ABC de MATEMÁTICA FINANCIERA

QUINTA EDICIÓN 2020

Factor	de Capitalización	de Actualización
Singular	$(1+i)^n$	$\frac{1}{(1+i)^n}=(1+i)^{-n}$
Plural	$s_{\overline{n}\mid i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$	$a_{\overline{n}\mid i}=\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n . i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Mag. Marcela González

González, Marcela

ABC de matemática financiera – 1ª ed. – Rosario: Foja Cero, 2012.

240p. ; 29x21 cm

ISBN 978-987-1018-74-1

1. Matemática Financiera. I. Título

CDD 510

ABC de Matemática Financiera

Mg. Marcela González

Editorial FOJA CERO

Bv Oroño 1261 – 2000 Rosario

Dedico este libro en primer lugar a la memoria de mi padre Roberto y mi madre Paulina, quienes me iniciaron en este camino maravilloso del estudio y de la ciencia, cualquiera hubiera sido el área elegida.

En segundo lugar se lo dedico a mi hijo Alejandro quien, desde mi panza cuando estudiaba la Maestría en Finanzas, ya empezó su proceso de "ósmosis" por el estudio y la ciencia, particularmente de los números, continuando la tradición familiar y que ahora se encuentra cursando su secundaria en el Instituto Politécnico Superior General San Martín de Rosario dependiente de la U.N.R.

En tercer lugar se lo dedico a mi hija en el cariño, Mariana, y a mi esposo, Carlos, quienes me han cedido mucho de sus tiempos, al igual que Alejandro, para poder completar este volumen.

Prólogo

Este libro fue editado por primera vez en el año 2012, dos años después de asumir el cargo de titular en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario y 18 años después de asumir como titular en la Universidad del Centro Educativo Latinoamericano (UCEL). También fue presentado en las 35ª Jornadas de Profesores Universitarios de Matemática Financiera realizadas en la ciudad de Posadas, Misiones en 2014.

Esta quinta edición "nace" en período de pandemia. Este acontecimiento, que podríamos llamar "El cisne negro" acorde al título del libro de Nassim Nicholas Taleb (Ed. Paidós – Barcelona 2007) y como el mismo autor define "el impacto de lo altamente improbable", ha ocasionado una importante revisión, especialmente en la metodología, recursos didácticos y evaluación de mi actividad docente.

El Ministerio de Educación de la Nación con fecha 14 de marzo de 2020 emitió la resolución 104/2020 orientada a la readecuación de las clases y otras actividades académicas en todas las instituciones universitarias y de educación superior de las 24 jurisdicciones del país. La resolución contempla la implementación transitoria de modalidades de enseñanza a través de campus virtuales, medios de comunicación y/o cualquier otro entorno digital que se pueda implementar. El Poder Ejecutivo Nacional emitió el decreto 297/2020 el 20 de marzo con la finalidad de proteger la salud pública ante la pandemia del coronavirus. En el mismo resuelve el "aislamiento social, preventivo y obligatorio"

Como docente en la UNR y UCEL y coordinadora del área de Matemática de UCEL he tenido que adecuar la metodología de las materias acorde a los recursos didácticos disponibles en esta era virtual utilizando las "videoconferencias" y las "plataformas virtuales" como recursos didácticos y de evaluación. Estos recursos se utilizaron tanto en forma sincrónica como asincrónica y para ello fue necesario disponer en un ciento por ciento del material didáctico en forma digital, tanto en teoría como en práctica.

El libro mantiene su forma original. Se encuentra dividida en ocho capítulos y en cada uno de ellos se han agregado "Aplicaciones" que se daban en el dictado presencial y no se había desarrollado su explicación detallada en forma escrita hasta la anterior edición.

El primero capítulo trata las operaciones financieras de Interés, con sus distintos regímenes de cálculo y aplicaciones, siendo el principal objetivo la determinación de las tasas efectivas de costo implícita en toda operación financiera simple de capitalización. Como aplicaciones se tratan la inflación, la tasa promedio y el tratamiento de los intereses para tiempos fraccionarios.

El segundo se refiere a las operaciones financieras de Descuento, inversa a la anterior, con los mismos objetivos pero para operaciones de actualización o descuento. Como aplicación se estudia la refinanciación de deudas en las que sustituyen documentos ya emitidos, por otros nuevos. Finalizado este capítulo, se logra una comprensión estrecha entre ambas operaciones de contemporización: capitalización y actualización.

El tercer capítulo trata las operaciones financieras en forma intrínseca, como teóricamente se generan los intereses, que es en el campo continuo. Se incorpora, así, el análisis matemático, a través del cálculo diferencial e integral como importante herramienta de método de cálculo.

En la cuarta parte comienzan a estudiarse las operaciones compuestas, las rentas con cuotas constantes, donde las prestaciones y las contra prestaciones son plurales. Cómo abonar una deuda, cómo formar un capital, y las distintas combinaciones de estas dos operaciones. Se presenta como objetivo principal, el cálculo de la tasa de interés implícita en estas operaciones a través del método de tanteo financiero e interpolación lineal, si bien hoy, gracias a las herramientas computacionales, estos cálculos se han simplificado.

En el capítulo quinto, se analizan las operaciones compuestas pero con cuotas variables, ya sea bajo una ley (aritmética o geométrica) o sin ella. Para estas últimas, se recurre, introductoriamente, a la Teoría de las Inversiones.

Ya en la sexta parte, se exponen de lleno los distintos sistemas de amortización de préstamos analizando especialmente, el sistema Francés, el sistema Alemán, el sistema Americano y algunas distorsiones como el procedimiento de Tasa Directa en sus dos modalidades (con y sin descuento anticipado de intereses).

En el capítulo séptimo se tratan los empréstitos para entidades públicas y las obligaciones negociables para empresas privadas, también llamados títulos o bonos, en cuyas emisiones existe pluralidad de acreedores o tenedores de títulos y un único deudor que es el emisor. El análisis se realiza considerando rescate cierto o programado (acorde a las condiciones de emisión del título) y rescate aleatorio (sorteo o licitación).

Ya en la octava y última parte, se introduce el cálculo actuarial, para determinar las primas en los seguros sobre la vida y a prima única. Se incorpora una nueva Tabla de Mortalidad, la CSO 2001.

Finalmente, deseo agradecer, infinitamente, a mis propios maestros y docentes de esta cátedra: el Profesor Eduardo Cúneo, quien ha sido un ejemplo de ser humano y de docente, el Profesor Fernando Cícero, quien ha sido un entusiasta en esta materia con sus aplicaciones financieras en el área informática y a la Profesora Clelia Milicic, por su incansable y ejemplar alma docente para con los innumerables alumnos a quienes ella ha enseñado.

Les agradezco también a mis colegas, que hoy me acompañan en la cátedra de Matemática Financiera, en nuestra silenciosa tarea de enseñar a las nuevas generaciones esta matemática aplicada a las finanzas.

Por último, quiero mencionar mi agradecimiento a los estudiantes que, año tras año, se preparan para el ejercicio de su profesión y, porque no, para la docencia.

Marcela González

Rosario, noviembre de 2020

ÍNDICE

PRÓLOGO……………………………………………………………………………4

CAPÍTULO I: Operaciones Financieras de Capitalización. Interés…………………… 16

1.1. Operación Financiera.
1.1.1. Definición
1.1.2. Elementos
1.1.3. Clasificación
1.1.3.1. Desde el punto de vista formal
1.1.3.2. Desde el punto de vista sustancial
1.1.3.3. Ejemplos
1.2. Regímenes para el cálculo de los intereses.
1.2.1. Régimen de Interés Simple
1.2.1.1. Monto en Régimen de Interés Simple
1.2.1.2. Tasas sucesivas de Interés en Régimen de Interés Simple en el supuesto en que NO se retiran los intereses
1.2.1.2.1. Determinación de las sucesivas tasas de interés
1.2.1.2.2. Ejemplo
1.2.2. Régimen de Interés Compuesto
1.2.2.1. Monto con Capitalización Periódica (m=1)
1.2.2.2. Capitalización Subperiódica y Continua. Enfoque de Proporcionalidad. (Tasa Periódica Nominal Constante)
1.2.2.2.1. Monto con Capitalización Subperiódica ($1<m<\infty$). Tasa Periódica Nominal de Interés. Tasa Subperiódica Proporcional.
1.2.2.2.1.1. Breve repaso del Binomio de Newton
1.2.2.2.1.2. Comparación del Monto Compuesto con Capitalización Periódica y Subperiódica
1.2.2.2.1.3. Comparación de los Montos con capitalización Subperiódica a medida que aumenta la frecuencia de capitalización
1.2.2.2.2. Monto con Capitalización Continua. Monto Máximo ($m \to \infty$)
1.2.2.2.3. Ejemplo
1.2.2.2.4. Tasa Periódica Efectiva de Interés
1.2.2.2.4.1. Con Capitalización Periódica
1.2.2.2.4.2. Con Capitalización Subperiódica
1.2.2.2.4.3. Con Capitalización Continua. Tasa Efectiva Máxima de Interés
1.2.2.2.4.4. Ejemplo
1.2.2.3. Capitalización Subperiódica y Continua. Enfoque de Equivalencia (Tasa Periódica Efectiva Constante)
1.2.2.3.1. Tasa Subperiódica Equivalente
1.2.2.3.2. Tasas Subperiódicas Equivalentes en general
1.2.2.3.3. Tasa Periódica Nominal Convertible (capitalización Subperiódica)
1.2.2.3.4. Tasa Periódica Nominal Instantánea de Interés (capitalización Continua)
1.2.2.3.4.1. Definiciones
1.2.2.3.4.2. Deducción aplicando el número *e*
1.2.2.3.5. Ejemplo
1.2.2.3.6. Comparación de las Tasas Periódicas Nominales Convertibles de Interés para “m” variable.
1.2.2.4. Comparación de las Tasas Subperiódicas de Interés. Ejemplo.
1.2.2.5. Resumen de Montos en Régimen de Interés Compuesto.
1.2.2.5.1. Cuadro.
1.2.2.5.2. Gráficos de los Montos para “n” variable

1.2.2.5.2.1. Gráfico de los Montos trabajando con tasas proporcionales (tasa periódica nominal j constante)
1.2.2.5.2.2. Gráfico de los Montos trabajando con tasas equivalentes (tasa periódica efectiva i constante)
1.2.3. Tasa Efectiva de Costo (Interés) cuando se opera en Régimen de Interés Simple.
1.3. Operaciones pactadas con Ajuste por Inflación
1.3.1. Monto pactado SIN Ajuste por Inflación
1.3.2. Monto pactado CON Ajuste por Inflación
1.3.3. Relaciones entre la Tasa Aparente, la tasa de Inflación y la Tasa Real.
1.3.3.1. Tasa Aparente
1.3.3.2. Tasa de Inflación
1.3.3.3. Tasa Real
1.3.3.4. Ejemplo
1.3.3.5. Cuadro de evolución del Monto Con Ajuste por Inflación
1.4. Tasa Media o Tasa Promedio
1.4.1. Primer caso: cuando se particiona el Capital
1.4.1.1. Definición
1.4.1.2. Régimen de Interés Simple
1.4.1.3. Régimen de Interés Compuesto
1.4.2. Segundo caso: cuando se particiona el Tiempo de Colocación
1.4.2.1. Definición
1.4.2.2. Régimen de Interés Simple
1.4.2.3. Régimen de Interés Compuesto
1.5. Análisis Funcional de Monto Simple y Monto Compuesto
1.5.1. Monto Simple
1.5.1.1. Para tasa variable y tiempo constante
1.5.1.2. Para tiempo variable y tasa constante
1.5.2. Monto Compuesto
1.5.2.1. Para tasa variable y tiempo constante
1.5.2.2. Para tiempo variable y tasa constante
1.6. Comparación Analítico Algebraica de Monto Simple y Monto Compuesto
1.6.1. Para n=0
1.6.2. Para n=1
1.6.3. Para n>1
1.6.4. Para 0<n<1
1.6.5. Cuadro resumen y Gráfico conjunto de ambos Montos
1.7. Tiempo Fraccionario
1.7.1. Monto en Convención Lineal
1.7.2. Monto en Convención Exponencial
1.7.3. Comparación de ambos Montos
1.7.4. Máxima diferencia entre ambos montos
1.8. Aplicaciones (Cálculo de intereses por numerales)
1.9. Ejercitación Capítulo I

CAPÍTULO II: Operaciones Financieras de Actualización. Descuento……………….71

2.1. Introducción.
2.2. Simbología.
2.3. Clasificación
2.3.1. Según la Tasa que se utiliza para el cálculo del descuento
2.3.2. Según el Régimen de Interés utilizado
2.3.3. Combinación de las dos clasificaciones anteriores
2.4. Regímenes para el cálculo del Descuento
2.4.1. Descuento Comercial a Interés Simple D_1

2.4.1.1. Definición
2.4.1.2. Ejemplo y Observaciones
2.4.2. Descuento Racional a Interés Simple D_2
2.4.2.1. Definición
2.4.3. Descuento Racional a Interés Compuesto D_3
2.4.3.1. Definición
2.4.3.2. Valor Efectivo y Valor Nominal con actualización Periódica (m=1)
2.4.3.3. D_3 con Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de Proporcionalidad. Cuadro Resumen de fórmulas.
2.4.3.4. D_3 con Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de Equivalencia. Cuadro Resumen de fórmulas.
2.4.4. Descuento Comercial a Interés Compuesto D_4
2.4.4.1. Valor Efectico con Actualización Periódica
2.4.4.2. Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de "Proporcionalidad" (Tasa periódica Nominal de Descuento Constante).
2.4.4.2.1. Valor Efectivo con Actualización Subperiódica ($1<m<\infty$)
2.4.4.2.2. Comparación de los Valores Efectivos con Actualización Periódica y Subperiódica
2.4.4.2.3. Valor Efectivo con Actualización Continua ($m \to \infty$). Valor Efectivo Máximo.
2.4.4.2.4. Ejemplo
2.4.4.2.5. Tasa Periódica Efectiva de Descuento
2.4.4.2.5.1. Con Actualización Periódica
2.4.4.2.5.2. Con Actualización Subperiódica
2.4.4.2.5.3. Con Actualización Continua. Tasa Periódica Efectiva Mínima de Descuento
2.4.4.2.5.4. Ejemplo
2.4.4.3 Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de "Equivalencia" (Tasa periódica Efectiva de Descuento Constante).
2.4.4.3.1. Tasa Subperiódica Equivalente de Descuento
2.4.4.3.2. Tasas Subperiódicas Equivalentes de Descuento en general
2.4.4.3.3. Tasa Periódica Nominal Convertible de Descuento (actualización subperiódica)
2.4.4.3.4. Tasa Periódica Nominal Instantánea de Descuento (actualización continua)
2.4.4.3.4.1. Definiciones
2.4.4.3.4.2. Deducción aplicando el número *e*
2.4.4.3.5. Ejemplo
2.4.4.3.6. Comparación de las tasas periódicas Nominales Convertibles de Descuento para "m" variable.
2.4.4.4. Comparación de las Tasas Subperiódicas de Descuento. Ejemplo
2.4.4.5. Comparación de las Tasas Instantáneas de Interés y de Descuento
2.4.4.6. Síntesis de las relaciones entre las Tasas Periódicas de Interés y de Descuento bajo el supuesto de Equivalencia.
2.4.4.7. Relaciones y Comparaciones entre las tasas Periódicas de Interés y de Descuento.
2.4.4.7.1. Régimen de Interés Simple
2.4.4.7.2. Régimen de Interés Compuesto
2.4.4.8. Tasa Efectiva de Costo (Interés) para los Descuentos que aplican Interés Simple.
2.4.5. Análisis Funcional de los Valores Efectivos para "n" variable
2.4.5.1. Descuento Comercial Simple D_1
2.4.5.2. Descuento Racional Simple D_2
2.4.5.3. Descuento Racional Compuesto D_3
2.4.5.4. Descuento Comercial Compuesto D_4
2.4.6. Resumen de Valores Efectivos en Descuento Comercial Compuesto.
2.4.6.1. Cuadro
2.4.6.2. Gráficos de los Valores Efectivos para "n" variable

2.4.6.2.1. Gráfico trabajando con tasas Proporcionales (tasa periódica Nominal de descuento Constante)
2.4.6.2.2. Gráfico trabajando con tasas Equivalentes (tasa periódica Efectiva de descuento Constante)
2.5. Refinanciación de Deudas o Sustitución de Documentos
2.6. Aplicaciones (Vencimiento común y vencimiento medio)
2.7. Ejercitación Capítulo II

CAPÍTULO III: Principio Genético del Rédito……………………………..………114

3.1. Introducción
3.2. Teoría General del Interés
3.2.1. Fórmula General de Capitalización
3.2.1.1. Introducción
3.2.1.2. Aplicación a los distintos Regímenes de Capitalización
3.2.1.2.1. Régimen de Interés Simple
3.2.1.2.2. Régimen de Interés Compuesto
3.2.2. Fórmula General de Actualización
3.2.2.1. Introducción
3.2.2.2. Aplicación a los distintos Regímenes de Actualización
3.2.2.2.1. Descuento Comercial a Interés Simple
3.2.2.2.2. Descuento Racional a Interés Simple
3.2.2.2.3. Descuento Racional a Interés Compuesto
3.2.2.2.4. Descuento Comercial a Interés Compuesto
3.2.3. Aplicaciones a operaciones financieras compuestas

CAPÍTULO IV: Rentas con Cuotas Constantes……………………………………123

4.1. Definición
4.2. Elementos de una Renta. Época inicial de pago de cuotas, época de valuación y época final.
4.3. Clasificación
4.4. Rentas Ciertas y Temporarias
4.4.1. Rentas Inmediatas o Amortizaciones
4.4.1.1. Con cuotas Vencidas
4.4.1.2. Con cuotas Adelantadas
4.4.1.3. Relación entre ambas
4.4.1.4. Análisis funcional de las funciones plurales de una Amortización.
4.4.1.4.1. Factor plural de actualización
4.4.1.4.1.1. Para “n” variable e “i” constante
4.4.1.4.1.2. Para “i” variable y “n” constante
4.4.1.4.2. Función cuota de una Amortización para “i” variable y “n” constante
4.4.2. Cálculo de la tasa de interés aplicando tanteo financiero e interpolación lineal
4.4.3. Imposiciones o Rentas de Ahorro
4.4.3.1. Con cuotas Vencidas
4.4.3.2. Con cuotas Adelantadas
4.4.3.3. Relación entre ambas
4.4.3.4. Análisis funcional de las funciones plurales de una Imposición.
4.4.3.4.1. Factor plural de capitalización
4.4.3.4.1.1. Para “n” variable e “i” constante
4.4.3.4.1.2. Para “i” variable y “n” constante
4.4.3.4.2. Función cuota de una Imposición para “i” variable y “n” constante
4.4.4. Relaciones entre funciones financieras plurales
4.4.4.1. Cociente entre el Valor Actual y el Valor Final de una renta temporaria.
4.4.4.2. Diferencia entre la Cuota de una Amortización y la Cuota de una Imposición.
4.4.5. Rentas Diferidas

4.4.5.1. Con cuotas Vencidas
4.4.5.2. Con cuotas Adelantadas
4.4.6. Rentas Anticipadas
4.4.6.1. Con cuotas Vencidas
4.4.6.2. Con cuotas Adelantadas
4.4.7. Relaciones entre Rentas Temporarias
4.4.7.1. Renta Diferida
4.4.7.2. Renta Anticipada
4.4.8. Fórmula General Unificada para Rentas Ciertas y Temporarias
4.5. Rentas Perpetuas o Perpetuidades
4.5.1. Rentas Perpetuas Inmediatas
4.5.1.1. Con cuotas Vencidas
4.5.1.2. Con cuotas Adelantadas
4.5.2. Rentas Perpetuas Diferidas
4.5.2.1. Con cuotas Vencidas
4.5.2.2. Con cuotas Adelantadas
4.5.3. Rentas Perpetuas Anticipadas
4.5.3.1. Con cuotas Vencidas
4.5.3.2. Con cuotas Adelantadas
4.5.4. Relaciones entre Rentas Perpetuas
4.5.4.1. Renta Perpetua Diferida
4.5.4.2. Renta Perpetua Anticipada
4.6. Cuadro Resumen de Rentas con Cuotas Constantes
4.7. Aplicación (Leasing)
4.8. Ejercitación Capítulo IV

CAPÍTULO V: Rentas con Cuotas Variables y Flujos Irregulares…………………..167

5.1. Rentas con cuotas variables en progresión aritmética
5.1.1. Determinación del Valor Actual
5.1.2. Observaciones
5.1.3. Ejemplo
5.1.4. Aplicaciones (Otras rentas y rentas perpetuas)
5.2. Rentas con cuotas variables en progresión geométrica
5.2.1. Determinación del Valor Actual
5.2.2. Observaciones
5.2.3. Ejemplo
5.2.4. Aplicaciones (Otras rentas y rentas perpetuas)
5.3. Rentas con cuotas variables sin Ley. Teoría de las Inversiones
5.3.1. Definición
5.3.2. Clasificación
5.3.3. Criterios de evaluación
5.3.3.1. Criterio del Valor Actual Neto – V.A.N.
5.3.3.1.1. Definición
5.3.3.1.2. Criterio de aceptación
5.3.3.1.3. Casos particulares
5.3.3.1.4. Tasa de Actualización
5.3.3.1.5. Análisis funcional del V.A.N. para proyectos convencionales
5.3.3.1.6. Gráfico del V.A.N. para proyectos convencionales
5.3.3.2. Criterio de la Tasa Interna de Retorno – T.I.R.
5.3.3.2.1. Definición
5.3.3.2.2. Criterio de aceptación
5.3.3.2.3. Casos particulares
5.4. Inversiones con distintas vidas económicas

5.5. Flujos Irregulares
5.6. Aplicaciones (Proyectos mutuamente excluyentes)
5.7. Ejercitación Capítulo V

CAPÍTULO VI: Sistemas de Amortización de Préstamos……………………………201

6.1. Introducción
6.2. Sistema Francés
6.2.1. Amortización Real del primer período o Fondo Amortizante
6.2.2. Amortización Real de un período cualquiera k
6.2.3. Total Amortizado en los primeros k períodos
6.2.4. Deuda Subsistente después de transcurridos k períodos
6.2.5. Intereses abonados en un período cualquiera k
6.2.6. Suma de Intereses Abonados
6.2.6.1. Parciales
6.2.6.2. Totales
6.2.7. Período en el cual se amortiza una fracción de la deuda original
6.2.8. Período Medio de Reembolso
6.2.9. Tasa de Amortización
6.3. Sistema Alemán
6.3.1. Amortización Periódica
6.3.2. Cuota de un período cualquiera k
6.3.3. Interés de un período cualquiera k
6.3.4. Ley de Cuotas
6.3.5. Total Amortizado en los primeros k períodos
6.3.6. Deuda Subsistente después de transcurridos k períodos
6.3.7. Suma de Intereses Abonados
6.3.7.1. Parciales
6.3.7.2. Totales
6.3.8. Período en el cual se amortiza una fracción de la deuda original
6.3.9. Período Medio de Reembolso
6.3.10. Tasa de Amortización
6.4. Sistema Americano
6.4.1. Fondo de Acumulación
6.4.2. Cuota periódica constante
6.4.3. Total de Intereses Abonados
6.4.4. Total de Intereses Ganados
6.4.5. Total de Intereses Netos
6.4.6. Comparación del Sistema Americano y del Sistema Francés
6.4.7. Ejemplos
6.4.8. Determinación de la tasa efectiva de costo del Sistema Americano
6.5. Distorsiones del Sistema Francés
6.5.1. Respecto de la tasa de interés
6.5.2. Respecto de la partición de la cuota periódica
6.5.3. Respecto del momento en que se abona la cuota
6.5.4. Tasa Directa
6.5.4.1. Primera modalidad: Tasa directa Con Intereses Cargados a la suma solicitada
6.5.4.1.1. Cuota periódica constante
6.5.4.1.2. Críticas a esta modalidad
6.5.4.1.3. Cálculo de la tasa de interés sobre saldos o tasa de costo implícita
6.5.4.2. Segunda modalidad: Tasa directa Con Intereses Descontados de la suma solicitada
6.5.4.2.1. Cuota periódica constante
6.5.4.2.2. Críticas a esta modalidad
6.5.4.2.3. Cálculo de la tasa de interés sobre saldos o tasa de costo implícita

6.5.4.2.4. Número máximo de cuotas a abonar en esta modalidad
6.5.4.2.5. Relación y Comparación entre ambas Tasas Directas
6.6. Incidencia del I.V.A. en los cuadros de amortización de préstamos
6.6.1. Sistema Francés
6.6.1.1. Con I.V.A. incluido en la cuota
6.6.1.2. Con I.V.A. excluido de la cuota
6.6.2. Sistema Alemán
6.7. Préstamos con tasa variable o tasa Flotante
6.7.1. Sistema Francés
6.7.2. Sistema Alemán
6.8. Préstamos pactados con ajuste por inflación
6.8.1. Sistema Francés
6.8.2. Sistema Alemán
6.9. Aplicaciones (Valor de cesión o cancelación anticipada. Usufructo y Nuda Propiedad)
6.10. Ejercitación Capítulo VI

