" de ese conocimiento, como objeto primario de la investigación

Una característica importante es su consideración de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje bajo el enfoque sistémico.

En este contexto, una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un pro-



feosor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje . Como metodología de investigación se inscribe en el estudio de casos cuya validación se basa en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de las situaciones didácticas que surgen de ese proyecto de aprendizaje

9.2-LAS SITUACIONES DE BROUSSEAU

Brousseau instala el concepto de situación adidáctica en contrapartida a una enseñanza donde "la didáctica" es la conducción excesiva del docente , aunque sea través de preguntas

- Se llama "situación adidáctica" a la situación matemática específica del conocimiento concreto que por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, provoca un cambio de estrategia.
- Surge en forma espontánea, a diferencia de las situaciones didácticas que son explícitamente planificadas por el docente. Las provocan los alumnos a medida que intentan apropiarse de un conocimiento.
- Una "situación didáctica" es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos y el profesor para construir un conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo.
- El "medio" está formado por el subsistema sobre el cual actúa el alumno en el que se contextualiza la matemática a enseñar. Incluye materiales didácticos, instrumentos y objetos.

Sintetizaremos las características de los tipos de tipos de situaciones adidácticas según Brousseau:

- Situación adidáctica de acción: el alumno actúa, explora, investiga e intuye hipótesis que aún no puede demostrar.
- Situación adidáctica de formulación: el alumno comunica sus hallazgos a una o varias personas.
- Situación adidáctica de validación: el alumno trata de demostrar que la propiedad que ha conjeturado es válida. Para ello deberá convencer a los otros.

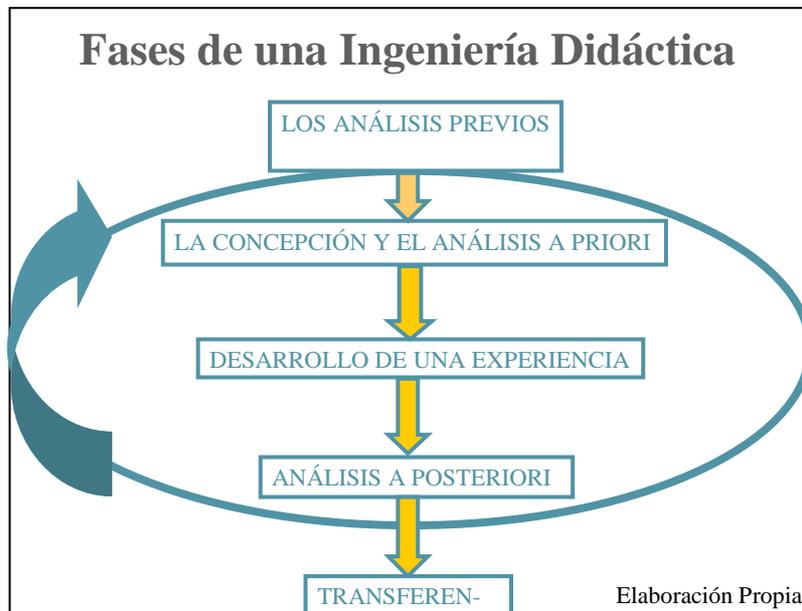
La situación que sí plantea el profesor, como cierre del trabajo de clase, es la institucionalización donde el conocimiento se explicita en el contexto del "saber a enseñar"

¿Por qué analizar las situaciones adidácticas en nuestro trabajo investigativo, como esenciales en el aprendizaje de las Matemática ?¿Qué nos dice Polya sobre "el aprendizaje ?

- "Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa, éste es sólo uno de sus aspectos..."
- "Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez (acción). El resultado de la labor demostrativa del matemático, es el razonamiento demostrativo, la prueba (validación); pero ésta a su vez, es construida mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición. Si **el aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia**, debe haber en él un lugar para la intuición, para la inferencia plausible (formulación)."