CAPÍTULO VII: Empréstitos y Obligaciones Negociables…………………………259

7.1. Introducción
7.2. Condiciones de emisión
7.3. Simbología
7.4. Empréstitos emitidos por el Sistema Francés
7.4.1. Determinación del número de títulos (Rescate aleatorio)
7.4.1.1. Rescatados o extinguidos en el primer período
7.4.1.2. Rescatados o extinguidos en el período k
7.4.1.3. Rescatados o extinguidos en los primeros k períodos
7.4.1.4. Vivos o en circulación después de transcurridos k períodos
7.4.2. Probabilidades aplicadas a empréstitos (Rescate aleatorio)
7.4.2.1. Probabilidad de que un título sea rescatado en el primer período
7.4.2.2. Probabilidad de que un título sea rescatado en el período k
7.4.2.3. Probabilidad de que un título sea rescatado en los primeros k períodos
7.4.2.4. Probabilidad de que un título esté en circulación después de transcurridos k períodos
7.4.3. Cálculo de la tasa efectiva del empréstito
7.4.3.1. Para el ente emisor
7.4.3.1.1. Empréstitos emitidos a la par
7.4.3.1.2. Empréstitos emitidos bajo la par
7.4.3.1.3. Empréstitos emitidos bajo la par y con lotes
7.4.3.2. Para el suscriptor o tenedor del título
7.4.3.2.1. Rescate aleatorio
7.4.3.2.2. Rescate cierto o programado
7.4.4. Vida de un título de renta (Rescate aleatorio)
7.4.4.1. Vida Probable
7.4.4.2. Vida Media
7.4.4.3. Vida Matemática
7.4.5. Nuda Propiedad y Usufructo de un empréstito a Valor de Mercado.
7.4.6. Nuda Propiedad, Usufructo y Valor Real de un título de renta (para el tenedor del título)
7.4.6.1. Rescate Aleatorio
7.4.6.1.1. Nuda Propiedad de un título de renta
7.4.6.1.2. Usufructo de un título de renta
7.4.6.1.3. Valor real de un título de renta
7.4.6.1.4. Ejemplo
7.4.6.2. Rescate Cierto o Programado
7.4.6.2.1. Nuda Propiedad de un título de renta
7.4.6.2.2. Usufructo de un título de renta

7.4.6.2.3. Valor real de un título de renta
7.4.6.2.4. Ejemplo
7.5. Empréstitos emitidos por el Sistema Alemán
7.5.1. Determinación del número de títulos (Rescate aleatorio)
7.5.1.1. Rescatados o extinguidos en un período cualquiera
7.5.1.2. Rescatados o extinguidos en los primeros k períodos
7.5.1.3. Vivos o en circulación después de transcurridos k períodos
7.5.2. Probabilidades aplicadas a empréstitos (Rescate Aleatorio)
7.5.2.1. Probabilidad de que un título sea rescatado en un período cualquiera
7.5.2.2. Probabilidad de que un título sea rescatado en los primeros k períodos
7.5.2.3. Probabilidad de que un título esté en circulación después de transcurridos k períodos
7.5.3. Cálculo de la tasa efectiva del empréstito
7.5.3.1. Para el ente emisor
7.5.3.1.1. Empréstitos emitidos a la par
7.5.3.1.2. Empréstitos emitidos bajo la par
7.5.3.1.3. Empréstitos emitidos bajo la par y con lotes
7.5.3.2. Para el suscriptor o tenedor del título
7.5.3.2.1. Rescate aleatorio (sorteo o licitación)
7.5.3.2.2. Rescate cierto o programado
7.5.4. Vida de un título de renta (Rescate aleatorio)
7.5.4.1. Vida Probable
7.5.4.2. Vida Media
7.5.4.3. Vida Matemática
7.5.5. Nuda Propiedad y Usufructo de un empréstito a Valor de Mercado.
7.5.6. Nuda Propiedad, Usufructo y Valor Real de un título de renta (para el tenedor del título)
7.5.6.1. Rescate aleatorio
7.5.6.1.1. Nuda Propiedad de un título de renta
7.5.6.1.2. Usufructo de un título de renta
7.5.6.1.3. Valor real de un título de renta
7.5.6.1.4. Ejemplo
7.5.6.2. Rescate Cierto o Programado
7.5.6.2.1. Nuda Propiedad de un título de renta
7.5.6.2.2. Usufructo de un título de renta
7.5.6.2.3. Valor real de un título de renta
7.5.6.2.4. Ejemplo
7.6. Paridad
7.7. Aplicaciones (Análisis de emisiones vigentes)
7.8. Ejercitación Capítulo VII

CAPÍTULO VIII: Introducción al Cálculo Actuarial…………………………..…………302

8.1. Introducción
8.2. Funciones de Sobrevivencia y de Mortalidad
8.3. Tasas Anuales
8.3.1. Tasa Anual de Vitalidad
8.3.2. Tasa Anual de Mortalidad
8.4. Cálculo de los Valores de Conmutación de las Tablas de Mortalidad
8.4.1. Parte Vida
8.4.2. Parte Muerte
8.5. Probabilidades de Vida y de Muerte sobre una sola cabeza
8.5.1. Probabilidad de Vida Temporaria
8.5.2. Probabilidad de Muerte Temporaria
8.5.3. Probabilidad de Muerte Interceptada
8.6. Vida Probable

8.7. Duración más probable de Vida
8.8. Definiciones para la clasificación de Seguros y Rentas Vitalicias
8.9. Seguros sobre la Vida Humana
8.9.1. Seguros en caso de Vida (Capital Diferido y Rentas Vitalicias)
8.9.1.1. Definiciones
8.9.1.2. Capital Diferido
8.9.1.3. Ejemplo
8.9.2. Rentas Vitalicias (seguro sobre la Vida) y Seguros en caso de Muerte.
8.9.2.1. Introducción
8.9.2.2. Fórmula General Unificada para Rentas Vitalicias y Seguros en caso de Muerte
8.9.2.3. Casos Particulares. Aplicación de la Fórmula General Unificada
8.9.2.3.1. Renta Vitalicia Diferida y Temporaria
8.9.2.3.2. Renta Vitalicia Inmediata y Temporaria
8.9.2.3.3. Renta Vitalicia Diferida e Ilimitada
8.9.2.3.4. Renta Vitalicia Inmediata e Ilimitada
8.9.2.3.5. Seguro sobre la Muerte Diferido y Temporario
8.9.2.3.6. Seguro sobre la Muerte Inmediato y Temporario
8.9.2.3.7. Seguro sobre la Muerte Diferido e Ilimitado
8.9.2.3.8. Seguro sobre la Muerte Inmediato e Ilimitado
8.9.2.4. Cuadro resumen
8.9.2.5. Deducción analítica de la fórmula de una Renta Vitalicia Vencida
8.9.3. Seguros en caso de Vida y de Muerte (Mixtos)
8.9.3.1. A Capital Simple o Dotal
8.9.3.2. A Capital Doblado
8.10. Primas Naturales en un Seguro en caso de Muerte
8.11. Primas Periódicas Constantes o Niveladas
8.12. Reservas Matemáticas
8.13. Prima de Riesgo y Prima de Ahorro
8.14. Primas de Tarifa o Primas Cargadas
8.14.1. Introducción
8.14.2. Clasificación de Gastos
8.15. Aplicaciones (Comparación de CSO 1941 y 2001. Esperanza de Vida)
8.16. Anexo: Tablas de Mortalidad CSO
8.17. Ejercitación Capítulo VIII

BIBLIOGRAFÍA…………………………………………………………….…343

CAPÍTULO I
Operaciones Financieras de Capitalización. Interés

1.1. Operación Financiera.

1.2. Regímenes para el cálculo de los intereses.
- 1.2.1. Régimen de Interés Simple
- 1.2.2. Régimen de Interés Compuesto.
  - 1.2.2.1. Capitalización Periódica.
  - 1.2.2.2. Capitalización Subperiódica y Continua. Enfoque de Proporcionalidad. (Tasa Periódica Nominal Constante)
  - 1.2.2.3. Capitalización Subperiódica y Continua. Enfoque de Equivalencia (Tasa Periódica Efectiva Constante)
  - 1.2.2.4. Comparación de las Tasas Subperiódicas de Interés. Ejemplo.
  - 1.2.2.5. Resumen de Montos en Régimen de Interés Compuesto.
- 1.2.3. Tasa Efectiva de costo (Interés) cuando se opera en Régimen de Interés Simple.

1.3. Operaciones pactadas con Ajuste por Inflación.

1.4. Tasa Media o Tasa Promedio.

1.5. Análisis Funcional de Monto Simple y Monto Compuesto.

1.6. Comparación Analítico Algebraica de Monto Simple y Monto Compuesto.

1.7. Tiempo Fraccionario.

1.8. Aplicación (Cálculo de intereses por numerales)

1.9. Ejercitación Capítulo I.

OPERACIONES FINANCIERAS DE CAPITALIZACIÓN. INTERÉS

1.1. Operación Financiera

1.1.1. Definición

Una operación financiera es aquella que produce una modificación cuantitativa del capital.

1.1.2. Elementos

1° Capital (C): desde el punto de vista cualitativo es el conjunto de bienes destinados a la productividad. Cuando a ese capital se lo expresa en alguna unidad monetaria (peso, dólar, euro, etc.) se habla del capital de forma cuantitativa y es de esa forma como se estudiará en este curso.

2° Tasa de Interés (i): es el precio que se paga por la disponibilidad del dinero. Si se contrae un préstamo bancario, el banco cobrará intereses a una cierta tasa activa (para el banco). Por el contrario, si se realiza un depósito bancario la entidad financiera abonará intereses a una tasa pasiva (para el banco) por la disponibilidad del dinero depositado.

Financieramente se define a la tasa de interés como el rendimiento de un peso de Capital en un período y se calcula como:

Si \$1.- en 1 período gana i

\$C en 1 período ganará $\boxed{C\,i = I}$ donde *I* son los intereses. Despejando la tasa:

$$\boxed{i = \frac{Intereses}{Capital} = \frac{I}{C}}$$

3° Tiempo (n): si no transcurre el tiempo no existe operación financiera. En toda operación financiera la unidad de medida de la tasa y del tiempo deben coincidir.

1.1.3. Clasificación

1.1.3.1. Desde el punto de vista formal

a) Operaciones financieras Simples: en estas operaciones a una única prestación corresponde una única contraprestación.

b) Operaciones financieras Compuestas: en ellas existe pluralidad de prestaciones o contraprestaciones.

1.1.3.2. Desde el punto de vista sustancial

a) Operaciones financieras ciertas o de crédito puro: en ellas sólo existen los tres elementos mencionados anteriormente.

b) Operaciones financieras aleatorias o contingentes o de previsión: en ellas existe un cuarto elemento llamado contingente o aleatorio, que condiciona la realización de la contraprestación. Estas operaciones son los seguros que se estudian en Cálculo Actuarial (Capítulo VIII).

En un mal llamado "seguro de vida" para un empleado (en realidad es un "seguro de muerte") si el trabajador muere antes de la edad jubilatoria la compañía aseguradora pagará al beneficiario designado en la póliza el "premio o seguro". Pero si el trabajador sobrevive a la edad jubilatoria y se jubila, la compañía aseguradora no efectivizará ningún pago. Evidentemente la "muerte del titular de la póliza" es el elemento aleatorio que condiciona la realización de la contraprestación.

Un real "seguro de vida" es aquel que toma una persona, por ejemplo, hasta los 70 años y si llega con vida a esa edad él cobrará el "premio o seguro".

En general, la ocurrencia del siniestro (muerte, vida, granizo, robo, incendio, etc.) es el elemento aleatorio (incierto) que condiciona la realización de la contraprestación por parte de la compañía aseguradora.

1.1.3.3. Ejemplos

De la combinación de las dos clasificaciones anteriores se pueden mencionar los siguientes ejemplos:

a) Operación financiera simple y cierta: plazo fijo.

b) Operación financiera simple y aleatoria: seguro de vida contratado con prima única.

c) Operación financiera compuesta y cierta: crédito Hipotecario o un Círculo de Ahorro y Préstamo.

d) Operación financiera compuesta y aleatoria: seguro de vida contratado con primas periódicas, renta vitalicia.

1.2. Regímenes para el cálculo de los Intereses

Existen dos grandes regímenes para calcular los intereses:

1° Régimen de Interés Simple

2° Régimen de Interés Compuesto: con capitalización periódica, subperiódica y continua.

1.2.1. Régimen de Interés Simple

En este régimen la base para el cálculo de los intereses, en todos los períodos, es el capital inicial. Se aclara que la tasa y el tiempo siempre deben expresarse en la misma unidad de medida (ambos en años, en meses, en días, etc.).

1.2.1.1. Monto en Régimen de Interés Simple

Per.	Capital	Interés	Monto
1	C	$C.i_s$	$C + C.i_s = C(1 + i_s)$
2	C	$C.i_s$	$C(1 + i_s) + C.i_s = C(1 + i_s + i_s) = C(1 + 2i_s)$
3	C	$C.i_s$	$C(1 + 2i_s) + C.i_s = C(1 + 2i_s + i_s) = C(1 + 3i_s)$
……	……	…….	…….
n	C	$C.i_s$	$\boxed{M = C(1+i_s n)} \rightarrow \boxed{C = \dfrac{M}{1+i_s n}}$

Siendo el total de intereses $\boxed{I = Ci_s n}$

Se puede decir que, en Régimen de Interés Simple, el inversor retira en todos los períodos el interés dejando depositado, solamente, el capital inicial.

1.2.1.2. Tasas sucesivas de Interés en Régimen de Interés Simple en el supuesto en el que NO se retiran los intereses

1.2.1.2.1. Determinación de las sucesivas tasas de interés

Período	Capital	Intereses	Monto
1	C	Ci_s	$C(1 + i_s)$
2	$C(1+ i_s)$	$C(1+i_s)\, i_2 = Ci_s$ (1)	$C(1 + 2i_s)$
3	$C(1+2i_s)$	$C(1+2i_s)\, i_3 = Ci_s$ (2)	$C(1 + 3i_s)$
……	…….	…….	…….
n	$C[1 + (n-1) \cdot i_s]$	$C[1 + (n-1)\, i_s]\, i_n = Ci_s$ (3)	$C(1 + ni_s)$

Despejamos i_2 de (1)

$$C(1+i_s)i_2 = Ci_s \quad \rightarrow \quad \boxed{i_2 = \frac{i_s}{1+i_s}}$$

Comparación de i_s e i_2

$i_s = i_s$ por propiedad de identidad

$1 < 1 + i_s$ dividiendo miembro a miembro

$i_s > \dfrac{i_s}{1+i_s}$ implica que $\boxed{i_s > i_2}$

Despejamos i_3 de (2)

$$C(1+2i_s)i_3 = Ci_s \quad \rightarrow \quad \boxed{i_3 = \frac{i_s}{1+2i_s}}$$

Comparación de i_2 e i_3

$i_s = i_s$ por propiedad de identidad

$1 + i_s < 1 + 2i_s$ dividiendo miembro a miembro

$\dfrac{i_s}{1+i_s} > \dfrac{i_s}{1+2i_s}$ implica que $\boxed{i_2 > i_3}$

Despejamos i_n de (3)

$$C[1+ (n - 1)\, i_s]\, i_n = Ci_s \Rightarrow \boxed{i_n = \frac{i_s}{1+(n-1)i_s}}$$

Conclusión:

$\boxed{i_s > i_2 > i_3 > \ldots > i_k > \ldots > i_n}$ donde para un período cualquiera *k* $\boxed{i_k = \dfrac{i_s}{1+(k-1)i_s}}$

y se cumple que:

$$\boxed{C(1+i_s n) = C(1+i_s)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_n)}$$

Cuando NO se retiran los intereses, el monto en régimen de Interés Simple es un caso particular del monto en régimen de Interés Compuesto con aplicación de sucesivas tasas variables y decrecientes.

1.2.1.2.2. Ejemplo

Suponiendo un capital de \$10.000.- que se coloca en régimen de interés simple durante 4 meses a la tasa del 1% mensual, calcular el monto simple y las sucesivas tasas de interés que corresponden al régimen de interés compuesto. Verificar el monto obtenido.

M_s = 10.000 (1 + 0,01 . 4) = $\boxed{\$10.400.-}$

i_s = 0,01mensual;

$$\boxed{i_2 = \frac{i_s}{1+i_s} = \frac{0,01}{1,01} = 0,00990099 mensual}$$

$$\boxed{i_3 = \frac{i_s}{1+2i_s} = \frac{0,01}{1,02} = 0,0098039 mensual}$$

$$\boxed{i_4 = \frac{i_s}{1+3i_s} = \frac{0,01}{1,03} = 0,0097087 mensual}$$

Verificación del monto obtenido

M = 10.000 x 1,01 x 1,0099099 x 1,0098039 x 1,0097087 = $\boxed{\$10.400.-}$

1.2.2. Régimen de Interés Compuesto

En este régimen existe Capitalización de los Intereses. Capitalizar Intereses significa transformar los intereses en capital para que produzcan nuevos intereses en los períodos subsiguientes.

1.2.2.1. Monto con Capitalización Periódica (m=1)

Per.	Capital	Intereses	Monto
1	C	Ci	$C + Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2 i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2 i = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$
…...	……	…….	…….
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1} i$	$\boxed{M = C(1+i)^n}$

Este es el monto en régimen compuesto con capitalización periódica.

$$I = M - C = C(1+i)^n - C \quad \boxed{I = C\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

Al factor $(1+i)^n$ se lo llama factor (simple o singular) de capitalización. Lo que hace es “capitalizar o llevar” un capital del momento actual a un momento futuro.

Despejando el capital:

$$\boxed{C = \frac{M}{(1+i)^n} = M\,(1+i)^{-n}}$$

Al factor $\dfrac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$ se lo llama factor (simple o singular) de actualización o descuento. Lo que hace es "descontar o traer" un valor monetario del futuro al momento actual.

1.2.2.2. Capitalización Subperiódica y Continua. Enfoque de Proporcionalidad

1.2.2.2.1. Monto con Capitalización Subperiódica (1<m<∞). Tasa Periódica Nominal. Tasa Subperiódica Proporcional.

Muchas veces las entidades financieras ofrecen una tasa periódica (por ejemplo, anual) aclarando que capitalizan subperiódicamente (por ejemplo, mensualmente). A dicha tasa periódica se la llama tasa periódica nominal y se simboliza j. Como la capitalización es subperiódica se debe encontrar la tasa subperiódica que se obtiene planteando "proporcionalidad":

Si en 1 período = m subperíodos rige la tasa j (tasa periódica nominal)

en 1 subperíodo regirá $\dfrac{j}{m}$ que es la "tasa subperiódica proporcional". Donde m es la frecuencia de capitalización o la cantidad de subperíodos que hay en un período (en el ejemplo m = 12).

Como tasa y tiempo deben escribirse en la misma unidad de medida se debe expresar el tiempo en subperíodos:

Si 1 período son m subperíodos
n períodos serán nm subperíodos

La fórmula de monto con capitalización subperiódica es:

$\boxed{M = C\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{nm}}$ y la fórmula de los Intereses es:

$$\boxed{I = M - C = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} - C = C\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} - 1\right]}$$

1.2.2.2.1.1. Breve repaso de Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Este desarrollo tiene (n+1) términos

$\dbinom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$ donde n! = n . (n - 1) .(n – 2) ….1

Por convención 0! = 1

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=1 \quad \binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=1$$

1.2.2.2.1.2. Comparación del Monto Compuesto con capitalización Periódica y Subperiódica

Sabiendo que:

$M_1 = C(1+i)^n$ Monto con capitalización periódica (m=1)

$M_2 = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}$ Monto con capitalización subperiódica ($1<m<\infty$)

Y haciendo los siguientes supuestos:

1) C = $ 1.-

2) n = 1 período
3) i y j son numéricamente iguales (conceptualmente son distintas ya que i capitaliza periódicamente y j capitaliza subperiódicamente)

Se obtiene:

$$M_1 = 1+i$$

$$M_2 = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = \binom{m}{0}1^m\left(\frac{j}{m}\right)^0+\binom{m}{1}1^{m-1}\left(\frac{j}{m}\right)^1+\binom{m}{2}1^{m-2}\left(\frac{j}{m}\right)^2+\binom{m}{3}1^{m-3}\left(\frac{j}{m}\right)^3+\ldots+\binom{m}{m}1^0\left(\frac{j}{m}\right)^m$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = 1+\frac{m!}{1!(m-1)!}\left(\frac{j}{m}\right)^1+\frac{m!}{2!(m-2)!}\left(\frac{j}{m}\right)^2+\frac{m!}{3!(m-3)!}\left(\frac{j}{m}\right)^3+\ldots+\left(\frac{j}{m}\right)^m$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = 1+\frac{m(m-1)!}{1!(m-1)!}\left(\frac{j}{m}\right)^1+\frac{m(m-1)(m-2)!}{2!(m-2)!}\left(\frac{j}{m}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)!}{3!(m-3)!}\left(\frac{j}{m}\right)^3+\ldots+\left(\frac{j}{m}\right)^m$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1!}\frac{j}{m}+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{j^2}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{j^3}{m^3}+\ldots+\left(\frac{j}{m}\right)^m$$

Simplificando y distribuyendo *m*

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = 1+j+\frac{(m-1)}{2!}\frac{j^2}{m}+\frac{(m-1)(m-2)}{3!}\frac{j^3}{m^2}+\ldots+\left(\frac{j}{m}\right)^m$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = 1+j+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2!}j^2+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3!}j^3+\ldots+\left(\frac{j}{m}\right)^m \quad (*)$$

Este desarrollo tiene m+1 términos positivos, luego

$M_2 = M_1 + \sum Positiva$ entonces $\boxed{M_2 > M_1}$

Conclusión: El monto del régimen de Interés Compuesto con Capitalización Subperiódica es mayor al monto del régimen de Interés Compuesto con Capitalización Periódica, trabajando con el mismo capital, por el mismo período y a la misma tasa numérica de interés.

1.2.2.2.1.3. Comparación de los montos con capitalización subperiódica a medida que aumenta la frecuencia de capitalización.

Sise aumenta la frecuencia de capitalización k veces se obtiene el monto 3

$$M_3 = C\left(1+\frac{j}{m+k}\right)^{n(m+k)}$$. Donde $1 \leq k < \infty$.

Deduciendo este monto de (*)

$$\left(1+\frac{j}{m+k}\right)^{(m+k)} = 1 + j + \frac{\left(1-\frac{1}{m+k}\right)}{2!} j^2 + \ldots + \left(\frac{j}{m+k}\right)^{(m+k)}$$

Este desarrollo tiene m+k+1 términos.

Comparando los dos desarrollos (con m+1 términos y con m+k+1 términos) se observa que:

1° Los dos primeros términos son iguales.

2° Los m-1 términos siguientes son mayores en el segundo desarrollo ya que:

$$m < m+k$$
$$\frac{1}{m} > \frac{1}{m+k}$$
$$-\frac{1}{m} < -\frac{1}{m+k}$$
$$1-\frac{1}{m} < 1-\frac{1}{m+k}$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{j^2}{2}$

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{j^2}{2} < \left(1-\frac{1}{m+k}\right)\frac{j^2}{2}$$

Se concluye que el tercer término de M_2 es menor al tercer término del M_3 y así sucesivamente se demuestra para todos los siguientes términos.

3° En M_3 hay k términos más y todos son positivos.

Conclusión: A medida que aumenta la frecuencia de capitalización el monto en régimen de interés compuesto con capitalización Subperiódica aumenta: $M_3 > M_2$

1.2.2.2.2. Monto con capitalización Continua($m \to \infty$). Monto Máximo. $\overline{M}$

De acuerdo a la conclusión anterior se puede pensar que si $m \to \infty$ también el monto $\to \infty$, pero es un gran error, el monto tiene límite y se denomina “Monto Máximo”. Para determinar el Monto Máximo se aplica límite para $m \to \infty$ al monto con capitalización subperiódica.

Considerando C=$1.- y n=1 período

$$\overline{M} = \lim_{m\to\infty} M_2 = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\frac{j}{j}}{\frac{m}{j}}\right)^{\left(\frac{m}{j}\right).j} = \underbrace{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{j}}\right)^{\left(\frac{m}{j}\right)}}_{e}{}^{.j} = e^j \qquad \text{ya que} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Considerando capital y tiempo distinto de 1 el Monto Máximo es:

$$\boxed{\overline{M} = Ce^{jn}} \quad \text{y los Intereses máximos son}$$

$$\boxed{\overline{I} = \overline{M} - C = Ce^{jn} - C = C(e^{jn} - 1)}$$

<u>Aclaración:</u> El Monto Máximo es el monto de régimen de Interés Compuesto con capitalización continua bajo el enfoque de proporcionalidad (j constante).

1.2.2.2.3. <u>Ejemplo</u>

Determinar el monto obtenido al colocar un capital de $10.000.- durante 4 años en régimen de interés compuesto a la tasa periódica del 12% anual con capitalización:

a) Anual (m=1)

Como la capitalización es periódica la tasa dada se simboliza i

$$M = C(1+i)^n = 10.000x1{,}12^4 = \boxed{15.735{,}19}$$

b) Semestral

En este caso la capitalización es subperiódica y m=2

$$M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} = 10.000\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{4x2} = 10.000x1{,}06^8 = \boxed{15.938{,}48}$$

c) Trimestral

En este caso la capitalización también es subperiódica y m=4

$$M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} = 10.000\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4x4} = 10.000x1{,}03^{16} = \boxed{16.047{,}06}$$

d) Mensual

En este caso la capitalización también es subperiódica y m=12

$$M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm} = 10.000\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{4x12} = 10.000x1{,}01^{48} = \boxed{16.122{,}26}$$

e) Continua

En este caso la capitalización es continua y $m \to \infty$

$$\overline{M} = Ce^{jn} = 10.000e^{0{,}12x4} = \boxed{16.160{,}74}$$

Se concluye que, efectivamente, en régimen de interés compuesto a medida que aumenta la frecuencia de capitalización aumenta el monto hasta llegar al monto máximo.

1.2.2.2.4. Tasa Periódica Efectiva de Interés

Definición: La Tasa Periódica Efectiva de Interés es el rendimiento (interés) de un peso de capital en un período de tiempo cualquiera sea el régimen aplicado y la capitalización.

Se dedujo que la tasa "*j*" no proporciona el verdadero rendimiento de la operación ya que los montos crecen a medida que "*m*" aumenta y la tasa periódica nominal *j* de interés enunciada permanece invariable.

Se desea calcular cuál es la tasa efectiva para las distintas capitalizaciones, acorde al crecimiento de los montos.

1.2.2.2.4.1. Régimen de Interés Compuesto con Capitalización Periódica (m=1)

Para esta demostración se simboliza *j* a la tasa periódica enunciada. Recordando que el interés es:

$$I = M - C = C(1+j)^n - C = C\left[(1+j)^n - 1\right]$$

Pero de acuerdo con la definición de Tasa Efectiva de Interés, si el capital de \$1 y n=1 período, entonces el interés es la tasa efectiva de interés:

$$i = (1+j)^1 - 1 \text{simplificando} \boxed{i = j}$$

Conclusión: cuando se capitaliza una única vez en el período (m=1) la tasa periódica nominal es también efectiva: ambas coinciden (único caso).

1.2.2.2.4.2. Régimen de Interés Compuesto con Capitalización Subperiódica (1<m<∞)

Recordando que el interés con capitalización subperiódica es:

$$I = M - C = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} - C = C\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} - 1\right]$$

De acuerdo con la definición de tasa efectiva de interés si el capital de \$1 y n=1período entonces el interés es la tasa efectiva de interés:

$$\boxed{i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1} \quad \text{Tasa periódica efectiva de interés}$$

1.2.2.2.4.3. Régimen de Interés Compuesto con Capitalización Continua (m→∞). Tasa Periódica Efectiva Máxima de Interés. $\bar{i}$

Recordando que el monto con capitalización continua es:

$$\bar{I} = \overline{M} - C = Ce^{jn} - C = C(e^{jn} - 1)$$

De acuerdo con la definición de tasa efectiva de interés si el capital de \$1 y n=1período entonces el interés es la tasa efectiva "máxima" de interés:

$$\boxed{\bar{i} = e^{j} - 1} \quad \text{Tasa periódica efectiva "máxima" de interés.}$$

1.2.2.2.4.4. Ejemplo

Siendo j = 0,12 anual. Calcular la tasa efectiva anual "i" para

a) Capitalización anual (m = 1)

$\boxed{i = j = 0{,}12 \text{ anual efectiva}}$

b) Capitalización semestral (m = 2)

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1=1{,}06^{2}-1=\boxed{0{,}1236 \text{ anual efectiva con cap. semestral}}$$

c) Capitalización trimestral (m = 4)

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1=1{,}03^{4}-1=\boxed{0{,}125509 \text{ anual efectiva con cap. trimestral}}$$

d) Capitalización mensual (m= 12)

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1=1{,}01^{12}-1=\boxed{0{,}126825 \text{ anual efectiva con cap. mensual}}$$

e) Capitalización continua ($m \to \infty$)

$$\bar{i}=e^{j}-1=e^{0{,}12}-1=\boxed{0{,}127497 \text{ anual efectiva máxima con cap. continua}}$$

Conclusión: siendo la tasa periódica nominal j constante (Supuesto de Proporcionalidad) a medida quela frecuencia de capitalización m crece, la tasa periódica efectiva también crece. Para $m \to \infty$ se obtiene la tasa efectiva máxima que es la mayor de las tasas periódicas efectivas.

1.2.2.3. Capitalización Subperiódica y Continua. Enfoque de Equivalencia (tasa periódica efectiva constante)

En el "Enfoque de Proporcionalidad" (j constante) se trabajó con la tasa subperiódica proporcional j/m que lleva a montos cada vez mayores a medida que aumenta la frecuencia de capitalización. Este crecimiento de los montos se traduce en una tasa efectiva de interés que es creciente (hasta llegar a la Tasa Efectiva Máxima que corresponde a la capitalización continua).

Un inversor "inteligente" decidiría invertir su capital con capitalización continua porque obtendría el máximo rendimiento. Es por ello que, a las instituciones financieras les interesa enunciar un rendimiento efectivo constante independientemente de la frecuencia de capitalización.

Surge, entonces, el "Enfoque de Equivalencia" o "Igualdad de Montos" o de "Tasa Periódica Efectiva i Constante".

1.2.2.3.1. Tasa Subperiódica Equivalente de Interés

Definición: la Tasa Subperiódica Equivalente de Interés $i_{(m)}$ es aquella tasa que capitalizando subperiódicamente produce el mismo monto que la tasa periódica efectiva i capitalizando periódicamente, operando sobre el mismo capital y por el mismo número de períodos.

El Enfoque de Equivalencia iguala los montos de capitalización periódica y de capitalización subperiódica:

$$\begin{cases} M = C(1+i)^n & \text{monto con capitalización periódica} \\ M = C(1+i_{(m)})^{nm} & \text{monto con capitalización subperiódica trabajando con tasa subperiódica equivalente de interés} \end{cases}$$

Igualando ambos montos $C(1+i)^n = C(1+i_{(m)})^{nm}$ simplificando "*C*" y "*n*" y despejando: $(1+i) = (1+i_{(m)})^m$ (*)

$$\boxed{i_{(m)} = \sqrt[m]{1+i} - 1 = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}$$ Tasa subperiódica equivalente de interés.

Despejando la tasa periódica efectiva "*i*" de (*):

$$\boxed{i = \left(1+i_{(m)}\right)^m - 1}$$

1.2.2.3.2. Tasas Subperiódicas Equivalentes de Interés en general

Definición: Dos tasas subperiódicas de interés son equivalentes si ambas producen el mismo monto, operando con distinta frecuencia de capitalización y trabajando sobre el mismo capital y el mismo número de períodos.

Para deducirlas se plantea la igualdad de los montos capitalizando en un caso "*m*" veces y en el otro "*k*" veces.

$$\begin{cases} M = C(1+i_{(m)})^{nm} \\ M = C(1+i_{(k)})^{nk} \end{cases}$$

$$C(1+i_{(m)})^{nm} = C(1+i_{(k)})^{nk} \quad (1+i_{(m)})^m = (1+i_{(k)})^k$$

Simplificando y despejando

$$\boxed{i_{(m)} = \sqrt[m]{\left(1+i_{(k)}\right)^k} - 1 = \left(1+i_{(k)}\right)^{\frac{k}{m}} - 1}$$

1.2.2.3.3. Tasa Periódica Nominal "Convertible" de Interés $j_{(m)}$

En el "enfoque de proporcionalidad" la tasa nominal *j* es constante pero si se pretende obtener la tasa nominal periódica que corresponde a la tasa subperiódica equivalente es necesario considerar a esta tasa "variable" de acuerdo con la frecuencia de capitalización. Esta tasa periódica nominal variable se denomina "Tasa Periódica Nominal Convertible" y se simboliza $j_{(m)}$

$$\boxed{j_{(m)} = i_{(m)} m} \rightarrow \boxed{i_{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}}$$

De esta forma, bajo el concepto de equivalencia, el monto capitalizando subperiódica es:

$$\boxed{M = C(1+i_{(m)})^{nm} = C\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{nm}}$$

Se recuerda que este monto es igual al de la capitalización periódica $M = C(1+i)^n$

<u>Resumen de tasas de interés</u>

$i_{(m)}$ tasa subperiódica equivalente

→ es <u>proporcional</u> a la tasa periódica <u>nominal</u> $j_{(m)}$

$$\boxed{i_{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}} \quad \text{y} \quad \boxed{j_{(m)} = i_{(m)}.\, m}$$

→ es <u>equivalente</u> a la tasa periódica <u>efectiva</u> i

$$1+i = \left(1+i_{(m)}\right)^m$$

$$\boxed{i = \left(1+i_{(m)}\right)^m - 1} \qquad \boxed{i_{(m)} = \sqrt[m]{1+i} - 1}$$

Si $i_{(12)}$=0,03 mensual ; $j_{(m)}$=36 anual cap. mensualmente ; i=0,425761 anual efva.

<u>Ejemplo:</u>

Considerando una tasa de interés del 1% mensual, calcular la tasa de interés trimestral equivalente y las tasas periódicas nominales convertibles y efectivas anuales de interés.

<u>Frecuencia</u>	<u>Tasa Subperiódica Equivalente</u>	<u>Tasa Periódica Nominal Convertible Anual</u>	<u>Tasa Periódica Efectiva Anual</u>
$k = 12$	$\boxed{i_{(k)} = i_{(12)} = 0,01 \text{ mensual}}$	$j_{(k)} = i_{(k)} k$ $j_{(12)} = 0,01x12$ $\boxed{j_{(12)} = 0,12}$	$i = \left(1+i_{(k)}\right)^k - 1$ $i = \left(1+0,01\right)^{12} - 1$ $\boxed{i = 0,126825}$
$m = 4$	$i_{(m)} = (1+i_{(k)})^{\frac{k}{m}} - 1$ $i_{(4)} = (1+0,01)^{\frac{12}{4}} - 1$ $\boxed{i_{(4)} = 0,030301 \text{ trimestral}}$	$j_{(m)} = i_{(m)} m$ $j_{(4)} = 0,030301x4$ $\boxed{j_{(4)} = 0,121204}$	$i = \left(1+i_{(m)}\right)^m - 1$ $i = \left(1+0,030301\right)^4 - 1$ $\boxed{i = 0,126825}$

<u>Observaciones:</u>

1- Las tasas subperiódicas equivalentes de interés no son proporcionales.

2- Las tasas periódicas nominales convertibles de interés crecen a media que disminuye la frecuencia de capitalización.

3- Siendo las tasas subperiódicas de interés equivalentes, las tasas periódicas efectivas de interés son iguales.

1.2.2.3.4. Tasa Periódica Nominal Instantánea de Interés "δ"

1.2.2.3.4.1. Definiciones

Definición sintética: es la tasa Periódica Nominal de Interés que se obtiene aplicando el límite para $m \to \infty$ de la tasa nominal convertible de interés $j_{(m)}$. $\boxed{\delta = \lim_{m\to\infty} j_{(m)}}$

Definición analítica: es aquella tasa periódica nominal que capitalizando continuamente (o cuando el intervalo de capitalización tiende a 0) produce el mismo monto (Enfoque de Equivalencia) que la tasa periódica efectiva i capitalizando periódicamente, operando sobre el mismo capital y por el mismo número de períodos.

1.2.2.3.4.2. Deducción aplicando el número "*e*"

Cabe destacar que ahora el enfoque es de "Equivalencia" o "Igualdad de Montos" o "Tasa Periódica Efectiva i Constante". Igualando el monto con capitalización periódica y subperiódica y aplicando límite para $m \to \infty$

$\lim_{m\to\infty}(1+i) = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$ siendo el primer miembro constante y haciendo ciertos artificios en el segundo miembro:

$$1+i = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\frac{j_{(m)}}{j_{(m)}}}{\frac{m}{j_{(m)}}}\right)^{\frac{m}{j_{(m)}}\cdot j_{(m)}} \qquad 1+i = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{j_{(m)}}}\right)^{\frac{m}{j_{(m)}}\cdot j_{(m)}} \qquad \text{ya que} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$1+i = e^{\lim_{m\to\infty} j_{(m)}}$ $\quad 1+i = e^{\delta}$ (*) $\qquad$ aplicando ln en ambos miembros

$\ln(1+i) = \ln(e^{\delta}) \qquad \ln(1+i) = \delta \ln e$

$$\boxed{\delta = \ln(1+i)}$$

Aclaración: De (*) se obtiene el monto con capitalización continua utilizando la tasa Instantánea de Interés (enfoque de equivalencia o igualdad de montos):

$$\boxed{M = Ce^{\delta n}}$$

1.2.2.3.5. Ejemplo

Se requiere un rendimiento efectivo constante del 12% efectivo anual (i constante implica Enfoque de Equivalencia). Determinar las tasas subperiódicas equivalentes y las tasas periódicas nominales convertibles con capitalización:

a) Semestral

i = 0,12 anual efectiva $\qquad m = 2$

$\left(1+i_{(m)}\right)^m = 1+i \qquad i_{(m)} = i_{(2)} = \sqrt[m]{1+i} - 1 = \sqrt[2]{1,12} - 1 = \boxed{0,0583005 \; semestral \;\; equivalente}$

$j_{(m)} = j_{(2)} = i_{(2)} x 2 = \boxed{0,116601 \text{ nominal anual}}$

b) Trimestral

i = 0,12 anual efectiva $\qquad m = 4$

$$\left(1+i_{(m)}\right)^m = 1+i \qquad i_{(m)} = i_{(4)} = \sqrt[m]{1+i} - 1 = \sqrt[4]{1{,}12} - 1 = \boxed{0{,}028737 \ \textit{trimestral equivalente}}$$

$$j_{(m)} = j_{(4)} = i_{(4)} x4 = \boxed{0{,}114949 \text{ nominal anual}}$$

c) Mensual
i = 0,12 anual efectiva $\qquad m = 12$

$$\left(1+i_{(m)}\right)^m = 1+i \qquad i_{(m)} = i_{(12)} = \sqrt[m]{1+i} - 1 = \sqrt[12]{1{,}12} - 1 = \boxed{0{,}009489 \ \textit{mensual equivalente}}$$

$$j_{(m)} = j_{(12)} = i_{(12)} x12 = \boxed{0{,}113866 \text{ nominal anual}}$$

d) Continua
i = 0,12 anual efectiva $\qquad m \to \infty$

Al ser la capitalización continua no existe tasa subperiódica. La tasa periódica nominal instantánea es:

$$\delta = \ln(1+i) = \ln 1{,}12 = \boxed{0{,}113329 \text{ instantánea nominal anual}}$$

Primera observación: A medida que aumenta la frecuencia de capitalización, para obtener siempre el mismo Monto (supuesto de Equivalencia), se deben enunciar tasas subperiódicas equivalentes menores a la tasa subperiódica proporcional de la tasa periódica efectiva dada (por ejemplo, $i_{(2)}<i/2$). Es así porque, con la mayor cantidad de veces que capitalizan, siempre se llega al 12% anual efectivo.

Segunda observación: A medida que aumenta la frecuencia de capitalización, para obtener siempre el mismo Monto (supuesto de Equivalencia), se deben enunciar tasas periódicas nominales convertibles cada vez menores.

Tercera observación: la tasa Instantánea de Interés es la menor de todas las tasas periódicas de interés.

1.2.2.3.6. Comparación de las Tasas Periódicas Nominales Convertibles de Interés para "*m*" variable.

Partiendo del enfoque de equivalencia:

$$(1+i) = \left(1+i_{(1)}\right)^1 = \left(1+i_{(2)}\right)^2 = \left(1+i_{(3)}\right)^3 = \ldots = \left(1+i_{(m)}\right)^m$$

y reemplazando

$$(1+i) = \overbrace{\left(1+\frac{j_{(1)}}{1}\right)^1 = \left(1+\frac{j_{(2)}}{2}\right)^2}^{(1)} \!\!\!\!\!\!\!\!\!\! \underbrace{\left(1+\frac{j_{(2)}}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{j_{(3)}}{3}\right)^3}_{(2)} = \ldots = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$$

+ Se compara $j_{(1)}$ y $j_{(2)}$

Manteniendo constante $j_{(1)}$ y aumentando la frecuencia de capitalización se da la siguiente desigualdad:

$$\left(1+\frac{j_{(1)}}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{j_{(1)}}{2}\right)^2$$ reemplazando el primer miembro de la desigualdad por (1)

$$\left(1+\frac{j_{(2)}}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{j_{(1)}}{2}\right)^2$$ y simplificando

$$\boxed{j_{(2)} < j_{(1)} = i}$$

+ Se compara ahora $j_{(2)}$ y $j_{(3)}$.con idéntico razonamiento:

$$\left(1+\frac{j_{(2)}}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{j_{(2)}}{3}\right)^3$$ reemplazando el primer miembro de la desigualdad por (2)

$$\left(1+\frac{j_{(3)}}{3}\right)^3 < \left(1+\frac{j_{(2)}}{3}\right)^3$$ y simplificando

$\boxed{j_{(3)} < j_{(2)}}$ y así sucesivamente se puede demostrar que:

$$\boxed{j_{(4)} < j_{(3)}}$$

$$\boxed{j_{(5)} < j_{(4)}}$$

Conclusiones (bajo el Enfoque de Equivalencia)

$$\boxed{i = j_{(1)} > j_{(2)} > j_{(3)} > \ldots > \lim_{m\to\infty} j_{(m)} = \delta}$$

Primera conclusión: La Tasa Periódica Efectiva de Interés es mayor a todas las tasas periódicas nominales de interés.

Segunda conclusión: Las tasas periódicas nominales convertibles decrecen a medida que aumenta la frecuencia de capitalización.

Tercera conclusión: Si $m\to\infty$ la tasa nominal instantánea δ es la menor de todas las tasas periódicas nominales.

Aclaración: Al plantear la equivalencia entre las tasas, todos ellas "i", "$j_{(m)}$"y "δ" (capitalizando periódica, subperiódica y continuamente) producen montos iguales:

$$\boxed{C(1+i)^n = C\left(1+i_{(m)}\right)^{nm} = C\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{nm} = Ce^{\delta n}}$$

Simplificando

$$\boxed{1+i = \left(1+i_{(m)}\right)^m = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta}}$$

Ver nuevamente el ejemplo del punto 1.2.2.3.5.

1.2.2.4. Comparación de las Tasas Subperiódicas de Interés: Proporcional y Equivalente

Partiendo del mismo valor numérico de las tasas periódicas i y j y para m>1:

$$\left(1+i\right) < \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

Despejando j/m nos queda

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{j}{m}$$

Donde el primer miembro es la tasa subperiódica equivalente. Luego

$$\boxed{i_{(m)} < \frac{j}{m}}$$

Conclusión: Partiendo del mismo valor numérico de las tasas periódicas, la Tasa Subperiódica Equivalente de interés es siempre menor a la Tasa Subperiódica Proporcional de interés.

Ejemplo: $i = j = 0{,}12$ anual $m=2$

$i_{(2)} = 1{,}12^{(1/2)} - 1 = 0{,}058301$ semestral equivalente.

$j/m = 0{,}12/2 = 0{,}06$ semestral proporcional.

1.2.3. Tasa Efectiva de Rendimiento cuando se opera en Régimen de Interés Simple

Igualando los Montos en Régimen de Interés Simple y Compuesto se obtiene la Tasa Efectiva de Rendimiento "i" equivalente a la tasa en régimen de interés simple "i_s":

$$\left.\begin{aligned} M &= C(1+i_s n) \\ M &= C(1+i)^n \end{aligned}\right\}$$

$C(1+i)^n = C(1+i_s n)$ simplificando C $(1+i)^n = (1+i_s n)$ y despejando

$\boxed{i = \sqrt[n]{(1+i_s n)} - 1}$ Tasa efectiva de rendimiento para operaciones a interés Simple

Si se conoce la tasa efectiva de rendimiento y se despeja la tasa a interés Simple:

$C(1+i_s n) = C(1+i)^n$ simplificando y despejando

$$\boxed{i_s = \frac{(1+i)^n - 1}{n}}$$

Aclaración: las relaciones entre ambas tasas dependen del plazo de la operación (n) pero no del capital invertido (C).

Ejemplo: Calcular la tasa efectiva anual de rendimiento siendo la tasa de interés simple del 1% para 30 días para operaciones a:

a) 7 días

$$(1+i)^n = (1+i_s n) \qquad (1+i)^{\frac{7}{365}} = \left(1+0{,}01\frac{7}{30}\right)$$

$$i = \sqrt[\frac{7}{365}]{\left(1+0{,}01\frac{7}{30}\right)} - 1 = \boxed{0{,}129218 \text{ anual efectiva}}$$

b) 30 días

$$(1+i)^n = (1+i_s n) \qquad (1+i)^{\frac{30}{365}} = \left(1+0{,}01\frac{30}{30}\right)$$

$$i = \sqrt[\frac{30}{365}]{(1+0{,}01x1)} - 1 = \boxed{0{,}128695 \text{ anual efectiva}}$$

c) 365 días

$$(1+i)^n = (1+i_s n) \qquad (1+i)^{\frac{365}{365}} = \left(1+0{,}01\frac{365}{30}\right)$$

$$i = \left(1+0{,}01\frac{365}{30}\right) - 1 = \boxed{0{,}121667 \text{ anual efectiva}}$$

Conclusión: Las tasas efectivas de rendimiento correspondientes a la tasa en régimen de interés simple decrecen a medida que aumenta el tiempo de colocación del capital.

Cadena de Equivalencias para determinar la tasa Efectiva de Rendimiento (Costo)

.Resumiendo, para encontrar la tasa efectiva de Rendimiento o de Interés se deben igualar el monto compuesto con capitalización periódica con los demás montos, (con capitalización subperiódica y continua e inclusive con el monto simple) formando la cadena de equivalencias. De allí se despeja la tasa en cuestión.

$$\boxed{C\left(1+\underbrace{i}_{\text{Tasa Efectiva de Rendimiento}}\right)^n = C\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{nm} = C\left(1+i_{(m)}\right)^{nm} = Ce^{\delta n} = C\left(1+i_s n\right)}$$

Resumen de ambos enfoques: Proporcionalidad y Equivalencia

Enfoque de Proporcionalidad- Tasa periódica nominal j constante

	C A P I T A L I Z A C I Ó N		
	Periódica	Subperiódica	Continua
Montos crecientes	$M = C(1+i)^n$	$M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}$	$\overline{M} = Ce^{jn}$ (máximo)
Tasas efectivas crecientes	$i = j$	$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1$	$\bar{i} = e^j - 1$ (máxima)

A medida que aumenta la frecuencia de capitalización los montos crecen, hasta llegar al monto máximo $(\overline{M})$ para $m \to \infty$

Este crecimiento en los montos se refleja en la tasa efectiva de interés que para $m \to \infty$ se obtiene la tasa efectiva máxima.

Enfoque de Equivalencia - Tasa periódica efectiva i constante

	C A P I T A L I Z A C I Ó N		
	Periódica	Subperiódica	Continua
Montos iguales	$M = C(1+i)^n$	$M = C\left(1+i_{(m)}\right)^{nm} = C\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{nm}$	$M = Ce^{\delta n}$
Tasas nom. convertibles decrecientes	$i = j_{(1)}$	$1+i = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$; $j_{(m)} = \left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right)m$	$1+i = e^{\delta}$; $\delta = \ln(1+i)$

En este enfoque todos los montos son iguales. Para encontrar las tasas nominales convertibles se igualan los montos. Para $m \to \infty$ se obtiene la tasa nominal instantánea (δ).

Estas nominales convertibles decrecen para m creciente, hasta llegar a la tasa instantánea que es la menor de todas las tasas de interés $i > j_{(m)} > \delta$

1.3. <u>Operaciones Pactadas con Ajuste por Inflación.</u>

1.3.1. <u>Monto pactado Sin Ajuste por Inflación</u>

En períodos inflacionarios, la tasa que los bancos ofrecen NO es una tasa real sino aparente porque en ella está incluida la inflación del período. A esa tasa enunciada se la denomina "Tasa Aparente" y se simboliza i_{ap}. El monto producido se denomina "Monto Sin Ajuste por inflación":

$$\boxed{M_{S/Aj} = C(1+i_{ap})^n}$$

1.3.2. <u>Monto pactado Con Ajuste por Inflación</u>

<u>1° Definición:</u> la Tasa de Inflación mide el incremento sostenido de los precios por cada \$1.- de capital y en 1 período. Se simboliza φ (phi).