A continuación sintetizaremos en un gráfico las fases de análisis de una Ingeniería Didáctica y a continuación presentaremos sus componentes, teniendo en cuenta las fases llevan respectivamente al planeamiento (análisis previos), diseño de situaciones didácticas (concepción y análisis a priori), desarrollo o experimentación, evaluación investigativa (análisis a posteriori)



LOS ANÁLISIS PREVIOS COMPRENDEN

- Ubicación curricular.
- Conocimientos didácticos previamente adquiridos.
- Análisis epistemológico.
- Enseñanza tradicional en el tema.
- Concepciones de los estudiantes.
- Restricciones:
 - Cuadros matemáticos en juego
 - Competencias
 - Herramientas

LA CONCEPCIÓN Y EL ANÁLISIS A PRIORI COMPRENDE

- Selecciones conceptuales.
- Selecciones metodológicas
- Selecciones principales: Temas
- Selecciones locales:
 - Problemas concretos



○ Herramientas informáticas

- Conjeturas del profesor

EL ANÁLISIS A POSTERIORI COMPRENDE

- Observaciones realizadas a lo largo de las secuencias de enseñanza.
- Producción de los estudiantes en clase o fuera de ella.
- Se puede complementar con entrevistas individuales o a pequeños grupos.

10-LA CONCEPCIÓN TEÓRICA DE WITTMANN: LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO CIENCIA DE DISEÑO

Wittmann (1995) llama "corazón" de la educación matemática a una variedad de componentes que incluyen en particular:

- Análisis de la actividad matemática y de las formas matemáticas de pensamientos.
- Desarrollo de teorías locales (por ejemplo: solución de problemas, habilidades de demostración, etc.).
- Exploración de posibles contenidos que se focalicen en hacer los mismos accesibles a los que aprenden.
- Examen crítico y justificación de contenidos en la vista de objetivos generales de la enseñanza de la matemática.
- Investigación en los prerrequisitos de aprendizaje y en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Desarrollo y evaluación de unidades de enseñanza sustanciales, clases de unidades de enseñanza y currículum.
- Desarrollo de métodos para planificación, enseñanza, observación y análisis de elecciones.
- Inclusión de la historia de la educación matemática.

¿Que entiende Wittmann como "ciencia de diseño"?

Históricamente y tradicionalmente ha sido tarea de las escuelas de ingeniería enseñar sobre cosas artificiales, como hacer artefactos que tengan propiedades deseadas y como enseñarlas. El diseño para la construcción, es el corazón de entrenamiento profesional. Así también las escuelas de arquitectura, negocio, educación, leyes y medicina, concierne con procesos de diseño.

En la opinión de Wittmann, el marco de una ciencia de diseño abre a la educación matemática una prometedora perspectiva para el completo cumplimiento de sus objetivos y para el desarrollo de un no roto concepto de los educadores matemáticos. En efecto, la responsabilidad profesional se asume completamente solo en cuanto ellos puedan descubrir una ciencia de diseño, un sólido cuerpo intelectual parcialmente formalizable, parcialmente empírico, transmisibles doctrinas sobre los procesos de diseño.

Wittmann se refiere al "corazón de la Educación Matemática" ¿de qué corazón se trata?



La Educación Matemática no es apéndice de la matemática ni de la Psicología ni de la Pedagogía por la misma razón que ninguna otra ciencia de diseño es un apéndice de cualquiera de sus disciplinas relacionadas.

El corazón de la educación matemática se concentra en la construcción de "objetos artificiales" llamados unidades de enseñanza, conjunto de coherentes unidades de enseñanza y el curriculum, así como también la investigación de sus posibles defectos en diferentes "ecologías" educacionales. En la realidad la calidad de esas construcciones depende de la fantasía constructiva de base, del ingenio de los diseñadores y de la evaluación sistemática, ambos típicos de la ciencia de diseño.