Siendo I_0 el índice de precios en el período base e I_1el índice de precios en el período actual, para obtener I_1 es necesario agregarle a I_0 la tasa de inflación.

$$I_1 = I_0 + I_0\varphi = I_0(1+\varphi)$$

y para despejar la tasa de inflación

$$\boxed{\varphi = \frac{I_1}{I_0} - 1 = \frac{I_1 - I_0}{I_0}}$$

Se observa que la tasa de Inflación opera como una tasa de interés, en donde los índices son el monto y el capital.

<u>2° Definición:</u> la Tasa de Desvalorización Monetaria mide la pérdida de poder adquisitivo de \$1.- en 1 período. Se simboliza λ (lambda).

Siendo I_0 el índice de precios en el período base e I_1 el índice de precios en el período actual, para obtener I_0 es necesario descontarle a I_1 la tasa de desvalorización monetaria.

$$I_0 = I_1 - I_1\lambda = I_1(1-\lambda) \qquad \frac{I_o}{I_1} = 1-\lambda$$

y para despejar la tasa de desvalorización monetaria

$$\boxed{\lambda = 1 - \frac{I_0}{I_1} = \frac{I_1 - I_0}{I_1}}$$

Se observa que la tasa de Desvalorización Monetaria opera como una tasa de descuento, en donde los índices son el valor nominal y el valor efectivo de un documento (Capítulo II).

<u>Relación</u> entre φ y λ

Sabemos que:

$I_1 = I_0(1+\varphi)$ e $I_1 = \dfrac{I_0}{(1-\lambda)}$ igualando y simplificando $1+\varphi = \dfrac{1}{1-\lambda}$ y despejando

$\varphi = \dfrac{1}{1-\lambda} - 1 = \dfrac{1-1+\lambda}{1-\lambda}$ entonces $\boxed{\varphi = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}}$

$1-\lambda = \dfrac{1}{1+\varphi}$ $\quad \lambda = 1 - \dfrac{1}{1+\varphi}$ $\quad \lambda = \dfrac{1+\varphi-1}{1+\varphi}$ entonces $\boxed{\lambda = \dfrac{\varphi}{1+\varphi}}$

<u>Comparación</u> entre φ y λ

$\lambda = \lambda$ por la propiedad de identidad

$1 > 1-\lambda$ dividiendo miembro a miembro

$\lambda < \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ siendo "φ" el segundo miembro de esta desigualdad:

$\boxed{\lambda < \varphi}$

<u>Ejemplo:</u>

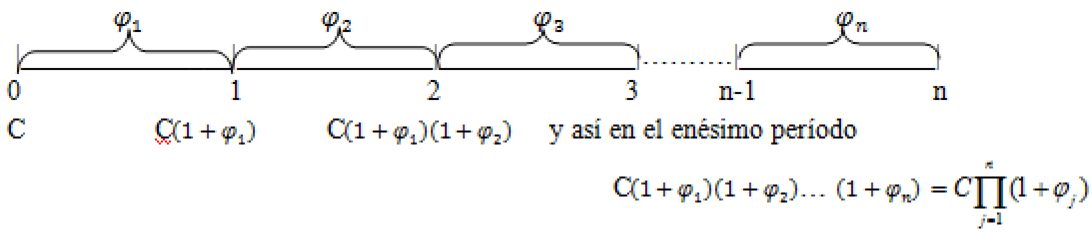
Siendo I_0 = 100.- e I_1 = 109,8642 determinar las tasas de inflación y de desvalorización monetaria.

$$\boxed{\varphi} = \frac{I_1 - I_0}{I_0} = \frac{109{,}8624-100}{100} = \boxed{0{,}098624} \quad \text{y} \quad \boxed{\lambda} = \frac{I_1 - I_0}{I_1} = \frac{109{,}8624-100}{109{,}8624} = \boxed{0{,}089770}$$

Se cumple que: $\lambda < \varphi$

<u>Determinación del monto pactado con ajuste por inflación</u>

En el siguiente eje temporal se calcula el capital por la inflación del período en curso:



Para ajustar el capital inicial C por la inflación se procede como indica el gráfico temporal precedente:

a) En el primer período:
$C_{Aj} = C + C\varphi_1 = C(1+\varphi_1)$

b) En el segundo período:
$$C_{Aj} = C(1+\varphi_1) + C(1+\varphi_1)\varphi_2 = C(1+\varphi_1)(1+\varphi_2) = C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)$$

c) En el tercer período:
$$C_{Aj} = C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j) + C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)\varphi_3 = C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)(1+\varphi_3) = C\prod_{j=1}^{3}(1+\varphi_j)$$

d) En el último período:
$$C_{Aj} = C\prod_{j=1}^{n-1}(1+\varphi_j) + C\prod_{j=1}^{n-1}(1+\varphi_j)\varphi_n = C\prod_{j=1}^{n-1}(1+\varphi_j)(1+\varphi_n) = C\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)$$

En el esquema anterior se observa cómo evoluciona el capital en períodos inflacionarios. Sobre este capital ajustado por inflación se aplica la Tasa Real de Interés que se simboliza "i_r". El monto pactado Con Ajuste por Inflación es (ver 1.3.3.5.Cuadro de evolución del Monto Con Ajuste por Inflación):

$\boxed{M_{C/Aj} = C\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)(1+i_r)^n}$ en el caso que calcula la tasa promedio de inflación φ (implicaría considerar que la inflación es constante en los n períodos) la fórmula es:

$$\boxed{M_{C/Aj} = C(1+\varphi)(1+\varphi)...(1+\varphi)(1+i_r)^n = C(1+\varphi)^n(1+i_r)^n}$$

1.3.3. Relación entre la Tasa Aparente, la Tasa de Inflación y la Tasa Real

Igualando el monto Con Ajuste (inflación promedio constante) y el monto Sin Ajuste se obtienen las equivalencias entre las distintas tasas participantes en la operación.

$$\left.\begin{array}{l} M_{S/Aj} = C(1+i_{ap})^n \\ M_{C/Aj} = C(1+\varphi)^n(1+i_r)^n \end{array}\right\} \text{ igualando y simplificando}$$

$$\boxed{1+i_{ap} = (1+\varphi)(1+i_r)} \qquad (*) \quad \text{Ecuación o igualdad de Fisher}$$

1.3.3.1. Tasa Aparente

Despejándola de (*) :

$$\boxed{i_{ap} = (1+\varphi)(1+i_r)-1}$$

1.3.3.2. Tasa de Inflación

Despejándola de (*) :

$$1+\varphi = \frac{1+i_{ap}}{1+i_r} \qquad \varphi = \frac{1+i_{ap}}{1+i_r} - 1 = \frac{1+i_{ap}-1-i_r}{1+i_r} \qquad \boxed{\varphi = \frac{i_{ap}-i_r}{1+i_r}}$$

1.3.3.3. Tasa Real

Despejándola de (*):

$$1+i_r = \frac{1+i_{ap}}{1+\varphi} \qquad i_r = \frac{1+i_{ap}}{1+\varphi} - 1 = \frac{1+i_{ap}-1-\varphi}{1+\varphi} \qquad \boxed{i_r = \frac{i_{ap}-\varphi}{1+\varphi}}$$

Se presentan 3 casos para analizar en cuanto al valor de la i_r

3 casos

- Si $i_{ap} = \varphi \Rightarrow i_r = 0$ no hubo rendimiento en la colocación, sólo se mantuvo el poder adquisitivo del capital.
- Si $i_{ap} > \varphi \Rightarrow i_r > 0$ en este caso sí se obtuvo rendimiento financiero por sobre el ajuste inflacionario.
- Si $i_{ap} < \varphi \Rightarrow i_r < 0$ en este caso se pierde poder adquisitivo del capital, hay descapitalización(único caso en que la tasa i_r es negativa).

1.3.3.4. Ejemplo

Suponiendo una tasa aparente del 10% anual y una tasa de inflación del 8% anual. Determinar la tasa real anual de la operación.

$$i_r = \frac{i_{ap} - \varphi}{1+\varphi} = \frac{0{,}10 - 0{,}08}{1{,}08} = \frac{0{,}02}{1{,}08} \quad \boxed{i_r = 0{,}0185185\ anual}$$

La tasa real NO se calcula como la diferencia entre la tasa aparente y la tasa de inflación. Su valor es aún menor que dicha diferencia.

1.3.3.5. Cuadro de evolución del Monto Con Ajuste por Inflación

A continuación se presenta el cuadro de evolución del capital pactado con ajuste por Inflación, período a período:

Período	Capital	Capital Ajustado	Interés sobre Capital Ajustado	Monto con Ajuste Inflacionario
1	C	$C(1+\varphi_1)$	$C(1+\varphi_1)i_r$	$C(1+\varphi_1)+C(1+\varphi_1)i_r = C(1+\varphi_1)(1+i_r)$
2	$C(1+\varphi_1)(1+i_r)$	$C(1+\varphi_1)(1+i_r)(1+\varphi_2) =$ $C(1+i_r)\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)$	$C(1+i_r)\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j).i_r$	$C(1+i_r)\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)+C(1+i_r)\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j).i_r =$ $C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)(1+i_r)(1+i_r) = C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)(1+i_r)^2$
3	$C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)(1+i_r)^2$	$C\prod_{j=1}^{2}(1+\varphi_j)(1+i_r)^2(1+\varphi_3) =$ $C(1+i_r)^2\prod_{j=1}^{3}(1+\varphi_j)$	$C(1+i_r)^2\prod_{j=1}^{3}(1+\varphi_j).i_r$	$C(1+i_r)^2\prod_{j=1}^{3}(1+\varphi_j)+C(1+i_r)^2\prod_{j=1}^{3}(1+\varphi_j).i_r =$ $C\prod_{j=1}^{3}(1+\varphi_j)(1+i_r)^2(1+i_r) = C\prod_{j=1}^{3}(1+\varphi_j)(1+i_r)^3$
…	…	…	...	…
n	$C\prod_{j=1}^{n-1}(1+\varphi_j)(1+i_r)^{n-1}$	$C\prod_{j=1}^{n-1}(1+\varphi_j)(1+i_r)^{n-1}(1+\varphi_n) =$ $C(1+i_r)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)$	$C(1+i_r)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j).i_r$	$C(1+i_r)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)+C(1+i_r)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j).i_r =$ $C\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)(1+i_r)^{n-1}(1+i_r) = C\prod_{j=1}^{n}(1+\varphi_j)(1+i_r)^n$

1.4. Tasa Media o Tasa Promedio

La Tasa Media o Tasa Promedio se simboliza i_p y se deducirá en dos casos:

1.4.1. Primer caso: Cuando se particiona el capital

1.4.1.1. Definición

La Tasa Media o Tasa Promedio es aquella tasa que colocando un capital en su totalidad produce el mismo monto que colocando parcelas de ese capital a distintas tasas durante el mismo número de períodos.

1.4.1.2. Régimen a Interés Simple

Hecho Real:

Se tienen distintos capitales colocados a distintas tasas durante "*n*" períodos.

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \rightarrow i_1 \\ C_2 \rightarrow i_2 \\ . \\ . \\ . \\ C_k \rightarrow i_k \end{array}\right\} \text{n períodos}$$

El monto del Hecho Real es

$$M_{HR} = M_1 + M_2 + ... + M_k = C_1(1+i_1 n) + C_2(1+i_2 n) + ... + C_k(1+i_k n)$$

$$\boxed{M_{HR} = \sum_{j=1}^{k} C_j(1+i_j n)} \quad (1)$$

Supuesto de equivalencia:

Se supone que el capital total se coloca a la tasa Promedio (i_p) durante "n" períodos.

$$C_1 + C_2 + ... + C_k = \sum_{j=1}^{k} C_j = C \rightarrow i_p \rightarrow n \text{ períodos}$$

El monto del Supuesto de Equivalencia es

$$\boxed{M_{SE} = C(1+i_p n)} \quad (2)$$

Igualando ambos montos

(2) = (1)

$$C(1+i_p n) = \sum_{j=1}^{k} C_j(1+i_j n)$$

$$C + Ci_p n = \sum_{j=1}^{k} C_j + n\sum_{j=1}^{k} C_j i_j \qquad \text{simplificando} \qquad Ci_p = \sum_{j=1}^{k} C_j i_j$$

$$\boxed{i_p = \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j i_j}{\sum_{j=1}^{k} C_j}}$$

Observaciones:

1- La tasa Media es independiente del plazo de la operación (NO aparece "*n*" en la fórmula final).

2- Recordando que el promedio ponderado de una variable X es $\overline{X}\, pond = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$ donde:

x_i= *i*-ésimo valor de la variable X
f_i = es la ponderación o frecuencia absoluta del valor x_i de la variable X
k es el número de valores distintos que toma la variable X

Si se observa la fórmula de tasa media o promedio se concluye que la "Tasa Media o Promedio es un promedio ponderado de las tasas de interés donde las ponderaciones son los capitales invertidos a cada una de las distintas tasas de interés".

Caso particular: Suponiendo que todos los capitales son iguales.

Si $C_1 = C_2 = C_3 = ... = C_k = C^*$

$$i_p = \frac{C^* \sum_{j=1}^{k} i_j}{C^* \sum_{j=1}^{k} 1}$$ de donde $$\boxed{i_p = \frac{\sum_{j=1}^{k} i_j}{k}}$$

Recordando que el Promedio Simple o Media Aritmética de una variable X es $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Se concluye que, si todos los capitales son iguales, la Tasa Media es el Promedio Simple o Media Aritmética de las tasas de interés.

Ejemplo:

Suponiendo que se invierten los siguientes capitales a las tasas indicadas por 2 años en régimen de interés simple:

a) \$8.320.- a la tasa del 6% bimestral
b) \$7.350.- a la tasa del 4,50% bimestral
c) \$10.330.- a la tasa del 5,25% bimestral

determinara tasa media o tasa promedio bimestral de la operación.

Se puede resolver de 2 formas:

1° Planteando la igualdad de los montos:

$$C(1 + i_p n) = \sum_{j=1}^{k} C_j (1 + i_j n)$$

$$26.000(1 + i_p.12) = 8.320(1 + 0,06x12) + 7.350(1 + 0,045x12) + 10.330(1 + 0,0525x12)$$

$$26.000(1 + i_p.12) = 14.310,40 + 11.319,00 + 16.837,90$$

$$i_p = \left(\frac{42.467,30}{26.000} - 1\right)\frac{1}{12}$$

$i_p = 0,052780$ bimestral. Se debe cumplir que: $i_{mínima} < i_p < i_{máxima}$

2° Aplicando la fórmula de tasa media:

$$i_p = \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j i_j}{\sum_{j=1}^{k} C_j} = \frac{8.320x0,06 + 7.350x0,045 + 10.330x0,0525}{8.320 + 7.350 + 10.330} = \frac{499,20 + 330,75 + 542,325}{26.000}$$

$\boxed{i_p} = \frac{1.372,275}{26.000} = \boxed{0,052780 \text{ bimestral}}$. Se debe cumplir que: $i_{mínima} < i_p < i_{máxima}$

1.4.1.3. Régimen de Interés Compuesto

Hecho Real (con idéntico razonamiento al punto anterior)

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \rightarrow i_1 \\ C_2 \rightarrow i_2 \\ . \\ . \\ . \\ C_k \rightarrow i_k \end{array}\right\} n \text{ períodos}$$

$$M_{HR} = M_1 + M_2 + ... + M_k = C_1(1+i_1)^n + C_2(1+i_2)^n + ... + C_k(1+i_k)^n$$

$$\boxed{M_{HR} = \sum_{j=1}^{k} C_j (1+i_j)^n} \quad (1)$$

Supuesto de equivalencia:

Se supone que el capital total se coloca a la tasa Promedio (i_p) durante "n" períodos.

$$C_1 + C_2 + ... + C_k = \sum_{j=1}^{k} C_j = C \rightarrow i_p \rightarrow n \text{ períodos}$$

$$\boxed{M_{SE} = C(1+i_p)^n} \quad (2)$$

Igualando ambos Montos

(2) = (1)

$$C(1+i_p)^n = \sum_{j=1}^{k} C_j (1+i_j)^n \quad \text{despejando}$$

$$\boxed{i_p = \sqrt[n]{\frac{\sum_{j=1}^{k} C_j (1+i_j)^n}{\sum_{j=1}^{k} C_j}} - 1}$$

Aclaración:

Cuando se trabaja con un único capital y se despeja la tasa de interés queda

$$\text{M=C}(1+i)^n \quad \text{y despejando la tasa} \quad i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$$

En forma análoga se puede escribir: $i_p = \sqrt[n]{\dfrac{\sum_{j=1}^{k} M_j}{\sum_{j=1}^{k} C_j}} - 1$

Ejemplo:

Suponiendo que se invierten los siguientes capitales a las tasas indicadas por 2 años en régimen de interés compuesto:

a) \$8.320.- a la tasa del 6% bimestral
b) \$7.350.- a la tasa del 4,50% bimestral
c) \$10.330.- a la tasa del 5,25% bimestral

determinara tasa media bimestral de la operación.

Se puede resuelve planteando la igualdad de los montos:

$$C(1+i_p)^n = \sum_{j=1}^{k} C_j(1+i_j)^n$$

$$26.000(1+i_p)^{12} = 8.320x1,06^{12} + 7.350x1,045^{12} + 10.330x1,0525^{12}$$

$$26.000(1+i_p)^{12} = 16.741,47 + 12.464,73 + 19.088,23$$

$$i_p = \sqrt[12]{\frac{48.294,43}{26.000}} - 1$$

$\boxed{i_p = 0,052956 \text{ bimestral}}$. Se debe cumplir que: $i_{mínima} < i_p < i_{máxima}$

1.4.2. Segundo caso: Cuando se particiona el tiempo o plazo de la colocación

1.4.2.1. Definición:

La Tasa Media o Tasa Promedio es aquella tasa que colocando un capital durante el tiempo total en una operación financiera produce el mismo monto que colocando ese mismo capital a distintas tasas durante distintos intervalos de ese tiempo total.

1.4.2.2. Régimen a Interés Simple

Hecho Real:

$C \rightarrow$ $i_1 \rightarrow$ n_1 períodos
$i_2 \rightarrow$ n_2 períodos
.
.
$i_k \rightarrow$ n_k períodos

$$M_{HR} = C + I_1 + I_2 + ... + I_k$$

$$M_{HR} = C + Ci_1n_1 + Ci_2n_2 + ... + Ci_kn_k$$

$$\boxed{M_{HR} = C + C\sum_{j=1}^{k} i_j n_j = C\left(1 + \sum_{j=1}^{k} i_j n_j\right)} \quad (1)$$

Supuesto de equivalencia:

Se coloca el capital a la tasa media durante el tiempo total

$$C \rightarrow i_p \rightarrow n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{j=1}^{k} n_j = n$$

$$\boxed{M_{SE} = C + Ci_p n = C(1 + i_p n)} \quad (2)$$

Igualando ambos Montos

(2) = (1)

$$C(1 + i_p n) = C(1 + \sum_{j=1}^{k} i_j n_j) \qquad i_p n = \sum_{j=1}^{k} i_j n_j$$

Simplificando y despejando

$$\boxed{i_p = \frac{\sum_{j=1}^{k} i_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j}}$$

Observaciones:

1- La tasa media es independiente del Capital invertido.

2- La "Tasa Media es el Promedio Ponderado de las tasas de interés donde las ponderaciones son los tiempos que rigió cada tasa (ver segunda observación caso anterior en R.I. Simple).

Caso particular: Si los intervalos de colocación son todos iguales y los simbolizamos n^*, queda:

Si $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n^*$

$$i_p = \frac{n^* \sum_{j=1}^{k} i_j}{n^* \sum_{j=1}^{k} 1} \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{i_p = \frac{\sum_{j=1}^{k} i_j}{k}}$$

Recordando que el Promedio Simple o Media Aritmética de una variable X

es: $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Se concluye que, si todos los tiempos de colocación son iguales, la Tasa Media es el Promedio Simple o Media Aritmética de las tasas de interés. (Ídem punto 1.4.1.2. Caso particular)

Ejemplo:

Suponiendo que se invierte un capital de \$100.000.- a las siguientes tasas de interés y por los bimestres indicados, en régimen de interés simple:

a) tasa del 6% bimestral durante 4 bimestres,
b) tasa del 4,50% bimestral durante los 6 bimestres siguientes y
c) tasa del 5,25% bimestral durante los últimos 8 bimestres,

Determinar tasa media bimestral de la operación.

Se puede resolver de 2 formas:

1° Planteando la igualdad de los montos:

$$C(1+i_p n)=C\left(1+\sum_{j=1}^{k} i_j n_j\right)$$

$$100.000(1+i_p.18)=100.000(1+0,06x4+0,045x6+0,0525x8) \quad \text{simplificando}$$

$$i_p=\left[(1+0,24+0,27+0,42)-1\right]\frac{1}{18}=\frac{0,93}{18}$$

$$\boxed{i_p=0,051667 \text{ bimestral}} \qquad \mathrm{i}_{mínima}<i_p<i_{máxima}$$

2° Aplicando directamente la fórmula de tasa media:

$$i_p=\frac{\sum_{j=1}^{k} i_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j}=\frac{0,06x4+0,045x6+0,0525x8}{4+6+8}=\frac{0,24+0,27+0,42}{18}=\frac{0,93}{18}$$

$\boxed{i_p=0,051667 \text{ bimestral}}$. Se debe cumplir que: $i_{mínima}<i_p<i_{máxima}$

1.4.2.3. Régimen Interés Compuesto

Hecho Real:

$C \;\rightarrow\; i_1 \;\rightarrow\; n_1$ períodos
$\qquad\;\; i_2 \;\rightarrow\; n_2$ períodos
.
.
$\qquad\;\; i_k \;\rightarrow\; n_k$ períodos

$$M_{HR}=C(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}...(1+i_k)^{n_k}=C\prod_{j=1}^{k}(1+i_j)^{n_j}$$

$$\boxed{M_{HR}=C\prod_{j=1}^{k}(1+i_j)^{n_j}} \quad (1)$$

Supuesto de equivalencia:
Se coloca el capital a la tasa media durante el tiempo total

$$C\rightarrow i_p\rightarrow n_1+n_2+...+n_k=\sum_{j=1}^{k}n_j=n$$

$$\boxed{M_{SE}=C(1+i_p)^n} \quad (2)$$

Igualando ambos Montos

(2) = (1)

$$C(1+i_p)^n=C\prod_{j=1}^{k}(1+i_j)^{n_j}$$

despejando

$$\boxed{i_p=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{k}(1+i_j)^{n_j}}-1=\sqrt[n]{(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}...(1+i_k)^{n_k}}-1}$$

Observaciones:

La Tasa Media es independiente del Capital invertido.

Ejemplo:

Suponiendo que se invierte un capital de \$100.000.- a las siguientes tasas de interés y por los bimestres indicados, en régimen de interés compuesto:

a) tasa del 6% bimestral durante 4 bimestres,
b) tasa del 4,50% bimestral durante los 6 bimestres siguientes y
c) tasa del 5,25% bimestral durante los últimos 8 bimestres,

Determinar tasa media bimestral de la operación.