10-1- CARACTERÍSTICAS DEL DISEÑO

Las unidades sustanciales de consulta deben ser caracterizadas por las siguientes propiedades:

- Representan objetivos centrales, contenidos y principios de la enseñanza de la matemática.
- Proveen una rica fuente de actividades matemáticas.
- Son flexibles y fácilmente adaptables a las condiciones de un salón especial de clases.
- Envuelven aspectos matemáticos, psicológicos y pedagógicos de la enseñanza y el aprendizaje en una forma holística y, además, ofrecen un amplio potencial para la investigación empírica.

Una unidad sustancial de enseñanza es esencialmente abierta. Sólo los problemas clave son fijos. Durante cada episodio, el docente tiene que seguir la idea del estudiante en un intento de resolver los problemas. Este rol del profesor es completamente diferente del punto de vista tradicional. Enseñar una unidad sustancial es básicamente análoga a la conducción de una entrevista clínica durante la cual sólo las cuestiones claves están definidas y el trabajo del entrevistador es seguir el pensamiento del entrevistado.

El conocimiento no es visto ya como el resultado de la transmisión de un docente a un estudiante pasivo, mas bien es concebido como el logro productivo del estudiante que aprende en interacción social con otros estudiantes y el docente. No obstante los materiales desarrollados por educadores matemáticos deben ser objeto de construcción, tanto como el conocimiento y permitir esta aproximación interactiva. En particular los materiales desarrollados deben proveer a docente y estudiantes, libertad para hacer elecciones por si mismos.

En orden a facilitar y estimular un uso flexible de los materiales desarrollados en esta forma, los docentes deben ser entrenados y vistos como socios en investigación y resultados y no como meros receptores de los resultados.

Wittman propone una aproximación específica a la investigación empírica y la llama "Investigación Empírica Centrada Alrededor de Unidades de Enseñanza".

El diseño de unidades de enseñanza sustanciales y en particular de una currícula sustancial, es el mas difícil trabajo que debe ser llevado a cabo por expertos en el campo. Pero esto no significa que puede ser dejado solo a los docentes, aunque los docentes pueden ciertamente hacer importantes contribuciones con el marco de diseño que pueden proveer los expertos, particularmente cuando ellos son miembros o están en estrecha co-



nexión con el equipo de investigación. También la adaptación de unidades de enseñanza a las condiciones de un especial salón de clases requiere diseño en una menor escala.

La similitud estructural entre unidades de enseñanzas sustanciales y entrevistas clínicas, sugiere una adaptación de los métodos de estudio de Piaget en el desarrollo cognitivo de los niños. Como resultado, se llega a la "experimentación de enseñanza clínica" en la que las unidades de enseñanza pueden ser utilizadas no sólo como herramientas de investigación sino también como objetos de estudio. Los datos recogidos en esos experimentos pueden ayudar a evaluar la unidad y a revisarla para hacer la enseñanza más eficiente.

De forma análoga a los repetidos estudios de distintos investigadores de los experimentos de Piaget, esta forma de investigación experimental, cuyo objeto son unidades de enseñanza, puede ser repetida y variada. Por comparación de datos se pueden identificar formas básicas de enseñanza y aprendizaje y derivar de ellas conocimientos específicos fundamentados de ciertas unidades de enseñanza. En la conducción de tales estudios, existen métodos de investigación cualitativa que pueden ser utilizados, particularmente aquellos realizados por educadores en matemática en conexión con las "situaciones didácticas" y con la Ingeniería Didáctica.

En opinión de Wittman (1995) los resultados más importantes de investigación en Educación Matemática son conjuntos de estudios cuidadosamente diseñados y empíricamente estudiados de unidades de enseñanza que están basadas en principios teóricos fundamentales. De esto se sigue que estas unidades deberían formar parte del entrenamiento profesional de docentes.

Wittman refuerza la teoría afirmando que el diseño de unidades de enseñanza e investigación empírica centrado alrededor de ellas, sólo puede ser exitoso con un sistema de Educación Matemática con fuertes lazos con la ciencia Matemática.