Se resuelve planteando la igualdad de los montos:

$$C(1+i_p)^n = C\prod_{j=1}^{k}(1+i_j)^{n_j}$$

$$100.000(1+i_p)^{18} = 100.000x1,06^4x1,045^6x1,0525^8 \quad \text{resolviendo}$$

$$(1+i_p)^{18} = 1,06^4x1,045^6x1,0525^8$$

$$i_p = \sqrt[18]{1,06^4x1,045^6x1,0525^8} - 1$$

$$i_p = \sqrt[18]{2,475700} - 1$$

$$\boxed{i_p = 0,051652 \text{ bimestral}}$$

1.5. Análisis Funcional de Monto Simple y Monto Compuesto

1.5.1. Monto Simple

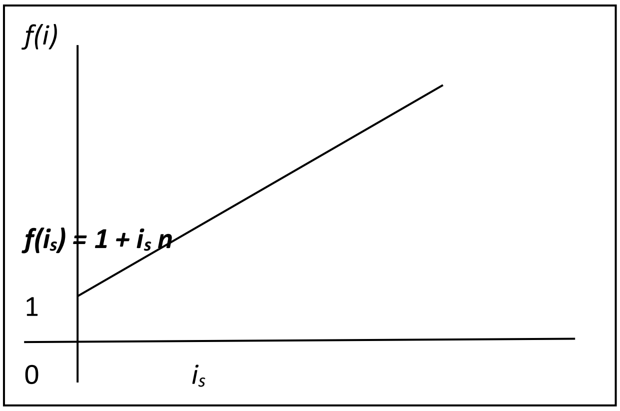
1.5.1.1. Para i_s variable y n constante

$M_s = C(1+ i_s\ n)$ C = \$1.-

$f_{(is)} = 1 + i_s\ n$

Valores Extremos

i_s	$f_{(i_s)} = 1 + i_s\ .\ n$
0	1
$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$



Derivadas

$f'_{(i_s)} = 0+1.n = n \Rightarrow$ si $n=0 \Rightarrow$ función constante

si $n>0 \Rightarrow$ función creciente

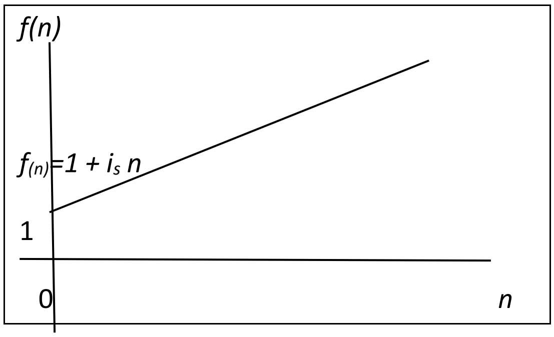
$f''_{(i_s)} = 0 \Rightarrow$ función lineal $\left(\text{ver gráfico para n} > 0\right)$

Aclaración: Para n=1 ($M_s = 1 + i_s$) la recta es la de 45° partiendo del punto (0,1)

1.5.1.2. Para n variable e i_s constante

$M_s = C(1 + i_s\, n)$ C=$1.-

$f_{(n)} = (1 + i_s\, n)$



Valores Extremos

n	$f_{(n)} = 1 + i_s\, n$
0	1
1	$1 + i_s$
$\to\infty$	$\to\infty$

Derivadas:

$f'_{(n)} = 0 + i_s .1 = i_s > 0 \;\Rightarrow$ función creciente

$f''_{(n)} = 0 \;\Rightarrow$ función lineal

1.5.2. Monto Compuesto

1.5.2.1. Para i variable y n constante.

$M = C(1 + i)^n$ si C=$1.-

$f_{(i)} = (1 + i)^n$

Valores Extremos (para n>1 que es el caso más general)

i	$f_{(i)} = (1 + i)^n$
0	1
$\to\infty$	$\to\infty$

Siendo $f_{(x)} = g^{\alpha}_{(x)} \;=>\; f'_{(x)} = \alpha \,.\, g_{(x)}^{\alpha-1} . g'_{(x)}$

Derivadas:

$f'_{(i)} = n(1+i)^{(n-1)}.1 > 0 \;\Rightarrow$ si n = 0 $f'_{(i)} = 0 \;\Rightarrow$ función constante

si n > 0 $f'_{(i)} > 0 \;\Rightarrow$ función creciente

$f''_{(i)} = n(n-1)(1+i)^{(n-2)}.1$, a saber

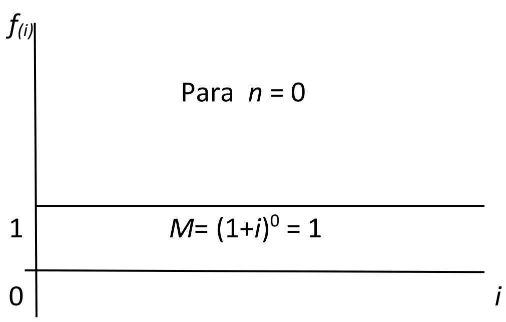
Si $n = 0 => f''_{(i)} = 0 =>$ función lineal

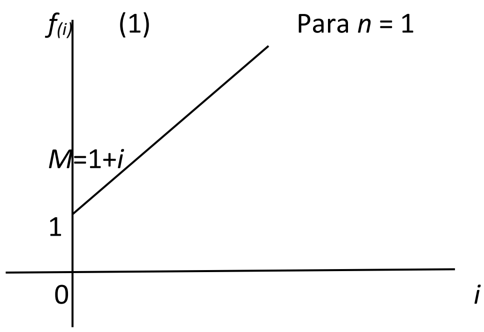
Si $n = 1 => f''_{(i)} = 0 =>$ función lineal

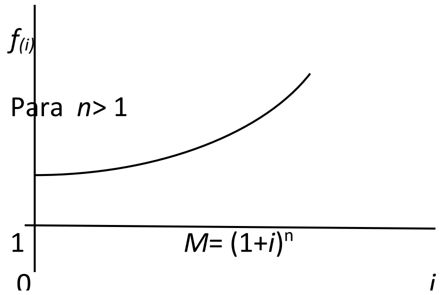
Si $n > 1 => f''_{(i)} > 0 =>$ cóncava hacia arriba

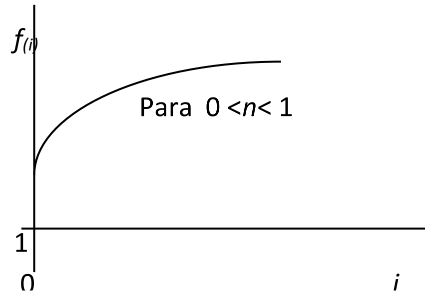
Si $0 < n < 1 => f''_{(i)} < 0 =>$ cóncava hacia abajo.

Se presentan los 4 gráficos:









(1) Recta que corresponde al ángulo de 45° (tangente = 1) partiendo del punto (0;1)

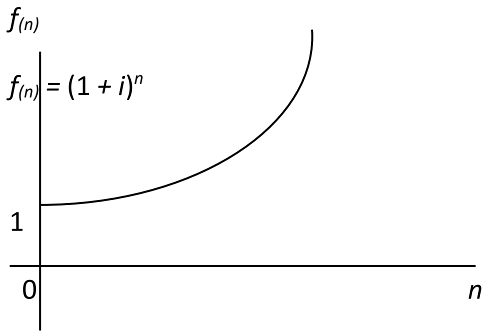
1.5.2.2. <u>Para *n* variable e *i* constante</u>

$M_c = C\ (1 + i)^n$ C= \$ 1.-

$f_{(n)} = (1 + i)^n$

<u>Valores Extremos</u>

n	$f_{(n)} = (1 + i)^n$
0	1
1	1 + i
$\to\infty$	$\to\infty$ porque (1+i) > 1



Siendo $f_{(x)} = a^x \Rightarrow f'_{(x)} = a^x \ln(a)$

Derivadas:

$f'_{(n)} = (1 + i)^n . \overbrace{\ln(1+i)}^{\delta} = \delta . (1+i)^n > 0$ => función creciente.

$f''_{(n)} = \delta . (1+i)^n . \ln(1+i) = \delta^2 (1+i)^n > 0$ => función cóncava hacia arriba

1.5.3. <u>Resumen de Montos en Régimen de Interés Compuesto</u>

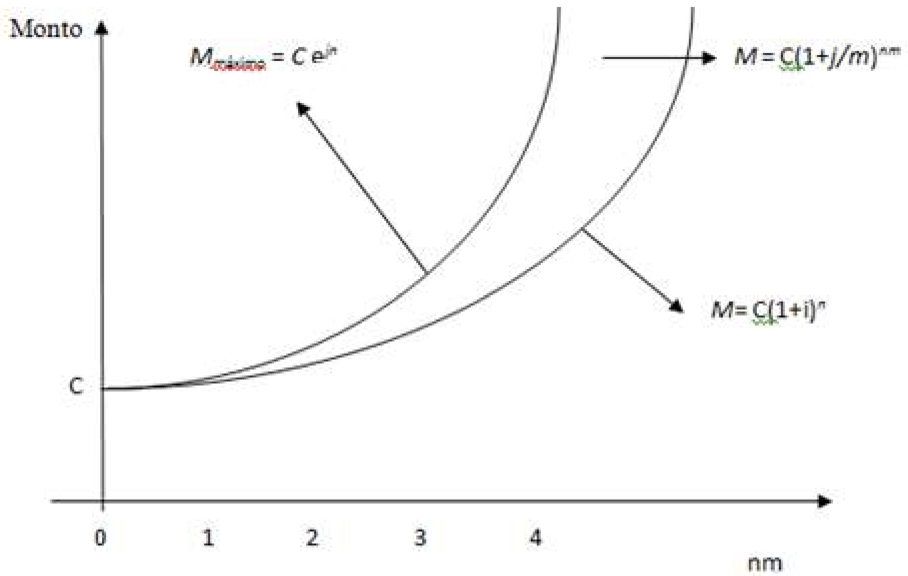
1.5.3.1. <u>Cuadro</u>

Capitalización	Tasa utilizada	Monto
Periódica (m=1)	Con tasa efectiva i	$M = C(1+i)^n$ (1)
Subperiódica ($1<m<\infty$)	Con tasa subperiódica Proporcional j/m	$M = C\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{nm}$ (2)
	Con tasa subperiódica Equivalente $i_{(m)}$	$M = C(1+i_{(m)})^{nm}$ (3)
Continua ($m\to\infty$)	Con tasa proporcional j	$\overline{M} = Ce^{jn}$ (4)
	Con tasa equivalente δ	$M = Ce^{\delta n}$ (5)

En este cuadro las tasas *i* y *j* son numéricamente iguales.

1.5.3.2. Gráficos de los Montos para “*nm*” variable

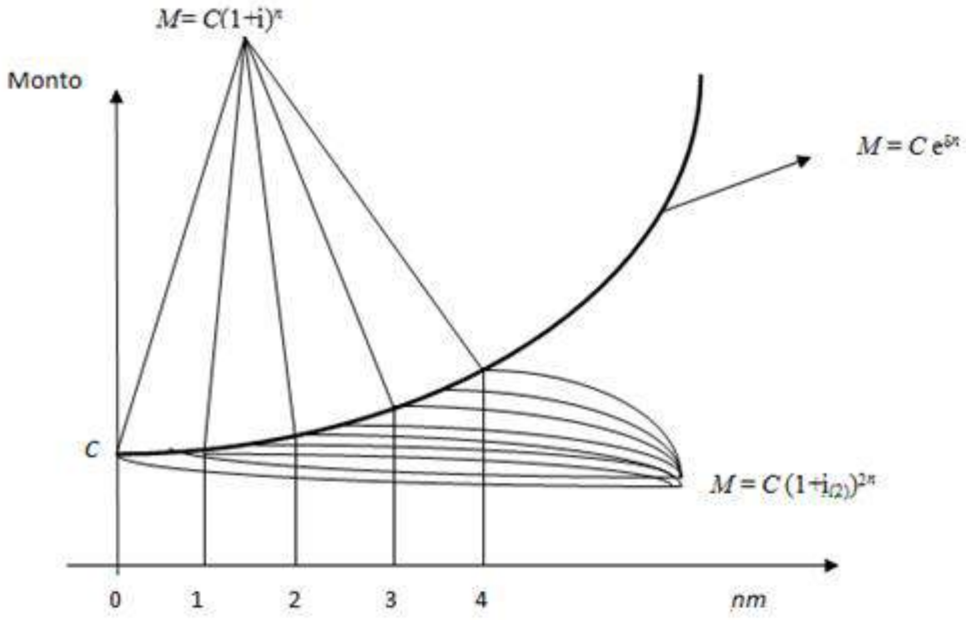
1.5.3.2.1. Gráfico de los montos trabajando con tasas proporcionales



Resumiendo (1) < (2) < (4)

Al trabajar con tasas proporcionales, manteniendo constante la tasa periódica nominal j, a medida que aumenta la frecuencia de capitalización los montos crecen, hasta obtener el monto Máximo que corresponde a la capitalización continua.

1.5.3.2.2. Gráfico de los montos trabajando con tasas equivalentes



Resumiendo (1) = (3) = (5)

$1+i = \left(1+i_{(2)}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{(2)} = \sqrt[2]{1+i} - 1} \qquad$ y $\qquad 1+i = e^{\delta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \ln(1+i)}$

Al trabajar con tasas equivalentes los montos son todos iguales. Sin embargo, al capitalizar periódicamente sólo se representan los puntos que corresponden a los valores enteros sobre eje horizontal (n). Cuando capitalizamos 2 veces en cada período (m=2) se representan el doble de puntos que en el caso anterior. Así sucesivamente se van agregando puntos sobre la curva de monto a medida que aumenta m. El trazo continuo se obtiene cuando se capitaliza continuamente con la tasa periódica nominal instantánea δ.

1.6. Comparación Analítico Algebraica de Monto Simple y Monto Compuesto

Para simplificar la comparación se considera que el capital es de \$1.- y que la tasa de interés permanece constante (se simboliza i para ambos regímenes).

$M_s = 1 + i\,n$
$\boldsymbol{M_c} = (1+i)^n$

1.6.1. Para $n = 0$

$$M_s = 1$$
$$M_c = 1$$

1.6.2. Para $n = 1$

$$M_s = 1 + i$$
$$M_c = 1 + i$$

1.6.3. Para $n > 1$

Desarrollamos el monto compuesto por el Binomio de Newton

$$(1+i)^n = \binom{n}{0} 1^n i^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} i^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} i^2 + \ldots + \binom{n}{n} 1^0 i^n$$

$$(1+i)^n = 1 + \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} i^1 + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} i^2 + \ldots + i^n$$

$$(1+i)^n = 1 + ni + \frac{n(n-1)}{2!} i^2 + \ldots + i^n$$

La sumatoria del segundo miembro tiene (n+1) términos y todos son positivos. Entonces

$$M_c = M_s + \sum positiva \;\rightarrow\; \boxed{M_c > M_s}$$

Conclusión:
Para n>1 el monto Compuesto es siempre mayor al monto Simple.

1.6.4. Para $0 < n < 1$

En este caso, el desarrollo tiene infinitos términos (es una serie, no una sumatoria) porque "n" es una fracción:

$$(1+i)^n = \binom{n}{0} 1^n i^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} i^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} i^2 + \binom{n}{3} 1^{n-3} i^3 + \ldots$$

$$(1+i)^n = 1 + \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} i^1 + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} i^3 + \ldots$$

$$(1+i)^n = 1+ni+\frac{n(n-1)}{2!}i^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}i^3+...$$

$$M_c = M_s + Serie$$

Cuando se analiza esta serie, como 0 <n< 1, n-1< 0 y n-2 < 0 entonces:

$$(1+i)^n = 1+ni-\frac{n(1-n)}{2!}i^2+\frac{n(1-n)(2-n)}{3!}i^3-...$$

$$M_c = M_s + \text{Serie de signos alternados}$$

Se demostrará que esta serie de signos alternados tiene término general decreciente:

$$t_1 = \left|\frac{n(1-n)}{2!}i^2\right| \quad t_2 = \left|\frac{n(1-n)(2-n)}{3!}i^3\right|$$

Luego

$$t_2 = \left|t_1\frac{(2-n)}{3}i\right|$$

$$\text{Siendo} \quad 0<\left|\frac{(2-n)}{3}\right|<1 \quad \text{e} \quad 0<i<1 \quad \text{entonces}$$

$$t_2 < |t_1|$$

De la misma forma se puede demostrar que

$$t_3 < |t_2|$$

$$t_4 < |t_3|$$

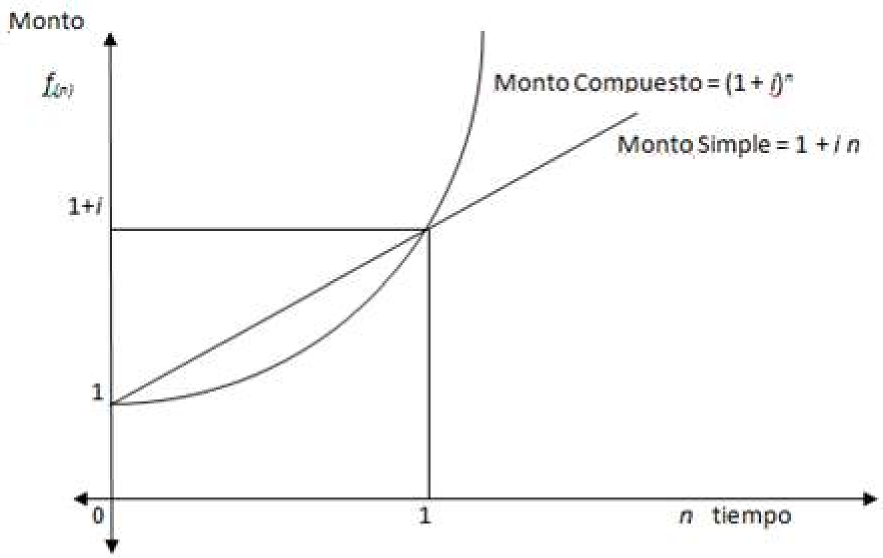
Siendo la serie de signos alternados y término general decreciente la misma converge a un número lleva el signo de su primer término, es decir, es negativa

$$M_c = M_s + \text{Serie negativa} \quad \rightarrow \quad \boxed{M_c < M_s}$$

<u>Conclusión:</u>
Para 0 <n< 1 el monto Compuesto es siempre menor al monto Simple.

1.6.5. <u>Cuadro resumen y Gráfico Conjunto de ambos Montos Simple y Compuesto</u> Siendo $i_s = i$

n	$\boxed{M_s = 1+i\ n}$		$\boxed{M_c = (1+i)^n}$
0	*1*	=	*1*
1	*1 + i*	=	*1 + i*
0 < n < 1	M_s	>	M_c
n > 1	M_s	<	M_c
	Ecuación de una recta		Ecuación exponencial



En el grafico precedente para n=0 y n=1 M_s y el M_c son iguales. Para n> 1 el M_c es siempre mayor al M_s y la diferencia entre ambos montos es mayor a medida que "n" crece. Para $n \to \infty$ entonces $(M_c - M_s) \to \infty$.

Para $0<n<1$ el monto M_s es mayor M_c y esa diferencia tiene límite que se presenta alrededor de n= ½ (el valor exacto es apenas mayor a un ½).

1.7. Tiempo fraccionario.

Se supone que un inversor coloca su dinero por 8 meses y 20 días a una cierta tasa mensual. El tiempo total de colocación se divide en dos partes: la parte entera de $[n]$ y la parte fraccionaria f:

n = 8 meses y 20 días

$n = [n] + f$ donde $0 < f < 1$

En nuestro ejemplo $[n]$ = 8 meses $0 < f = \frac{20}{30} mes < 1$

Para calcular los intereses en tiempo fraccionario existen dos convenciones:

1.7.1. Monto en Convención Lineal

En este caso se coloca el capital en régimen de interés compuesto por la parte entera del tiempo y en régimen de interés simple por la parte fraccionaria:

$$\boxed{M_{C.L.} = C(1+i)^{[n]}(1+if)}$$

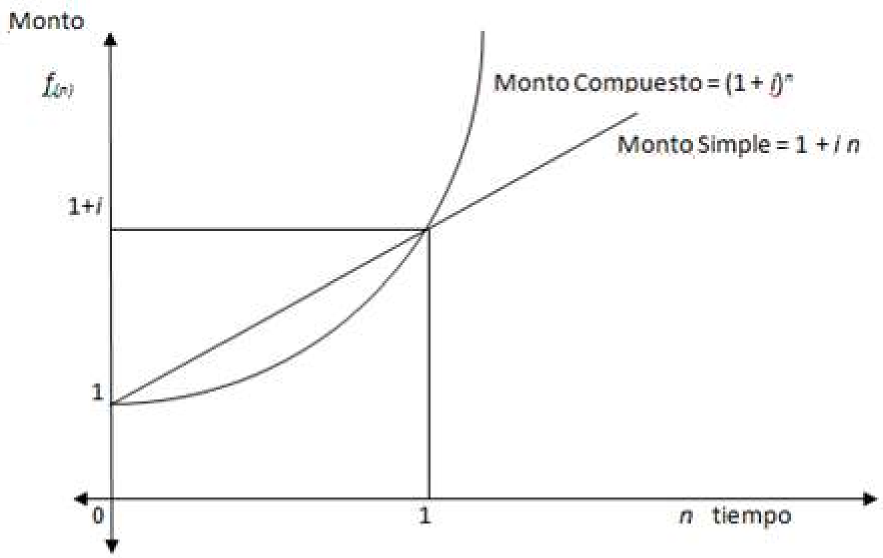
1.7.2. Monto en Convención Exponencial

En este caso se coloca el capital en régimen de interés compuesto tanto para el tiempo entero como para la parte fraccionaria:

$$\boxed{M_{C.E.} = C(1+i)^{[n]}(1+i)^{f}}$$

1.7.3. Comparación del monto en convención lineal y exponencial

Recordando el gráfico anterior



En el grafico precedente para n=0 y n=1M_s y el M_c son iguales. Para n> 1 el M_c es siempre mayor al M_s y la diferencia entre ambos montos es mayor a medida que "n" crece. Para $n \to \infty$ entonces (M_c - M_s) $\to \infty$.

Para 0<n<1 el monto M_s es mayor M_c y esa diferencia tiene límite que se presenta alrededor de n= ½ (el valor exacto es apenas mayor a un ½).

Para comparar ambas convenciones, al factor C $(1+i)^{[n]}$ no se lo tendrá en cuenta porque es común a ambas convenciones.

Recordando el punto 1.6.4.de este capítulo donde se desarrolló $(1+i)^n$ para 0<n<1 y llamando ahora con f al exponente fraccionario:

$$(1+i)^f = 1 + fi - \frac{f(1-f)}{2!} i^2 + \frac{f(1-f)(2-f)}{3!} i^3 - \ldots$$

$$(1+i)^f = 1 + fi + \text{ serie de signos alternados}$$

Este desarrollo es el de una serie de signos alternados que tiene término general decreciente y por lo tanto es negativa

$$C_E = C_L + \textit{Serie Negativa} \rightarrow \boxed{C_E < C_L}$$

Considerando el factor $C(1+i)^{[n]}$:

$$\boxed{\begin{array}{c} M_{C.L.} > M_{C.E.} \\ C(1+i)^{[n]}(1+if) > C(1+i)^{[n]}(1+i)^f \end{array}}$$

Ejemplo:

Un capital de 40.000.- se coloca durante1 año y 2 meses y 20 días al 12% anual con capitalizaciones bimestrales. Determinar el monto obtenido

a) Aplicando convención lineal
b) Aplicando convención exponencial
c) Verificar la relación entre ambos montos

a) $M_{C.L.} = C(1+i)^{[n]}(1+if) = 40.000x1,02^7\, x\left(1+0,02x\frac{20}{60}\right)$

$\boxed{M_{C.L.} = \$46.253,74}$

b) $M_{C.E.} = C(1+i)^{[n]}(1+i)^f = 40.000x1,02^7\, x1,02^{\frac{20}{60}}$

$\boxed{M_{C.E.} = \$46.251,72}$

c) $\boxed{M_{C.L.} - M_{C.E.} = \$46.253,74 - \$46.251,72 = \$2,02}$

1.7.4. Máxima diferencia exacta entre los montos de ambas convenciones.

El objetivo es ahora determinar el valor exacto de *f* (fraccionario) en el cuál se produce la máxima diferencia entre el monto en convención lineal y el monto en convención exponencial. Para ello se analiza, sin considerar la parte entera del tiempo, la función diferencia entre ambos montos:

$$g_{(f)} = (1+if) - (1+i)^f = 1 + if - (1+i)^f$$

$$g'_{(f)} = i - (1+i)^f \ln(1+i)$$

$$g'_{(f)} = i - (1+i)^f \delta$$

Igualando a 0 y despejando f_0 crítico

$$i - (1+i)^{f_0}\delta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i = (1+i)^{f_0}\delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{i}{\delta} = (1+i)^{f_0}$$

$$f_0 \ln(1+i) = \ln i - \ln\delta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f_0 = \frac{\ln i - \ln\delta}{\delta}}$$

En este valor exacto de f (valor apenas mayor a ½) se encuentra la máxima diferencia entre los dos montos. Se demostrará que, efectivamente, esta función para el "*f*" encontrado, tiene derivada segunda negativa.

Siendo

$$g'_{(f)} = i - \delta(1+i)^f$$

$$g''_{(f)} = -\delta(1+i)^f \ln(1+i) = -\delta^2(1+i)^f < 0 \quad \text{en particular para } 0 < f_0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{existe un máximo}$$

y al reemplazarlo en la diferencia de los montos se encuentra la diferencia máxima.