¿Cuál sería el valor, como investigación, del análisis en el desarrollo de una experiencia?

"La investigación en Didáctica persigue, entre otras cosas, establecer hechos didácticos. Se trata de hechos que intervienen en la clase, a lo largo del proceso de transmisión, de apropiación y de construcción de los conocimientos. Estos hechos conciernen a las conductas de los alumnos frente a las situaciones de aprendizaje que se les proponen, y las conductas del maestro frente a las conductas de los alumnos y frente al saber que se pretenden transmitir." (Vergnaud, 1980)

11-LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRESIÓN EN PROSPECTIVA

En el momento actual nos ha interesado esta teoría de carácter general (no surge como específica de la Educación Matemática) para la construcción de una Didáctica Operativa .¿En que consiste?

- Tuvo su origen, principalmente, en el trabajo de investigadores pertenecientes al Proyecto Cero, un centro de investigación de la Escuela de Graduados de Educación de Harvard dirigido por Howard Gardner y Vito Perrone.
- Este proyecto tiene por objetivo estudiar la cognición humana en una diversidad de dominios y busca aplicar sus hallazgos al mejoramiento del pensamiento, de la enseñanza y del aprendizaje en diferentes entornos educativos. Desde 1988



hasta 1994 se desarrolló la investigación inicial, que continúa actualmente en distintas universidades americanas y latinoamericanas

- El modelo pedagógico requiere de algunos elementos que David Perkins (1999), uno de sus investigadores propulsores, considera como los cuatro pilares que lo fundamentan: Los Tópicos Generativos, las Metas de Comprensión, los Desempeños de Comprensión y la Valoración Continua.

En los distintos niveles que categorizar los desempeños de la comprensión se busca llegar a la "capacidad de desempeño flexible". La "comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera". En consecuencia, existe una identificación entre lo que es la comprensión y el desempeño flexible.

Una pregunta fundamental es ¿qué se construye con la comprensión? La visión de la comprensión vinculada con el desempeño evoca a desarrollar una capacidad de flexibilizar la comprensión hasta llegar que con el tiempo tiende a convertirla en un dominio de trabajo creativo. El poder enfocar un mismo tema desde situaciones problemáticas distintas forma al alumno en un desempeño flexible desde una planificación flexible

¿Qué prospectiva visualizamos en nuestra área?

Si bien es una teoría general que se puede aplicar en las distintas ramas de las ciencias, consideramos interesantes algunos de estos conceptos para el análisis en educación Matemática .

- Consideramos que en la Matemática Básica las características de los Tópicos generativos deberían ser centrales para uno o más dominios, suscitar la curiosidad de los estudiantes por el campo de problemas desde donde se extienden, ser de interés para los docentes, accesibles y ofrecer la ocasión de establecer numerosas conexiones.
- Como Meta de Comprensión se buscaría unificar e integrar, por ejemplo, conceptos geométricos con las propiedades abstractas del Álgebra Lineal o del Cálculo con la Geometría analítica del plano y espacio y sobre todo desarrollar procesos de pensamiento que formen habilidades de análisis y resolución de problemas en temas esenciales.
- Se centra especialmente nuestro interés en los niveles que categorizan lo que Perkins llama el desempeño de la comprensión, que busca dar respuestas a la pregunta ¿Cómo debemos enseñar para comprender? Se trata de involucrar a los alumnos en constantes espirales de indagación que los lleven, desde un primer conjunto de repuestas, hacia preguntas mas profundas que revelen conexiones entre el tópico que se está tratando y otras ideas, preguntas y problemas fundamentales. La comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible" con énfasis en la flexibilidad., Comprender un tópico quiere decir ser capaz de desempeñarse flexiblemente en relación con él: explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria.