En el ejemplo:

$$\boxed{f = \frac{\ln i - \ln\delta}{\delta}} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{\ln 0,02 - \ln 0,0198026}{0,0198026} = 0,500825$$

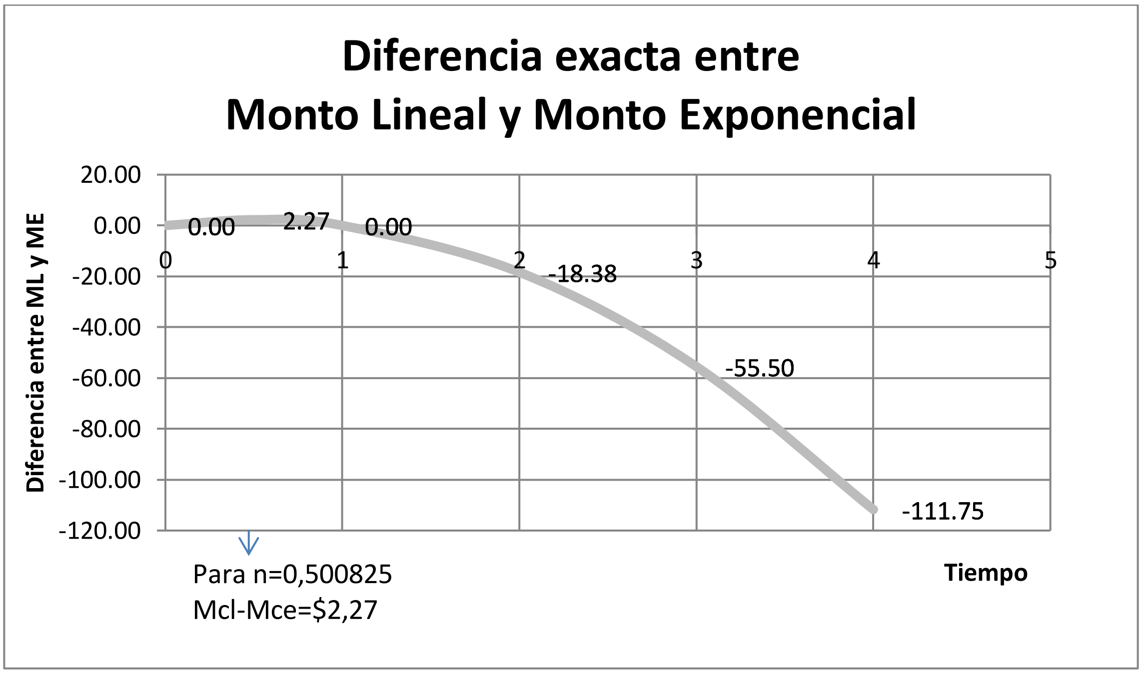
Al reemplazar numéricamente y realizar el cálculo se verifica que siempre "f_0" es apenas mayor a ½. Reemplazando este valor "f_0" en la diferencia de los montos de ambas convenciones se encuentra dicho máximo:

$$M_{C.L.} - M_{C.E.} = 40.000x1,02^7\left[\left(1 - 0,02x0,500825\right) - 1,02^{0,500825}\right]$$

$$M_{C.L.} - M_{C.E.} = \$2,2747$$

A continuación se observa el cuadro y el gráfico de la función diferencia entre monto en convención Lineal y monto en convención Exponencial del ejemplo dado:

"n"	MCL	MCE	Diferencia
0	45947,43	45947,43	0,00
0,500825	46407,66	46405,38	2,2747
1	46866,38	46866,38	0,00
2	47785,32	47803,70	-18,38
3	48704,27	48759,78	-55,50
4	49623,22	49734,97	-111,75
5	50542,17	50729,67	-187,50
6	51461,12	51744,27	-283,15
7	52380,07	52779,15	-399,08



1.8. Aplicación

Ya desde el año 1995, en que ingresé como titular de Matemática Financiera a la Universidad del Centro Educativo Latinoamericano (U.C.E.L.) incluí en la práctica un ejemplo sobre cálculo de intereses en descubierto en una cuenta corriente bancaria a través de numerales, que aquí presento.

Ejemplo:

Se recibe el siguiente resumen de operaciones correspondiente al mes de octubre de una cuenta corriente bancaria. Determinar el importe de la nota de débito que el banco debe emitir en concepto de intereses por el mes referido, sabiendo que la tasa de interés anual vigente es del 44%. Emplear el procedimiento de numerales.

Fecha	Débito	Crédito	Saldo
29-sep			-174.000
01-oct	206.000		-380.000
07-oct		450.000	70.000
10-oct	120.000		-50.000
10-oct		320.000	270.000
17-oct	430.000		-160.000
25-oct		210.000	50.000
28-oct	185.000		-135.000
01-nov	-75.000		-210.000

Para calcular los numerales se toman los saldos al final de cada día.

Recordando que el interés en régimen de interés simple es:

$$I = Ci_s n$$

Y teniendo en cuenta que cada saldo diario es el capital (C_j) y el número de días que cada saldo negativo estuvo vigente es el tiempo (n_j) se calcula el total de numerales como

$$\text{Total de numerales} = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_j \mathrm{n}_j$$

Y multiplicando el total de numerales por la tasa de interés se obtienen los intereses a cobrar en la nota de débito:

$$\text{Ints Nota de Débito} = \mathrm{i}_s \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_j \mathrm{n}_j$$

Fecha	Saldo Cj	Días (nj)	Numeral Cj.nj
29-sep	-174.000		
01-oct	-380.000	6	-2.280.000
07-oct	70.000	0	0
10-oct	270.000	0	0
17-oct	-160.000	8	-1.280.000
25-oct	50.000	0	0
28-oct	-135.000	4	-540.000
03-nov	-210.000		0
		Numerales…	-4.100.000

De donde los intereses cobrados en la nota de débito son:

$$\text{Ints Nota de Débito} = \mathrm{i}_s \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_j \mathrm{n}_j = \frac{0,44}{365} 4.100.000$$

$$\boxed{\text{Ints Nota de Débito} = 4.942,47}$$

1.9. EJERCITACIÓN CAPÍTULO I

1.- ¿Qué interés simple produce un capital de $10.000.- en 90 días al 9,50% anual en régimen de interés simple? Los cálculos deben efectuarse empleando tasa anual, mensual y diaria, considerando año calendario.

a) $I_s = Ci_s n = 10.000.x0,095x\frac{90}{365} = \boxed{234,25}$

b) $I_s = Ci_s n = 10.000.x\frac{\frac{0,095}{365}}{30}x\frac{90}{30} = \boxed{234,25}$

c) $I_s = Ci_s n = 10.000.x\frac{0,095}{365}x90 = \boxed{234,25}$

2.- Se colocó un capital de $20.000.- a interés simple durante 120 días. Dicho capital fue invertido en régimen de interés simple al 0,80% mensual el primer mes y al 0,875% en el segundo mes. El monto retirado fue de $20.515.-. ¿Cuál fue la tasa anual a la que se colocó el capital los 60 días restantes? Trabajar con año comercial.

$$M = C + I_1 + I_2 + I_3 = C + Ci_1n_1 + Ci_2n_2 + Ci_3n_3$$

$$20.515 = 20.000\left(1 + 0,008x1 + 0,00875x1 + i_3x\frac{2}{12}\right)$$

$$\boxed{i_3 = 0,054 \text{ anual}}$$

3.- Se recibe el siguiente resumen de operaciones correspondiente al mes de marzo de una cuenta corriente bancaria. Determinar el importe de la nota de débito que el banco debe emitir en concepto de intereses por el mes referido, sabiendo que la tasa de interés anual vigente es del 29,20%. Emplear el procedimiento de numerales.

FECHA	DÉBITO	CRÉDITO	SALDO
28-02			32.600.-
02-03	50.000.-		(17.400.-)
07-03	25.000.-		(42.400.-)
08-03		60.000.-	17.600.-
10-03	96.000.-		(78.400.-)
14-03	23.000.-		(101.400.-)
17-03		57.600.-	(43.800.-)
21-03		68.000.-	24.200.-
24-03	70.000.-		(45.800.-)
24-03		12.000	(33.800.-)
26-03	60.000.-		(93.800.-)
02-04		120.000	26.200.-

Para calcular los numerales se toman los saldos al final de cada día. Recordando que

$$I = Ci_s n$$

Y teniendo en cuenta que cada saldo diario es el capital (Cj) y el número de días que cada saldo negativo estuvo vigente es el tiempo (nj) se calcula el total de numerales como

$$\text{Total de numerales} = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_j \mathrm{n}_j$$

Fecha	Saldo (Cj)	Días (nj)	Numeral (Cj.nj)
28-feb	32.600	-	
02-mar	-17.400	5	-87.000
07-mar	-42.400	1	-42.400
08-mar	17.600	-	-
10-mar	-78.400	4	-313.600
14-mar	-101.400	3	-304.200
17-mar	-43.800	4	-175.200
21-mar	24.200	-	-
24-mar	-33.800	2	-67.600
26-mar	-93.800	6	-562.800
02-abr	26.200		-
		Numerales.	-1.552.800

De donde los intereses cobrados en la nota de débito son:

$$\text{Ints Nota de Débito} = \mathrm{i}_s \sum_{j=1}^{k} \mathrm{C}_j \mathrm{n}_j = \frac{0,292}{365} 1.552.800$$

$$\boxed{\text{Ints Nota de Débito} = 1.242,24}$$

4.- ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un capital se transforme en 3 veces el inicial si ha sido colocado al 20% anual en régimen de interés simple? Operar con año comercial.

$$M = 3C = C\left(1 + i_s n\right)$$

$$3C = C(1 + 0,20xn)$$

$$\boxed{n = 10 \text{ años}}$$

5.- Determinar el monto producido por un capital de \$9.000.- que fue colocado al 8,40% anual durante 1 año y 9 meses en los siguientes supuestos:

a) En régimen de interés simple.

b) En régimen de interés compuesto con capitalización anual

c) En régimen de interés compuesto con capitalización trimestral a la respectiva tasa proporcional.

d) En régimen de interés compuesto con capitalización mensual a la respectiva tasa proporcional.

e) En régimen de interés compuesto con capitalización continua.

a) $M_s = C\left(1 + i_s n\right) = 9.000\left(1 + 0,084x\dfrac{21}{12}\right) = \boxed{10.323}$

b) $M = C\left(1 + i\right)^n = 9.000\left(1 + 0,084\right)^{\frac{21}{12}} = \boxed{10.364,39}$

c) $M = C\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{nm} = 9.000\left(1 + \dfrac{0,084}{4}\right)^{\frac{21}{12}x4} = \boxed{10.409,33}$

d) $M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} = 9.000\left(1+\frac{0,084}{12}\right)^{\frac{21}{12}x12} = \boxed{10.419,85}$

e) $\overline{M} = Ce^{jn} = 9.000\ e^{0,084x\frac{21}{12}} = \boxed{10.425,18}$

6.- Un capital de \$15.000.- se coloca al 0,60% mensual con capitalización mensual durante 2 años. Determinar:

a) El monto obtenido.

b) De qué importe sería el monto si al cumplirse un año se depositan \$ 10.000.- más.

c) ¿Cuál sería el monto si en el inciso b), además de depositar \$ 10.000.- la tasa se incrementara al 0,70% mensual?

a) $M = C(1+i)^n = 15.000x1,006^{24} = \boxed{17.315,81}$

b) $M = \left(15.000x1.006^{12} + 10.000\right)1,006^{12} = \boxed{28.060,05}$

c) $M = \left(15.000x1.006^{12} + 10.000\right)1,007^{12} = \boxed{28.396,60}$

7.- Un capital es colocado durante 2 años y 4 meses a la tasa del 1,80% bimestral capitalizando bimestralmente. Al año se efectúa un retiro de \$6.000.- y a los 2 meses se modifica la tasa incrementándose en medio punto. Se recibió un monto de \$9.103,24.

a) Determinar el capital inicial

b) ¿Cuánto se habría recibido después de los 2 años y 4 meses si no se retiraba dicha suma?

c) ¿Qué suma de intereses no percibió el inversor por haber efectuado el retiro?

a)
$$9.103,24 = \left(Cx1,018^6 - 6.000\right)x1,018^1x1,023^7$$
$$\boxed{C = 12.243,17}$$

b)
$$M = 12.243,17x1,018^7x1,023^7$$
$$\boxed{M = 16.265,14}$$

c) $I = M - C = 6.000x1,018^1x1,023^7 - 6.000 = \boxed{1.161,90}$

Otra forma: $I = 16.265,14 - 9.103,24 - 6.000 = \boxed{1.161,90}$

8.- Un capital de \$7.500.- es colocado durante 1 año a la tasa del 30% anual con capitalización mensual y produce un monto igual a los intereses que produciría si se lo colocara a otra tasa durante 2 años. Averiguar esta tasa de interés nominal anual con capitalización bimestral. Verificar.

$$M_1 = I_2$$

$$7.500\left(1+\frac{0,30}{12}\right)^{1x12} = 7.500\left[\left(1+\frac{j_{(6)}}{6}\right)^{2x6} - 1\right]$$

$$\boxed{j_{(6)} = 0,441615 \text{ anual capitalizando bimestralmente}}$$

Verificación: $M_1 = I_2 = 10.086,67$

9.- Un capital de $10.000.- se colocó al 1,50% mensual con capitalización mensual. Después de 2 años se obtiene un capital final de $11.651,70 aclarándose que se retiró cierta suma 10 meses antes de su vencimiento. ¿Cuál fue la suma retirada?

$$11.651,70 = \left(10.000x1,015^{14} - R\right)x1,015^{10}$$

$$\boxed{R = 2.277,67}$$

10.- Una persona debe pagar $10.000.- a 6 meses y $15.000.- a 9 meses. Hoy se pagan $5.000.- y el resto desea cancelarlo a 1 año. ¿Cuánto tendrá que pagar al momento de cancelación trabajando con una tasa del 0,80% mensual?

Primera solución: valuando la operación al momento 12:

$$10.000x1,008^{6} + 15.000x1,008^{3} = 5.000x1,008^{12} + R$$

$$\boxed{R = 20.350,90}$$

Segunda solución: valuando la operación al momento 0:

$10.000x1,008^{-6} + 15.000x1,008^{-9} = 5.000 + Rx1,008^{-12}$ si multiplico ambos miembros por $1,008^{12}$ nos queda la ecuación anterior y $\boxed{R = 20.350,90}$

Aclaración: el mismo resultado se obtendría valuando la operación en otro momento, siempre que se realicen correctamente las operaciones financieras de contemporización.

11.- Determinar el depósito inicial que una persona realiza en una institución bancaria con la condición que dentro de 6, 12 y 18 meses a partir del momento de su colocación pueda efectuar 3 retiros iguales de $ 15.000.- cada uno, quedando en cero el saldo de la cuenta y sabiendo que la institución aplica el 9,60% anual capitalizando bimestralmente.

$$0 = \left[\left(Cx1,016^{3} - 15.000\right)x1,016^{3} - 15.000\right]x1,016^{3} - 15.000$$

$$\boxed{C = 40.942,89}$$

12.- Una institución enuncia que paga el 4% cada 30 días. Calcular (año calendario):

a) La tasa para 14 días equivalente.

b) Las tasas nominales convertibles y efectivas anuales para ambos supuestos.

$i_{(m)}$ tasa subperiódica equivalente

es proporcional a la tasa periódica nominal $j_{(m)}$

$$\boxed{i_{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}} \quad \text{y} \quad \boxed{j_{(m)} = i_{(m)} x m}$$

es equivalente a la tasa periódica efectiva i

$$1+i = \left(1+i_{(m)}\right)^{m}$$

$$i = \left(1+i_{(m)}\right)^{m} - 1 \qquad \boxed{i_{(m)} = \sqrt[m]{1+i} - 1}$$

m	$\left(1+i_{(m)}\right)^{m} = 1{,}04^{\frac{365}{30}}$	$j_{(m)} = i_{(m)} x m$	$i = \left(1+i_{(m)}\right)^{m} - 1$
$\frac{365}{30}$	0,04	$j_{\left(\frac{365}{30}\right)} = 0{,}486667$	$i = 0{,}611532$
$\frac{365}{14}$	$i_{\left(\frac{365}{14}\right)} = 1{,}04^{\frac{14}{30}} - 1 = 0{,}0184715$	$j_{\left(\frac{365}{14}\right)} = 0{,}481579$	$i = 0{,}611532$

13.- Para efectuar un depósito a 30 días se puede optar entre los siguientes ofrecimientos:

a) Institución A: 8% anual efectivo.

b) Institución B: 6,90% anual nominal capitalizando cada 30 días.

c) Institución C: 7,20% anual con capitalización cada 45 días.

Determinar las tasas reales a 30 días de acuerdo con las normas del B.C.R.A. e indicar el orden de preferencia.

a) $i_{(m)} = \sqrt[m]{1+i} - 1 = \sqrt[\frac{365}{30}]{1{,}08} - 1 = \boxed{0{,}0063456}$ para 30 días

b) $i_{(m)} = \dfrac{j_{(m)}}{m} = \dfrac{0{,}069}{\frac{365}{30}} = \boxed{0{,}005671}$ para 30 días

c) $i_{(m)} = \left(1 + \dfrac{j_{(k)}}{k}\right)^{\frac{k}{m}} - 1 = \left(1 + \dfrac{0{,}072}{\frac{365}{45}}\right)^{\frac{365}{45} x \frac{30}{365}} - 1 = \boxed{0{,}005909}$ para 30 días

Orden de preferencia: a), c) y b)

14.- Una persona desea solicitar un préstamo y le ofrecen las siguientes alternativas:

a) el 7,10% anual cada 30 días.

b) el 8,90% anual cada 51 días.

c) el 8,70% anual cada 45 días.

Determinar la alternativa más conveniente de acuerdo con las normas del BCRA.

a) $$i=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0{,}071}{\frac{365}{30}}\right)^{\frac{365}{30}}-1=\boxed{0{,}073360\text{ anual efectiva}}$$

b) $$i=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0{,}089}{\frac{365}{51}}\right)^{\frac{365}{51}}-1=\boxed{0{,}092481\text{ anual efectiva}}$$

c) $$i=\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{0{,}087}{\frac{365}{45}}\right)^{\frac{365}{45}}-1=\boxed{0{,}090391\text{ anual efectiva}}$$

Orden de preferencia: a), c) y b)

15.- Se coloca un capital durante 2 años al 26% anual de interés con capitalización continua y al mismo tiempo se coloca otro capital igual a la misma tasa y por el mismo período a interés compuesto capitalizando anualmente. Se sabe que el interés de una de las colocaciones supera al obtenido en la otra en la suma de \$1.048,14. Averiguar el importe de dicho capital.

$$M_{continuo}-M_{compuesto}=1.048{,}14$$

$$C\left(e^{0{,}26x2}-1{,}26^2\right)=1.048{,}14$$

$$\boxed{C=11.099{,}95}$$

16.- Dada la tasa nominal anual del 50% determinar la tasa efectiva anual considerando capitalización:

a) anual,
b) semestral,
c) cuatrimestral,
d) bimestral,
e) mensual y
f) continua.

Operar con año comercial

Siendo j = 0,50 anual nominal constante se opera en un enfoque de Proporcionalidad. Partiendo de los montos con capitalización periódica y subperiódica (considerando C=\$1.- y n=1 período)

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m \quad \text{y despejando} \quad i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$$

a) $$i=\left(1+\frac{0{,}50}{1}\right)^1-1=\boxed{0{,}50\text{ anual efectiva}}$$

b) $$i=\left(1+\frac{0{,}50}{2}\right)^2-1=\boxed{0{,}5625\text{ anual efectiva}}$$

c) $$i=\left(1+\frac{0{,}50}{3}\right)^3-1=\boxed{0{,}587963\text{ anual efectiva}}$$

d) $i=\left(1+\dfrac{0,50}{6}\right)^{6}-1=\boxed{0,616489 \text{ anual efectiva}}$

e) $i=\left(1+\dfrac{0,50}{12}\right)^{12}-1=\boxed{0,632094 \text{ anual efectiva}}$

f) Partiendo del monto con capitalización periódica y continua (considerando C=$1.- y n=1)

$1+\bar{i}=e^{j}$ y despejando $\bar{i}=e^{j}-1=e^{0,50}-1=\boxed{0,648721 \text{ anual efectiva máxima}}$

En el Enfoque de Proporcionalidad, j constante, a medida que aumenta la frecuencia de capitalización las tasas periódicas efectivas crecen.

17.- Dada la tasa efectiva anual del 30% determinar la tasa anual nominal convertible con capitalización:
a) anual,
b) semestral,
c) trimestral,
d) bimestral,
e) mensual y
f) continua.
Operar con año comercial.

Siendo i = 0,30 anual efectiva constante se opera en un enfoque de Equivalencia. Igualando los montos con capitalización periódica y subperiódica (considerando C=$1.- y n=1 período)

$1+i=\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}$ y despejando $j_{(m)}=\left(\sqrt[m]{1+i}-1\right)m$

a) $j_{(1)}=\left(\sqrt[1]{1,30}-1\right)1=\boxed{0,30 \text{ anual nominal y efectiva}}$

b) $j_{(2)}=\left(\sqrt[2]{1,30}-1\right)2=\boxed{0,280351 \text{ anual nominal capitalizando semestralmente}}$

c) $j_{(4)}=\left(\sqrt[4]{1,30}-1\right)4=\boxed{0,271160 \text{ anual nominal capitalizando trimestralmente}}$

d) $j_{(6)}=\left(\sqrt[6]{1,30}-1\right)6=\boxed{0,268185 \text{ anual nominal capitalizando bimestralmente}}$

e) $j_{(12)}=\left(\sqrt[12]{1,30}-1\right)12=\boxed{0,265254 \text{ anual nominal capitalizando mensualmente}}$

Igualando los montos con capitalización periódica y continua (considerando C=$1.- y n=1 período)

f) $1+i=e^{\delta}$ entonces $\delta=\ln(1+i)=\ln(1,30)=\boxed{0,262364 \text{ anual nominal cap/ continuamente}}$

En el enfoque de Equivalencia, i constante, a medida que aumenta la frecuencia de capitalización las tasas nominales convertibles decrecen.

18.- La tasa periódica anual del 21,80% tiene una tasa subperiódica equivalente del 1,90905% a una determinada frecuencia de capitalización. Determinar cada cuánto tiempo capitaliza dicha tasa subperiódica operando con año calendario.

Al decir que la tasa subperiódica es equivalente debemos plantear la igualdad de los montos:

$$1+i=\left(1+i_{(m)}\right)^{m}$$

$1,218=1,0190905^{m}$ despejando

$$m=\frac{\log(1,218)}{\log(1,0190905)}=10,428572$$

$$m=\frac{365}{x}=10,428572 \qquad \boxed{x=\frac{365}{10,428572}=35 \text{ días}}$$

19.- Determinar las tasas efectivas anuales de costo de los ejercicios:

a) 1.-

b) 2.- (respuesta)

c) 7.- a)

a) $\left(1+i\right)^{n}=1+i_{s}n \qquad \left(1+i\right)^{\frac{90}{365}}=1+0,095x\frac{90}{365}$

$$i=\sqrt[\frac{90}{365}]{1+0,095x\frac{90}{365}}-1=\boxed{0,098455 \text{ anual efectiva}}$$

b) $\left(1+i\right)^{n}=1+i_{s}n \qquad \left(1+i\right)^{\frac{2}{12}}=1+0,054x\frac{2}{12}$

$$i=\sqrt[\frac{1}{6}]{1+0,054x\frac{1}{6}}-1=\boxed{0,0552297 \text{ anual efectiva}}$$

c) $\left(1+i\right)^{n}=\left(1+i_{(m)}\right)^{nm}$

$$i=\left(1+i_{(m)}\right)^{m}-1=1,018^{6}-1=\boxed{0,112978 \text{ anual efectiva}}$$

20.- Un inversor debe efectuar una operación a 50 días de plazo y puede optar entre:

a) Banco A: ofrece el 3,50% cada 45 días.

b) Banco B: ofrece la tasa de interés del 26,50% anual cada 50 días.

c) Banco C: ofrece el 30% anual efectivo.

d) Banco D: ofrece el 31% anual con capitalización continua.