Artigue, 1999, nos dice que la investigación llevada al nivel universitario ayuda a entender mejor las dificultades en el aprendizaje que nuestros estudiantes tienen que encarar, la sorprendente resistencia a la solución de esas dificultades y los límites y poca funcionalidad de las prácticas docentes. En varios casos la investigación ha llevado al desarrollo de diseños de enseñanza que han probado ser efectivos al menos en ambientes experimentales. Una razón esencial es que los problemas no son solo relativos al contenido de la enseñanza (no basta adoptar un nuevo libro de texto) los problemas son relativos a las formas de trabajo de los estudiantes, los modos de interacción entre docentes y estudiantes y las valoraciones de los trabajos de los estudiantes. Los cambios objeto y fruto de la investigación no son fáciles, requieren tiempo y soporte institucional y no son solo cuestión de buena voluntad.

Desde nuestra propia experiencia de aprendizaje y enseñanza postulamos que el objetivo de las investigaciones en didácticas en el nivel universitario debe ser en última instancia la búsqueda de estrategias educativas acordes con una posición que contemple:

- la concepción del educando como sujeto activo de los procesos educativos.
- la concepción de la relación interactiva y dialógica entre el educador y el educando cuyo resultado es el cambio de actitudes, comportamiento y grado de conocimiento de ambos sujetos, sin que ello implique la pérdida de sus identidades y roles específicos.
- la valoración de la importancia de la motivación y la experiencia vivencial para obtener aprendizajes significativos y perdurables.
- la valoración de la relevancia de la interacción entre los aspectos cognitivos, psicomotrices y afectivos que intervienen en los procesos de aprendizaje.

El Dr Bepo Levi, un ilustre investigador en Matemática, que la entonces Facultad de Ingeniería tuvo el honor de contar como profesor, en su artículo la "Formación Matemática" decía en 1945 :

- "...matemáticos somos más o menos todos, pues no es la expresión por fórmulas y números lo que constituye la Matemática. La Matemática es una forma de pensamiento".
- "...muchas veces los panegiristas de la matemática han aclamado a su valor para la educación del rigor lógico, entendiendo éste en un sentido escolástico, palabrero, formal, combinatorio; se ha llegado a prescindir del significado intuitivo de las proposiciones de partida dando a la deducción matemática un contenido no mayor que al desplazamiento de los peones sobre el tablero de ajedrez. No es esto, en nuestro entender Matemática."
- "Para que esa maravillosa facultad racionativa de nuestra mente pueda inspirarnos la satisfacción de un trabajo cumplido. La satisfacción estética de una armonía conseguida, es necesario que no le falte, directa o indirectamente, la contrapartida de la realización en ese otro mundo que está afuera de nosotros..."

*Este trabajo forma parte de estudios preliminares del Proyecto **PICTO** : "La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria"