Determinar las tasas reales a 50 días de cada ofrecimiento operando con año calendario e indicar el orden de preferencia.

a) $\left(1+i_{(m)}\right)^{m}=\left(1+i_{(k)}\right)^{k} \qquad i_{\left(\frac{365}{50}\right)}=\left(1,035\right)^{\frac{365}{45}x\frac{50}{365}}-1=\boxed{0,038964 \text{ para 50 días}}$

b) $i_{(m)}=\frac{j_{(m)}}{m}=\frac{0,265}{\frac{365}{50}}=\boxed{0,036301 \text{ para 50 días}}$

c) $1+i=\left(1+i_{(m)}\right)^{m} \qquad i_{\left(\frac{365}{50}\right)}=\sqrt[\frac{365}{50}]{1,30}-1=\boxed{0,036594 \text{ para 50 días}}$

d) $\left(1+i_{\left(\frac{365}{50}\right)}\right)^{\frac{365}{50}}=e^{\delta} \qquad i_{\left(\frac{365}{50}\right)}=\sqrt[\frac{365}{50}]{e^{0,31}}-1=\boxed{0,043380 \text{ para 50 días}}$

Orden de preferencia: d), a), c) y b)

21.- Dada la tasa de interés nominal anual del 60% que capitaliza cada 55 días hallar trabajando con año calendario:

a) La tasa instantánea anual de interés.

b) La tasa efectiva anual de interés.

c) La tasa de interés para 55 días.

d) La tasa nominal anual de interés que capitaliza cada 70 días.

a) $e^{\delta} = \left(1 + \dfrac{j_{\left(\frac{365}{55}\right)}}{\frac{365}{55}}\right)^{\frac{365}{55}} \qquad \delta = \ln\left(1 + \dfrac{0,60}{\frac{365}{55}}\right)^{\frac{365}{55}} = \boxed{0,574408 \text{ anual nominal}}$

b) $(1+i) = \left(1 + \dfrac{j_{\left(\frac{365}{55}\right)}}{\frac{365}{55}}\right)^{\frac{365}{55}} \qquad \mathrm{i} = \left(1 + \dfrac{0,60}{\frac{365}{55}}\right)^{\frac{365}{55}} - 1 = \boxed{0,776079 \text{ anual efectiva}}$

c) $\mathrm{i}_{\left(\frac{365}{55}\right)} = \dfrac{j_{\left(\frac{365}{55}\right)}}{\frac{365}{55}} = \boxed{0,090411 \text{ para 55 días}}$

d) $\left(1 + \dfrac{j_{\left(\frac{365}{70}\right)}}{\frac{365}{70}}\right)^{\frac{365}{70}} = \left(1 + \dfrac{j_{\left(\frac{365}{55}\right)}}{\frac{365}{55}}\right)^{\frac{365}{55}} \qquad j_{\left(\frac{365}{70}\right)} = \left[\left(1 + \dfrac{0,60}{\frac{365}{55}}\right)^{\frac{70}{55}} - 1\right] x \dfrac{365}{70} = \boxed{0,607241 \text{ anual nom c/70 ds}}$

22.- Se coloca un capital de \$ 19.000.- durante 3 trimestres y con cláusula de ajuste por inflación obteniendo un monto de \$21.000.-. Calcular:

a) La tasa real mensual de la operación sabiendo que las tasas de inflación trimestrales fueron: 4%, 3% y 2,40%.

b) De no haberse pactado cláusula de ajuste, ¿con qué tasa de interés nominal anual con capitalización trimestral se obtendría el mismo rendimiento? Aplicar año comercial.

a) $M_{c/aj} = Cx\prod_{j=1}^{n}\left(1+\rho_j\right)x\left(1+i_r\right)^n$

$21.000 = 19.000x1,04x1,03x1,024x\left(1+i_r\right)^9$

$\boxed{i_r = 0,000843 \text{ mensual}}$

b) $M_{s/aj} = Cx\left(1 + \dfrac{j_{(m)ap}}{m}\right)^{nm}$

$21.000 = 19.000\left(1 + \dfrac{j_{(m)ap}}{4}\right)^{\frac{9}{12}x4}$

$\boxed{j_{(m)ap} = 0,135697 \text{ anual nominal capitalizando trimestralmente}}$

23.- Se conocen los siguientes índices de precios:

12/X1	100
09/X2	109,3685273

a) ¿Cuál fue la desvalorización monetaria que sufrió la moneda en dicho lapso?

b) ¿Qué tasa de inflación equivalente resulta?

c) ¿Qué tasa real por 9 meses obtuvo una inversión que se realizó el 1° de enero del año X2 a la tasa nominal aparente del 12% anual con capitalización mensual operando con año comercial?

d) ¿Qué tasa aparente mensual con capitalización mensual debió enunciarse para obtener un rendimiento real del 0,80% mensual?

a) $I_0 = I_1(1-\lambda) \qquad \lambda = \dfrac{109,3685273 - 100}{109,3685273} = \boxed{0,08566 \text{ en 9 meses}}$

b) $I_1 = I_0(1+\rho) \qquad \rho = \dfrac{109,3685273 - 100}{100} = \boxed{0,093685273 \text{ en 9 meses}}$

$$c)\ \left(1+\frac{j_{(m)ap}}{m}\right)^{nm} = (1+\rho)^n (1+i_r)^n$$

$$i_r = \left[\frac{\left(1+\dfrac{0,12}{12}\right)^{\frac{9}{12}x12}}{1,093685273}\right] - 1 = \boxed{0}$$

$$\text{d)}\ \left(1+i_{ap}\right)^n = (1+\rho)^n (1+i_r)^n$$

$$i_{ap} = \sqrt[9]{1,093685273^1 x 1,008^9} - 1 = \boxed{0,018080\ mensual}$$

24.- Se conocen los siguientes índices de precios:

Isetiembre 'X1 = 75,854 Iabril 'X2 = 84,655

Se realiza una colocación en octubre de 20X1 por 7 meses a una tasa del 30% nominal anual con capitalización mensual, aplicada sobre capital histórico. Hallar:

a) La tasa de inflación del período.
b) La tasa real mensual de la colocación.
c) La tasa aparente efectiva anual que hace nula la tasa real.

a) $I_1 = I_0(1+\rho) \qquad \rho = \dfrac{84,655 - 75,854}{75,854} = \boxed{0,116025 \text{ en 7 meses}}$

$$\text{b)}\ \left(1+\frac{j(m)_{ap}}{m}\right)^{nm} = (1+\rho)^n (1+i_r)^n \qquad \left(1+\frac{0,30}{12}\right)^7 = 1,116025(1+i_r)^7$$

$$\boxed{i_r = 0,009051 \text{ mensual efectiva}}$$

$$\text{c)}\ \left(1+i_{ap}\right)^n = (1+\rho)^n (1+i_r)^n \qquad \left(1+i_{ap}\right)^{\frac{7}{12}} = 1,116025x1$$

$$\boxed{i_{ap} = 0,207054 \text{ anual efectiva}}$$

25.- Si la tasa aparente enunciada por una institución fue del 8,30% anual con capitalizaciones mensuales y la tasa de inflación fue del 0,75% promedio mensual, ¿qué tasa real mensual resultó en la operación? ¿Qué tasa anual con capitalizaciones mensuales debería haber enunciado la institución para que la tasa real resultara del 5% anual con capitalización mensual?

a) $$\left(1+\frac{j_{(m)ap}}{m}\right)^{nm}=(1+\rho)^n(1+i_r)^n \qquad \left(1+\frac{0,083}{12}\right)^1=(1,0075)^1(1+i_r)^1$$

$$i_r=\left[\frac{\left(1+\frac{0,083}{12}\right)^{\frac{1}{12}12}}{1,0075^1}\right]-1=\boxed{-0,000579 \text{ mensual}}$$

b) $$\left(1+\frac{j_{(m)ap}}{m}\right)^{nm}=(1+\rho)^n\left(1+\frac{j_{(m)r}}{m}\right)^{nm} \qquad \left(1+\frac{j_{(m)ap}}{12}\right)^1=(1,0075)^1\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^1$$

$$j_{(m)ap}=\left((1,0075)^1\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^1-1\right)x12=\boxed{0,140375 \text{ anual capitalizando mensualmente}}$$

26.- Se conocen las siguientes tasas mensuales de inflación: φ1=0,03; φ2=0,05; φ3=0,025. Durante ese período se efectuó un depósito a una tasa nominal anual del 36% con capitalización trimestral.

a) ¿Cuál fue la tasa real mensual?

b) ¿Qué tasa aparente anual con capitalización trimestral debería enunciarse para obtener un rendimiento cero?

c) Si la tasa aparente anual capitalizando trimestralmente fuera del 22%, ¿Cuál sería la tasa real trimestral?

a) $$\left(1+\frac{j_{(m)ap}}{m}\right)^{m}=(1+\rho_1)^{n_1}(1+\rho_2)^{n_2}(1+\rho_3)^{n_3}(1+i_r)^n$$

$$\left(1+\frac{0,36}{4}\right)^1=1,03x1,05x1,025x(1+i_r)^3$$

$$\boxed{i_r=-0,005606 \text{ real mensual}}$$

b) $$\left(1+\frac{j_{(m)ap}}{4}\right)^{1}=(1+\rho_1)^{n_1}(1+\rho_2)^{n_2}(1+\rho_3)^{n_3}(1+0)^n$$

$$\left(1+\frac{j_{(m)ap}}{4}\right)^{1}=1,03x1,05x1,025$$

$$\boxed{j_{(m)ap}=0,43415 \text{ anual con cap. timestral}}$$

c) $\left(1+\frac{j_{(m)ap}}{m}\right)^{m}=\left(1+\rho_1\right)^{n_1}\left(1+\rho_2\right)^{n_2}\left(1+\rho_3\right)^{n_3}\left(1+i_r\right)^{n}$

$$\left(1+\frac{0,22}{4}\right)^{1}=1,03x1,05x1,025x\left(1+i_r\right)^{1}$$

$$\boxed{i_r=-0,048296 \text{ real trimestral}}$$

27.- Un capital se divide en las siguientes parcelas:

C1= \$ 10.000.- al 2% mensual
C2= \$ 15.000.- al 2,50% mensual
C3= \$ 18.000.- al 1,90% mensual

La colocación es por 4 meses capitalizando mensualmente en todos los casos.
a) Determinar la tasa promedio mensual.
b) Suponiendo que la información precedente se mantiene excepto la tasa de la tercera parcela, calcularla teniendo en cuenta una tasa media del 2,20% mensual.
c) ¿Cuál sería la tasa media si se aplicara régimen de interés simple?

$a)\quad \mathrm{M}_{SE}=M_{HR}$

$$C\left(1+i_p\right)^{n}=\sum_{j=1}^{k}C_j\left(1+i_j\right)^{n}$$

$$43.000\left(1+i_p\right)^{4}=10.000x1,02^{4}+15.000x1,025^{4}+18.000x1,019^{4}$$

$$\boxed{i_p=0,021336 \text{ mensual}}\qquad \mathrm{i}_{mínima}<i_p<i_{máxima}$$

b) $\mathrm{M}_{SE}=M_{HR}$

$$C\left(1+i_p\right)^{n}=\sum_{j=1}^{k}C_j\left(1+i_j\right)^{n}$$

$$43.000x1,022^{4}=10.000x1,02^{4}+15.000x1,025^{4}+18.000x\left(1+i_3\right)^{4}$$

$$\boxed{i_3=0,020594 \text{ mensual}}$$

c) $\mathrm{M}_{SE}=M_{HR}$

$$C\left(1+i_p n\right)=\sum_{j=1}^{k}C_j\left(1+i_j n\right)$$

$$43.000x\left(1+i_p n\right)=10.000x\left(1+0,02x4\right)+15.000x\left(1+0,025x4\right)+18.000x\left(1+0,019x4\right)$$

$$\boxed{i_p=0,021326 \text{ mensual}}\qquad \mathrm{i}_{mínima}<i_p<i_{máxima}$$

Verificación:

$$i_p=\frac{10.000*0,02+15.000*0,025+18.000*0,019}{43.000}=0,021326 \text{ mensual}$$

28.- Un depósito de \$25.000.- ha ganado intereses a razón del 4% mensual durante 6 meses, del 4,75% mensual en los 8 meses siguientes y del 4,50% mensual en los últimos 4 meses. Determinar:

a) La tasa media mensual de la inversión en régimen de interés compuesto.

b) El monto obtenido. Verificar el resultado.

c) Ídem a) y b) en régimen de interés simple.

$a)\qquad \mathrm{M}_{SE} = M_{HR}$

$$C\left(1+i_p\right)^n = C\prod_{j=1}^{k}\left(1+i_j\right)^{n_j}$$

$$\left(1+i_p\right)^{18} = 1,04^6 x 1,0475^8 x 1,045^4$$

$\boxed{i_p = 0,044439 \text{ mensual}}\qquad \mathrm{i}_{mínima} < i_p < i_{máxima}$

$b)\qquad \mathrm{M}_{SE} = M_{HR}$

$$C\left(1+i_p\right)^n = C\prod_{j=1}^{k}\left(1+i_j\right)^{n_j}$$

$$25.000 x 1,044439^{18} = 25.000 x 1,04^6 x 1,0475^8 x 1,045^4$$

$\boxed{\mathrm{M}_{SE} = M_{HR} = 54.681,13}$

$c)\qquad \mathrm{M}_{SE} = M_{HR}$

$$C\left(1+i_p n\right) = C\prod_{j=1}^{k}\left(1+i_j n_j\right)$$

$$25.000 x\left(1+i_p n\right) = 25.000 x\left(1+0,04 x 6+0,0475 x 8+0,045 x 4\right)$$

$\boxed{i_p = 0,04444444 \text{ mensual}}\qquad \mathrm{i}_{mínima} < i_p < i_{máxima}$

$$\mathrm{M}_{SE} = M_{HR} = 25.000 x(1+0,044444 x 18) = 25.000 x\left(1+0,04 x 6+0,0475 x 8+0,045 x 4\right) = 45.000$$

29.- El 1º de setiembre se efectúa una inversión de \$900.000.- en una empresa de venta de helados, las cuales se ven afectadas por el carácter estacional de las mismas. Al respecto, se estimó el siguiente rendimiento mensual (bajo un supuesto de interés compuesto):

- desde setiembre hasta diciembre: 4% mensual.
- enero y febrero: 8% mensual.
- desde marzo hasta mayo: 2,5% mensual.
- junio: cerrado.
- julio y agosto: 1% mensual.

a) ¿Cuál es el rendimiento mensual promedio de la inversión para el primer año de la empresa? ¿A qué tasa efectiva anual corresponde?

b) ¿Qué capital tendrá el empresario al año de la apertura?

a) $\mathrm{M}_{SE} = M_{HR}$

$$C\left(1+i_p\right)^n = C\prod_{j=1}^{k}\left(1+i_j\right)^{n_j}$$

$$900.000x\left(1+i_p\right)^{12} = 900.000x1,04^4x1,08^2x1,025^3x1^1x1,01^2$$

$\boxed{ip = 0,0343073 \text{ mensual efectiva}}$ $\qquad \mathrm{i}_{mínima} < i_p < i_{máxima}$

$\left(1+i_p\right) = 1,0343073^{12}$ $\qquad \boxed{i_p = 0,498978 \text{ anual efectiva}}$

b) $\mathrm{M}_{SE} = M_{HR} = 900.000x1,034307^{12} = 900.000x1,04^4x1,08^2x1,025^3x1^1x1,01^2$

$\boxed{\mathrm{M}_{SE} = M_{HR} = 1.349.080,05} = 900.000x1,498978$

30.- Un capital de $75.000,- es colocado al 48% anual con capitalizaciones trimestrales durante 8 meses y 9 días, utilizando tasa subperiódica proporcional. Determinar el capital final formado resolviendo el tiempo fraccionario:

a) Con convención lineal.
b) Con convención exponencial.

Verificar si la diferencia de los montos es menor que la diferencia exacta (máxima diferencia) entre ambas convenciones.

$$a)\ \mathrm{M}_{CL} = Cx\left(1+i\right)^n x\left(1+if\right) = 75.000x1,012^2x\left(1+0,012x\frac{69}{90}\right)$$

$\boxed{\mathrm{M}_{CL} = 102.735,36}$

$$b)\ \mathrm{M}_{CE} = Cx\left(1+i\right)^n x\left(1+i\right)^f = 75.000x1,012^2x1,012^{\frac{69}{90}}$$

$\boxed{\mathrm{M}_{CE} = 102.619,79}$

c) Valor exacto de f donde se da la mayor diferencia (f_0)

$$f_0 = \frac{\ell n(i) - \ell n(\delta)}{\delta} = \boxed{0,50472152} \quad \text{reemplazando en ambos montos:}$$

$$\mathrm{M}_{CL} - \mathrm{M}_{CE} \text{ en } f_0 = Cx\left(1+i\right)^n x\left(1+if_0\right) - \mathrm{M}_{CE} = Cx\left(1+i\right)^n x\left(1+i\right)^{f_0}$$

$$\mathrm{M}_{CL} - \mathrm{M}_{CE} \text{ en } f_0 = 75.000x1,012^2x\left(1+0,012x0,50472152\right) - 75.000x1,012^2x1,012^{0,50472152} = \boxed{159,90}$$

$$\mathrm{M}_{CL} - \mathrm{M}_{CE} \text{ en } f = 102.735,36 - 102.619,79 = 115,57$$

$\boxed{115,57 \triangleleft 159,90 \quad \text{verificado}}$

31.- Un capital se deposita durante 1 año, 7 meses y 21 días al 42% anual con capitalizaciones mensuales. El capital final formado es de $46.000,-. Determinar el capital inicial en:

a) Convención lineal.
b) Convención exponencial.

$$a)\ \ \mathrm{M}_{CL} = Cx\left(1+i\right)^{n} x\left(1+if\right) \Rightarrow 46.000 = C_{CL} x1,035^{19} x\left(1+0,035x\frac{21}{30}\right)$$

$$\boxed{C_{CL} = 23.354,98}$$

$$b)\ \ \mathrm{M}_{CE} = Cx\left(1+i\right)^{n} x\left(1+i\right)^{f} \Rightarrow 46.000 = C_{CE} x1,035^{19} x1,035^{\frac{21}{30}}$$

$$\boxed{C_{CE} = 23.357,85}$$

CAPÍTULO II

Operaciones Financieras de Actualización. Descuento.

2.1. Introducción.

2.2. Simbología.

2.3. Clasificación.

2.4. Regímenes para el cálculo del Descuento.
2.4.1. Descuento Comercial a Interés Simple D_1.
2.4.2. Descuento Racional a Interés Simple D_2 .
2.4.3. Descuento Racional a Interés Compuesto D_3 .
2.4.4. Descuento Comercial a Interés Compuesto D_4 .
2.4.4.1. Valor Efectico con Actualización Periódica.
2.4.4.2. Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de “Proporcionalidad” (Tasa periódica Nominal de Descuento Constante).
2.4.4.3 Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de “Equivalencia” (Tasa periódica Efectiva de Descuento Constante).
2.4.4.4. Comparación de las Tasas Subperiódicas de Descuento. Ejemplo.
2.4.4.5. Comparación de las Tasas Instantáneas de Interés y de Descuento.
2.4.4.6. Síntesis de las relaciones entre las Tasas Periódicas de Interés y de Descuento bajo el supuesto de Equivalencia.
2.4.4.7. Relaciones y Comparaciones entre las tasas Periódicas de Interés y de Descuento.
2.4.4.8. Tasa Efectiva de costo (Interés) para los Descuentos que aplican Interés Simple.
2.4.5. Análisis Funcional de los Valores Efectivos para “n” variable.
2.4.6. Resumen de Valores Efectivos en Descuento Comercial Compuesto.

2.5. Refinanciación de Deudas o Sustitución de Documentos

2.6. Aplicación (Vencimiento común y vencimiento medio)

2.7. Ejercitación Capítulo II.

OPERACIONES FINANCIERAS DE ACTUALIZACIÓN. DESCUENTO

2.1. Introducción

La operación de descuento o actualización es inversa a la de interés o capitalización (Capítulo I). Ahora se conoce el Valor Escrito, Valor Nominal o Valor Futuro de un documento a vencer, la tasa y el tiempo de antelación y se calcula el Valor Presente, Valor Actual o Valor Efectivo del documento.

2.2. Simbología

N = Valor Nominal, Valor Escrito o Valor Futuro del documento
V = Valor presente, Valor Actual o Valor Efectivo
d = Tasa de Descuento también llamada tasa "Adelantada de interés"
D = Descuento D = N – V

2.3. Clasificación

2.3.1. Según la Tasa que se utiliza para el cálculo del descuento:

a- Descuentos Comerciales: trabajan con tasa de descuento (se aplican sobre el valor futuro, Valor Nominal del documento).
b- Descuentos Racionales: trabajan con tasa de interés (se aplican sobre un valor presente, Valor Efectivo del documento).

2.3.2. Según el Régimen de Interés utilizado:

a- Régimen a Interés Simple
b- Régimen a Interés Compuesto

2.3.3. Combinación de las dos clasificaciones anteriores

De estas dos clasificaciones surgen cuatro regímenes para calcular el descuento:
D_1 = Descuento Comercial a interés Simple
D_2 = Descuento Racional a interés Simple
D_3 = Descuento Racional a interés Compuesto
D_4 = Descuento Comercial a interés Compuesto

2.4. Regímenes para el cálculo del Descuento

2.4.1. Descuento Comercial a Interés Simple: D_1

2.4.1.1. Definición: la tasa de descuento (d_s) es la reducción o descuento que se practica sobre un Nominal de $1.- por su anticipación en un período de tiempo.

A la tasa de descuento también se la denomina "tasa adelantada de interés".

Si \$1 ---------------- 1 período --------------------- d_s
\$$N$ ---------------- 1 período ---------------------- $N.d_s$
\$$N$ ---------------- n períodos --------------------- $\boxed{N.d_s.n = D_1}$

$$\boxed{D_1 = Nd_s n}$$

Al Descuento Comercial a Interés Simple se lo llama también Descuento Comercial o Bancario.

$$V_1 = N - D_1 = N - Nd_s n$$

$$\boxed{V_1 = N(1 - d_s n)} \text{ y } \boxed{N = \frac{V_1}{1 - d_s n}}$$

D_1 en función de V_1 $\quad D_1 = N - V_1 = \dfrac{V_1}{1 - d_s n} - V_1 = \dfrac{V_1 - V_1 + V_1 d_s n}{1 - d_s n}$ $\quad \boxed{D_1 = \dfrac{V_1 d_s n}{1 - d_s n}}$

D_1 en función de N $\quad D_1 = N - V_1 = N - N(1 - d_s n) = N - N + Nd_s n$ $\quad \boxed{D_1 = Nd_s n}$

2.4.1.2. Ejemplos y Observaciones:

Se descuenta comercialmente a Interés Simple un documento de \$10.000.- 2 períodos antes de vencer a una tasa de descuento de 20%. Determinar el valor efectivo.

$$\boxed{\begin{aligned} D_1 &= Nd_s n = 10.000x0,20x2 = \$4.000.- \\ V_1 &= N - D_1 = 10.000 - 4.000 = \$6.000.- \end{aligned}}$$

1° Observación

Suponiendo que se coloca ese valor efectivo al 20% de interés por 2 períodos en régimen de interés simple ¿Se obtienen los \$10.000.- del valor nominal?

$M = 6.000\ (1 + 0{,}20\ .\ 2) = 8.400.- \neq 10.000.-$

Debido a que con esta colocación no se logra reproducir el Valor Nominal del documento se dice que el Descuento Comercial es “Irracional”, “No Racional”, o “Irreversible”.

Aclaración:

La tasa de descuento d_s no proporciona el costo efectivo de la operación.

2° Observación

Manteniendo los datos originales, salvo el tiempo de descuento, que ahora es de 6 períodos, calcular el valor efectivo del documento.

$D_1 = 10.000\ .0{,}20\ .\ 6 = 12.000.-$

$V_1 = N - D_1 = 10.000 - 12.000 = -2.000.- < 0$ ➔ ABSURDO

Cuando el tiempo de antelación es grande el Descuento Comercial a Interés Simple resulta “inaplicable”. Surge así la “Condición de Aplicabilidad” de este descuento:

$D_1 < N \qquad Nd_s n < N \qquad d_s n < 1$ y despejando $\boxed{n < \dfrac{1}{d_s}}$ y también $\boxed{d_s < \dfrac{1}{n}}$

La Condición de Aplicabilidad del Descuento Comercial Simple es que el tiempo de antelación debe ser menor a la inversa de la tasa de descuento (redondeado siempre por defecto). También, con respecto a la tasa de descuento debe ser menor a la inversa del plazo.

En el ejemplo $n < \frac{1}{d_s} = \frac{1}{0,20}$, entonces $\boxed{n < 5}$

2.4.2. Descuento Racional a Interés Simple: D_2

Definición: Por ser Racional, el valor efectivo colocado a interés simple por el tiempo que media entre la fecha de vencimiento del documento y la fecha de descuento, debe reproducir el valor nominal del documento.

Recordando que los descuentos racionales operan con "tasa de interés", y por definición:

$$\boxed{N = V_2\left(1+i_s n\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{V_2 = \frac{N}{1+i_s n}}$$

D_2 en función de V_2 $\quad D_2 = N - V_2 = V_2(1+i_s n) - V_2 = V_2 + V_2 i_s n - V_2 \quad \boxed{D_2 = V_2 i_s n}$

El descuento Racional Simple es el Interés Simple calculado sobre el valor efectivo del documento.

D_2 en función del N $\quad D_2 = N - V_2 = N - \frac{N}{1+i_s n} = \frac{N(1+i_s n) - N}{1+i_s n} = \frac{N + N i_s n - N}{1+i_s n}$

$$\boxed{D_2 = \frac{N i_s n}{1+i_s n}}$$

Aclaración: la tasa de interés i_s no proporciona el costo efectivo de la operación.

2.4.3. Descuento Racional a Interés Compuesto: D_3

2.4.3.1. Definición: Por ser Racional, el valor efectivo colocado a interés compuesto por el tiempo de antelación o descuento debe reproducir el valor nominal del documento.