BIBLIOGRAFÍA



- ARTIGUE, M. (1992) What can we learn from educational research at the university level? Crucial question for contemporary research en Education, notices of the American mathematical society, 46, 1377-1385, p1384.
- ARTIGUE, M. (1990) "Ingénierie Didactique". Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9.3. La Pensée Sauvage : Grenoble, Francia. 281-307.
- BROUSSEAU, G. (1986) Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques. Thèse - d'état. Université de Bordeaux 1: Bordeaux.
- CANTORAL URIZA, R.; FARFAN, R. (2005) Desarrollo del Pensamiento Matemático (Ed. Trillas)
- CHEVALLARD, Y. (1988) La Transposition didactique, du savoir savant an savoir enseigné. La Pensée Sauvage Édition: Grenoble.
- DÍAZ GODINO, J., (1991). Hacía una teoría de la Didáctica de la Matemática. Area de conocimiento Didáctica de la Matemática. Ed. Síntesis: Madrid. 112-138.
- DOUADY, R. (1992). *Cahiers de Didactique n° 6. IREM VII*
- DOUADY, R. (1995) "La ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento". En – ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, I. Y GÓMEZ, P. (1995): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Grupo editorial Iberoamericano. Bogotá. Colombia. 34 – 56; 61 – 97.
- GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ, A. (1991) La investigación en Didáctica de las Matemáticas. Área conocimiento Didáctica de la Matemática. Ed. Síntesis: Madrid. 160-182.
- JONASSEN, D.H. (1995) "Computers as Cogniteve Tools: Learning with Tecnology. Not from Technology". Journal of Computing in Hhiger Education, 6 (2). 40-73.
- KILPATRICK, J. (1992) "Beyond face value: Assessing Research in Mathematics Education". En Nissen, G. y Blomhoj, M. (eds): Critica for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics. Roskilde University Denmark: Roshulde. 15- 341.
- KILPATRICK, J. (1992) *Critica for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*. Roskilde University Denmark.
- KILPATRICK, J., RICO, L. Y GÓMEZ, P. (Eds.) (1994) Seminario de Investigación. Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica. México. 51-68.
- KILPATRICK, J., RICO, L. Y GÓMEZ, P. (Eds.) (1994) Seminario de Investigación. Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica. México. 51-68.
- LESH, R. (1979) Supporting research in mathematics education. Eric: Columbia.
- LEVI, B. (1945) "Formación Matemática". Separata Revista del Centro de Estudiantes de la F.C.E.I, U.N.L, Rosario
- LINCOLN, Y. S. Y GUBA, E. G. (1989) "Naturalistic inquiry". En D.M. Fetterman, D.M. Qualitative approaches to education: the silent scientific revolution. New York. Praeger



- LINCOLN, Y. S. Y GUBA, E. G. "Naturalistic inquiry". En D.M. Fetterman, D.M. *Qualitative approaches to education: the silent scientific revolution*. New York. Praeger (1989)
- MOSQUERA, J.C. (1996) "La informática y el proceso de investigación matemático en la escuela". *Revista Educación Matemática*, Vol. 8, N° 1. 14-21.
- NISS (1999) Aspects of the nature and state of research en matematics education. *Educational Studies en Mathematics*,40,1-24
- PELTIER, M.L. (1993) "Una Visión General de la Didáctica de la Matemática en Francia". *Revista Educación Matemática*, v. 5, n° 2. 4-9.
- PERKINS, DAVID (1999) "¿Qué es la comprensión", EN MARTHA STONE, *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la teoría y la práctica*, Bs. As. Paidós.p. 70.
- SANTOS TRIGO, L. M. *Perspectivas en Educación Matemática*. México Grupo Editorial Iberoamericana. (1996)
- SANTOS TRIGOS, L.M. (1996) *Hacia una caracterización de la Educación Matemática y la Investigación. Perspectivas en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamericano: México. 59-72.
- SCHOENFELD ,A.H.(2000) Purposes and methods of research en matematics education.*Notices of the American Mathematical Society* ,47,641-649 ,p.432
- SCHOENFELD, A. (1991) "On Pure and applied research in mathematics education". *Journal of Mathematical Behavior*, 10. 263-276.
- SELDEN Y SELDEN (1993) . *Collegiate mathematics education research: What would that be like* ¿The College Mathematical Journal,24,431-445
- SELDEN,A. (2002) *Two research traditions separated by a common subjet: Mathematics and Mathematics. Education*.Tennese Technological University
- STEINER H.G.(1985) "Theory de Mathematics Education (TME):An introduction" .*For de Learning the Mathematics*.vol 5.2 pp 11-17
- VERGNAUD, G. (1980) "Problemática y Metodología de la Investigación en Didáctica de la Matemática". *Segundo Seminario de Investigaciones Psicopedagógicas sobre Métodos de Observación y Análisis de los Procesos Educativos*. Barcelona. 31-42.
- WITTMANN, E.Ch. (1995) "Mathematics Education as a Desing Science". *Educational Studies in Mathematics*, 29. Belgium Kluwer Academic Publishers. 355-274.