2.4.3.2. Valor Nominal y Valor Efectivo con actualización periódica (m=1)

Por definición:

$$\boxed{N = V_3\left(1+i\right)^n} \quad \text{y} \quad \boxed{V_3 = \frac{N}{\left(1+i\right)^n} = N\left(1+i\right)^{-n}}$$

D_3 en función del V_3 $\quad D_3 = N - V_3 = V_3(1+i)^n - V_3 \quad \boxed{D_3 = V_3\left[(1+i)^n - 1\right]}$

El descuento Racional Compuesto es el Interés Compuesto calculado sobre el Valor Efectivo del documento.

D_3 en función del N $\quad D_3 = N - V_3 = N - N(1+i)^{-n} \quad \boxed{D_3 = N\left[1-(1+i)^{-n}\right]}$

Aclaración: En los Descuentos Racionales las fórmulas son las vistas en Interés (Capítulo I) reemplazando el Monto por el Valor Nominal (valores futuros) y el Capital por el Valor Efectivo (valores actuales o presentes).

2.4.3.3. D_3Con Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de Proporcionalidad. Cuadro Resumen de fórmulas

Se presentan las fórmulas (no se deducen por ser análogo el razonamiento al caso de actualización periódica) para actualización Subperiódica y Continua.

Actualización	Nominal	D_3 en función de V_3 $D_3 = N - V_3$	D_3 en función de N $D_3 = N - V_3$
Subperiódica (1<m<∞)	$N = V_3\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}$	$D_3 = V_3\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} - 1\right]$	$D_3 = N\left[1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}\right]$
Continua (m→∞)	$N = \overline{V}_3 e^{jn}$	$\overline{D}_3 = \overline{V}_3\left(e^{jn} - 1\right)$	$\overline{D}_3 = N\left(1-e^{-jn}\right)$

Aclaración: Cabe destacar que, siendo el Valor Nominal constante (dato), los descuentos de este cuadro crecen a medida que aumenta la frecuencia de actualización. Para m→∞ se obtiene el descuento Máximo y el valor Efectivo Mínimo.

2.4.3.4. D_3Con Actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de Equivalencia. Cuadro Resumen de fórmulas

Se presentan las fórmulas (no se deducen por ser análogo el razonamiento) para actualización Subperiódica y Continua. En este cuadro todos los descuentos son iguales porque se trabaja con tasas equivalentes.

Actualización	Nominal	D_3 en función de V_3 $D_3 = N - V_3$	D_3 en función de N $D_3 = N - V_3$
Subperiódica (1<m<∞)	$N = V_3\left(1+i_{(m)}\right)^{nm}$	$D_3 = V_3\left[(1+i_{(m)})^{nm} - 1\right]$	$D_3 = N\left[1-\left(1+i_{(m)}\right)^{-nm}\right]$
Continua (m→∞)	$N = V_3 e^{\delta n}$	$D_3 = V_3\left(e^{\delta n} - 1\right)$	$D_3 = N\left(1-e^{-\delta n}\right)$

Aclaración: Cabe destacar que en este cuadro, al trabajar con tasas equivalentes, todos los descuentos son iguales y por ende, también son iguales los valores efectivos.

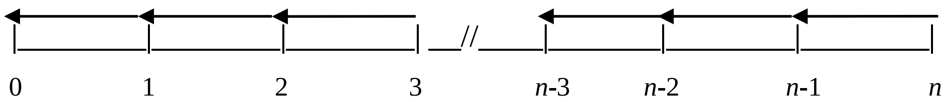
Se recuerda que en los Descuentos Racionales a Interés Compuesto las fórmulas son las vistas en Interés compuesto cambiando el Monto por el Valor Nominal (valores futuros) y el Capital por el Valor Efectivo (valores presentes o actuales).

2.4.4. Descuento Comercial a Interés Compuesto:D_4

2.4.4.1. Valor Efectivo Con Actualización Periódica (m=1)

Por ser Comercial se trabaja con Tasa de Descuento y por ser a Interés Compuesto existen actualizaciones del Valor Nominal del documento. Período a período el valor nominal se actualiza y es cada vez menor.

Cuando se descuenta un documento la realidad es que el primer período de descuento es del último (n-ésimo) al penúltimo (n-1), el segundo período de descuento es del período n-1al n-2, y así sucesivamente. En un eje temporal se observa que se traslada el documento desde el último período hasta el período 0. Es por ello que, en el cuadro de evolución aparece el “orden del período” en que se realiza el descuento y el “período” al que corresponde.



Orden del desc.	Per.	Valor Nominal	D_4	Valor Efectivo (V_4)
1°	n	N	$N \cdot d$	$N - Nd = N(1-d)$
2°	$n-1$	$N(1-d)$	$N(1-d) \cdot d$	$N(1-d) - N(1-d).d = N(1-d)(1-d) = N(1-d)^2$
3°	$n-2$	$N(1-d)^2$	$N(1-d)^2 \cdot d$	$N(1-d)^2 - N(1-d)^2.d = N(1-d)^2(1-d) = N(1-d)^3$
...	...	...	...	...
n°	1	$N(1-d)^{n-1}$	$N(1-d)^{n-1} \cdot d$	$V_4 = N(1-d)^n$

$$\boxed{V_4 = N(1-d)^n}$$

$$\boxed{N = \frac{V_4}{(1-d)^n} = V_4(1-d)^{-n}}$$

D_4 en función del N $\qquad D_4 = N - V_4 = N - N(1-d)^n \quad \boxed{D_4 = N\left[1-(1-d)^n\right]}$

D_4 en función del V_4 $\qquad D_4 = N - V_4 = V_4(1-d)^{-n} - V_4 \quad \boxed{D_4 = V_4\left[(1-d)^{-n} - 1\right]}$

Ejemplo:

Suponiendo un documento de \$10.000.- descontado 4 meses antes de su vencimiento, a una tasa del 5% mensual, determinar el valor efectivo y el descuento en Descuento Comercial a interés Simple, Descuento Racional a interés Simple, Descuento Racional a interés Compuesto y en Descuento Comercial a interés Compuesto.

Descuento	Valor Efectivo	Descuento
Comercial Simple	$V_1 = N(1-d_s n)$ $V_1 = 10.000(1-0,05x4)$ $V_1 = \$8.000.-$	$D_1 = N - V_1$ $D_1 = 10.000 - 8.000$ $D_1 = \$2.000.-$
Racional Simple	$V_2 = \frac{N}{(1+i_s n)}$ $V_2 = \frac{10.000}{(1+0,05x4)}$ $V_2 = \$8.333,33$	$D_2 = N - V_2$ $D_2 = 10.000 - 8.333,33$ $D_2 = \$1.666,67$
Racional Compuesto	$V_3 = N(1+i)^{-n}$ $V_3 = 10.000(1+0,05)^{-4}$ $V_3 = \$8.227,02$	$D_3 = N - V_3$ $D_3 = 10.000 - 8.227,02$ $D_3 = \$1.772,98$
Comercial Compuesto	$V_4 = N(1-d)^n$ $V_4 = 10.000(1-0,05)^4$ $V_4 = \$8.145,06$	$D_4 = N - V_4$ $D_4 = 10.000 - 8.145,06$ $D_4 = \$1.854,94$

Observación:

Manteniendo constante el valor numérico de la tasa y siendo $n>1$ el descuento Comercial a Interés Simple es el que mayor descuento produce.

2.4.4.2. D_4 con actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de "Proporcionalidad" (tasa periódica nominal de descuento constante)

2.4.4.2.1. Valor Efectivo Con Actualización Subperiódica ($1<m<\infty$).

Frecuentemente las entidades financieras enuncian una tasa periódica de descuento aclarando que se actualiza subperiódicamente. A esa tasa periódica enunciada se la llama tasa Periódica Nominal de Descuento y se la simboliza "f". Para encontrar la tasa subperiódica de descuento se razona planteando "proporcionalidad" respecto de la tasa enunciada.

Si en 1 período = m subperíodos rige $\rightarrow f$

en 1 subperíodo regirá $\rightarrow \dfrac{f}{m}$ tasa subperiódica proporcional

Como tasa y tiempo deben expresarse en la misma unidad de medida:

Si 1 período $\rightarrow$ m subperíodos

n períodos $\rightarrow$ n m subperíodos

La fórmula de Valor Efectivo con actualización subperiódica es:

$$\boxed{V_4 = N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}} \text{ y } \boxed{N = \frac{V_4}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}} = V_4\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-nm}}$$

El descuento es:

D_4 en función del N $\quad D_4 = N - V_4 = N - N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}$ $\quad \boxed{D_4 = N\left[1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}\right]}$

D_4 en función del V_4 $\quad D_4 = N - V_4 = V_4\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-nm} - V_4$ $\quad \boxed{D_4 = V_4\left[\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-nm} - 1\right]}$

2.4.4.2.2. Comparación de los Valores Efectivos con actualización Periódica o Subperiódica

Sabiendo que:

$V_4 = N(1-d)^n$ valor efectivo con actualización periódica

$V'_4 = N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}$ valor efectivo con actualización subperiódica

Y considerando los siguientes supuestos:

1° Nominal = \$1.-

2° Tiempo de antelación o descuento: $n = 1$ período

3° Las tasas d y f son numéricamente iguales

$V_4 = 1-d$ y $V'_4 = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{m}$

Se desarrolla V'_4:

$$\left(1-\frac{f}{m}\right)^m=\binom{m}{0}\left(-\frac{f}{m}\right)^0+\binom{m}{1}\left(-\frac{f}{m}\right)^1+\binom{m}{2}\left(-\frac{f}{m}\right)^2+\binom{m}{3}\left(-\frac{f}{m}\right)^3+\ldots+\binom{m}{m}\left(-\frac{f}{m}\right)^m \quad \text{(m+1) términos}$$

$$\left(1-\frac{f}{m}\right)^m=1+\frac{m!}{1!(m-1)!}\left(-\frac{f}{m}\right)^1+\frac{m!}{2!(m-2)!}\left(-\frac{f}{m}\right)^2+\frac{m!}{3!(m-3)!}\left(-\frac{f}{m}\right)^3+\ldots+\left(-\frac{f}{m}\right)^m$$

$$\left(1-\frac{f}{m}\right)^m=1+\frac{m(m-1)!}{1!(m-1)!}\left(-\frac{f}{m}\right)^1+\frac{m(m-1)(m-2)!}{2!(m-2)!}\left(-\frac{f}{m}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)!}{3!(m-3)!}\left(-\frac{f}{m}\right)^3+\ldots+\left(-\frac{f}{m}\right)^m$$

simplificando

$$\left(1-\frac{f}{m}\right)^m=1+m\left(-\frac{f}{m}\right)+\frac{m(m-1)}{2!}\left(-\frac{f}{m}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(-\frac{f}{m}\right)^3+\ldots+\left(-\frac{f}{m}\right)^m$$

$$\left(1-\frac{f}{m}\right)^m=1-f+\underbrace{\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2!}f^2-\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3!}f^3+\ldots+\left(-\frac{f}{m}\right)^m}\quad \text{(m+1) términos}$$

V'₄ = *V₄ + Sumatoria de signos alternados*

Se demostrará que esta sumatoria de signos alternados tiene término general decreciente. Llamando:

$$t_1=\left|\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2!}f^2\right| \text{ y } t_2=\left|\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3!}f^3\right|$$

Y escribiendo a t_2 en función de t_1

$$t_2=\left|t_1\frac{\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3}f\right| \text{ siendo } 0<\frac{\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3}<1 \quad \text{y} \quad 0<f<1$$

Como t_2 es igual a t_1 multiplicado por dos números menores que 1 resulta que:

$t_2<|t_1|$ Con idéntico razonamiento se puede demostrar que:

$t_3<|t_2|$

$t_4<|t_3|$ siendo la sumatoria de signos alternados y término general decreciente, la misma converge a un número que lleva el signo de su primer término: es positiva.

$$V'_4=V_4+\sum Positiva$$

$$\boxed{V'_4>V_4}$$

Conclusión: El Valor Efectivo en Descuento Comercial Compuesto con actualización Subperiódica es siempre mayor al Valor Efectivo con actualización Periódica, trabajando sobre el mismo valor nominal, el mismo tiempo de antelación y con el mismo valor numérico de la tasa de descuento.

2.4.4.2.3. Valor Efectivo con Actualización Continua ($m\to\infty$). Valor Efectivo Máximo $\overline{V_4}$

Se demostró que a medida que aumenta la frecuencia de actualización el valor efectivo aumenta. Ahora, para encontrar el Valor Efectivo Máximo, que se simboliza $\overline{V_4}$, se aplica $\lim\limits_{m\to\infty}$ al valor efectivo con actualización subperiódica considerando N = \$1.- y n = 1 período.

$$\overline{V_4} = \lim_{m\to\infty} V'_4 = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{f}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{\frac{f}{f}}{\frac{-m}{f}}\right)^{\frac{m}{(-f)}}}_{e}{}^{(-f)} = e^{-f} \qquad \text{recordar que } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

y considerando nominal y tiempo distinto de 1:

$$\boxed{\overline{V_4} = Ne^{-fn}} \qquad \boxed{N = \overline{V_4}e^{fn}}$$

Se calcula el Descuento Mínimo:

$\overline{D_4}$ en función del N $\qquad \overline{D_4} = N - \overline{V_4} = N - Ne^{-fn}$ $\boxed{\overline{D_4} = N(1-e^{-fn})}$

$\overline{D_4}$ en función del $\overline{V_4}$ $\qquad \overline{D_4} = N - \overline{V_4} = \overline{V_4}e^{fn} - \overline{V_4}$ $\boxed{\overline{D_4} = \overline{V_4}(e^{fn}-1)}$

2.4.4.2.4. Ejemplo

Calcular el valor efectivo en D_4 considerando un nominal de \$10.000.- utilizando una tasa nominal de descuento del 20% anual, en 4 años, con actualización:

a) Periódica Anual (m=1)

$$V_4 = N(1-d)^n = 10.000x(1-0,20)^4 = 10.000x0,80^4 = \boxed{4.096.-}$$

b) Bimestral (m=6)

$$V'_4 = N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm} = 10.000\left(1-\frac{0,20}{6}\right)^{4x6} = \boxed{4.432,43}$$

c) Mensual (m=12)

$$V'_4 = N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm} = 10.000\left(1-\frac{0,20}{12}\right)^{4x12} = \boxed{4.463,10}$$

d) Continua ($m\to\infty$)

$$\overline{V_4} = Ne^{-fn} = 10.000.e^{-0,20.4} = \boxed{4.493,29}$$

2.4.4.2.5. Tasa Periódica Efectiva de Descuento

En el enfoque de proporcionalidad se demostró que los descuentos decrecen a medida que aumenta la frecuencia de actualización (porque el nominal se va actualizando) y en consecuencia los valores efectivos crecen. Cuando $m\to\infty$ el descuento es el menor y se obtiene el Valor Efectivo Máximo. Evidentemente la tasa nominal f no refleja el verdadero descuento de \$1 de nominal en un período de tiempo cuando aumenta la frecuencia de actualización m. Para comparar distintas opciones en operaciones de descuento se calcula la “tasa periódica efectiva de descuento” que se simboliza d.

Definición: la Tasa Periódica Efectiva de Descuento mide la reducción o descuento que sufre \$1.- de valor nominal en una unidad de tiempo, independientemente de la forma de actualización. Se simboliza "*d*".

2.4.4.2.5.1. Con actualización Periódica (*m*=1)

Para esta demostración, se simboliza (inicialmente) con *f* a la tasa periódica de descuento enunciada. Sabiendo que:

$$D_4 = N - V_4 = N - N(1-f)^n = N\left[1-(1-f)^n\right]$$

De acuerdo a la definición de tasa efectiva de descuento, si N = \$1.- y $n = 1$ período el descuento es la tasa de descuento ($D_4 = d$).

$$d = 1-(1-f)^1 = 1-1+f = f \qquad \boxed{d = f}$$

Conclusión: Cuando se actualiza periódicamente las tasas de descuento nominal y efectiva son iguales. Existe una única Tasa de Descuento (único caso).

2.4.4.2.5.2. Con actualización Subperiódica (1<*m*<∞)

Sabiendo que:

$$D_4 = N - V_4 = N - N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm} = N\left[1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}\right]$$

Nuevamente si N = \$1.- y $n = 1$ período ➔ $D_4 = d$

$$\boxed{d = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m}}$$

2.4.4.2.5.3. Con actualización Continua (*m*→∞). Tasa Periódica Efectiva Mínima de Descuento $\overline{d}$

Siendo:

$$\overline{D}_4 = N - \overline{V}_4 = N - Ne^{-fn} = N\left(1-e^{-fn}\right)$$

Si N = \$1.- y $n = 1$ período ➔ $\overline{D}_4 = \overline{d}$ (Tasa Efectiva Mínima de Descuento)

$$\boxed{\overline{d} = 1-e^{-f}}$$

Aclaración: La Tasa Periódica Efectiva de Descuento se puede tomar como un punto de referencia para analizar distintas fuentes de información (tasas de descuento) pero NO ES UNA VERDADERA TASA DE COSTO ya que es una "tasa adelantada", se aplica sobre el valor nominal o valor futuro. La verdadera tasa "efectiva de costo" de una operación financiera, ya sea de capitalización o actualización y en cualquier régimen, Simple o Compuesto, es la tasa periódica efectiva de interés "i" que es una "tasa vencida", que se aplica sobre el valor presente o valor actual. En una operación de descuento la efectiva tasa de costo es aquella tasa de interés "i" a la cual se debe colocar el valor efectivo (valor presente) para obtener el valor nominal del documento (valor final) en régimen de interés compuesto con capitalización periódica.

2.4.4.2.5.4. Ejemplo:

Suponiendo que la tasa periódica nominal del 20% anual de descuento, calcular la tasa efectiva de descuento para actualización:

a) Anual (m = 1)

$$d = f = \boxed{0{,}20 \text{ anual efectiva}}$$

b) Bimestral (m = 6)

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0{,}20}{6}\right)^6 = \boxed{0{,}184056 \text{ efectiva anual}}$$

c) Mensual (m=12)

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0{,}20}{12}\right)^{12} = \boxed{0{,}182648 \text{ efectiva anual}}$$

d) Continua ($m \to \infty$)

$$\overline{d} = 1 - e^{-f} = 1 - e^{-0{,}20} = \boxed{0{,}181269 \text{ efectiva mínima anual}}$$

Se concluye que, a medida que aumenta la frecuencia de actualización, las tasas periódicas efectivas de descuento decrecen hasta llegar a la tasa periódica efectiva mínima de descuento que corresponde a la actualización continua.

2.4.4.3. D_4 con actualización Subperiódica y Continua. Enfoque de "Equivalencia" (Tasa Periódica Efectiva de Descuento Constante d)

El "Enfoque de Proporcionalidad" (f constante) lleva a valores efectivos cada vez mayores a medida que aumenta la frecuencia de actualización. Es así porque, al aumentar la frecuencia de actualización, los valores nominales decrecen con mayor rapidez y el descuento resulta menor. Este decrecimiento de los descuentos se traduce en una tasa periódica efectiva de descuento que es decreciente (hasta llegar a la Tasa Efectiva Mínima que corresponde a la actualización continua). Un inversor inteligente decidiría descontar su documento con actualización continua porque obtendría el máximo valor efectivo. Por ello a las instituciones financieras este enfoque no les resulta práctico para enunciar sus tasas de descuento.

Las entidades financieras pretenden un descuento efectivo constante independientemente de la frecuencia de actualización que el enfoque de proporcionalidad no lo cumple. Surge así el "Enfoque de Equivalencia" o "Igualdad de Valores Efectivos" o de "Tasa Periódica Efectiva de Descuento $\underline{d}$ constante".

2.4.4.3.1. Tasa Subperiódica Equivalente de Descuento $d_{(m)}$

Esta tasa subperiódica, por ser equivalente, obtiene el mismo valor efectivo que el obtenido actualizando periódicamente. Se plantea, ahora, el "Supuesto de Equivalencia" o "Igualdad de Valores Efectivos".

Definición: la tasa Subperiódica Equivalente de Descuento es aquella tasa que actualizando subperiódicamente produce el mismo valor efectivo que la tasa periódica efectiva "d" actualizando periódicamente, operando sobre el mismo nominal y por el mismo número de períodos.

Igualando los Valores Efectivos y despejando:

$$\left.\begin{aligned} V_4 &= N(1-d)^n \\ V_4 &= N\left(1-d_{(m)}\right)^{nm} \end{aligned}\right\}$$

$$N(1-d)^n = N\left(1-d_{(m)}\right)^{nm}$$

$$1-d = \left(1-d_{(m)}\right)^m \qquad (*)$$

$$\sqrt[m]{1-d} = 1-d_{(m)}$$

$$\boxed{d_{(m)} = 1-\sqrt[m]{1-d} = 1-\left(1-d\right)^{\frac{1}{m}}}$$

Despejando la tasa periódica efectiva de descuento “*d*” de (*):

$$\boxed{d = 1-\left(1-d_{(m)}\right)^{m}}$$

2.4.4.3.2. Tasas Subperiódicas Equivalentes de Descuento en general

Definición: Dos tasas subperiódicas de descuento son “equivalentes” si ambas producen el mismo valor efectivo operando con distinta frecuencia de actualización y trabajando sobre el mismo nominal y el mismo número de períodos.

Para deducirlas se plantea la igualdad de los valores efectivos actualizando en un caso “*m*” veces y en el otro “*k*” veces.

$$\left.\begin{array}{l} V_4 = N(1-d_{(m)})^{nm} \\ V_4 = N(1-d_{(k)})^{nk} \end{array}\right\}$$

$$N(1-d_{(m)})^{nm} = N(1-d_{(k)})^{nk}$$

Simplificando N y n

$$(1-d_{(m)})^{m} = (1-d_{(k)})^{k} \qquad 1-d_{(m)} = \sqrt[m]{(1-d_{(k)})^{k}} = (1-d_{(k)})^{\frac{k}{m}}$$

despejando

$$\boxed{d_{(m)} = 1-(1-d_{(k)})^{\frac{k}{m}}}$$

2.4.4.3.3. Tasa Periódica Nominal Convertible de Descuento (actualización Subperiódica)

En el “Enfoque de Proporcionalidad” la tasa nominal de descuento f es constante pero si se pretende obtener la tasa nominal periódica que corresponde a la tasa subperiódica equivalente es necesario considerar a esta tasa “variable” de acuerdo con la frecuencia de actualización. Esta tasa periódica nominal variable con m se denomina “Tasa Periódica Nominal Convertible de Descuento” y se simboliza $f_{(m)}$

$$\boxed{f_{(m)} = d_{(m)}m} \rightarrow \boxed{d_{(m)} = \frac{f_{(m)}}{m}}$$

De esta forma, bajo el concepto de equivalencia, el valor efectivo con actualización subperiódica es:

$$\boxed{V_4 = N(1-d_{(m)})^{nm} = N\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{nm}}$$

recordando que este valor efectivo es igual al de la actualización periódica

$$V_4 = N(1-d)^{n}$$

Resumen de tasas de descuento

$d_{(m)}$ tasa subperiódica equivalente

es proporcional a la tasa periódica nominal $f_{(m)}$

$$\boxed{d_{(m)} = \frac{f_{(m)}}{m}} \quad \text{y} \quad \boxed{f_{(m)} = d_{(m)} x m}$$

es equivalente a la tasa periódica efectiva d

$$1 - d = \left(1 - d_{(m)}\right)^{m}$$

$$\boxed{d = 1 - \left(1 - d_{(m)}\right)^{m}} \qquad \boxed{d_{(m)} = 1 - \sqrt[m]{1-d}}$$

Si $d_{(12)}$=0,03 mensual ; $f_{(m)}$=36 anual act. mensualmente ; d=0,306158 anual efvo.

Ejemplo:

Considerando una tasa de descuento del 1% mensual, calcular la tasa de descuento trimestral equivalente y las tasas periódicas nominales convertibles y efectivas anuales de descuento para ambos casos.

Frecuencia	Tasa Subperiódica Equivalente	Tasa Periódica Nominal Convertible Anual	Tasa Periódica Efectiva Anual
$k = 12$	$d_{(k)} = \boxed{d_{(12)} = 0,01 \text{ mensual}}$	$f_{(k)} = d_{(k)} k$ $f_{(12)} = 0,01x12$ $\boxed{f_{(12)} = 0,12}$	$d = 1 - \left(1 - d_{(k)}\right)^{k}$ $d = 1 - \left(1 - 0,01\right)^{12}$ $\boxed{d = 0,113615}$
$m = 4$	$\left(1 - d_{(m)}\right)^{m} = (1 - d_{(k)})^{k}$ $d_{(4)} = 1 - (1 - 0,01)^{\frac{12}{4}}$ $\boxed{d_{(4)} = 0,029701 \text{ trimestral}}$	$f_{(m)} = d_{(m)} m$ $f_{(4)} = 0,029701x4$ $\boxed{f_{(4)} = 0,118804}$	$d = 1 - \left(1 - d_{(m)}\right)^{m}$ $d = 1 - \left(1 - 0,029701\right)^{4}$ $\boxed{d = 0,113615}$

Observaciones:

4- Las tasas subperiódicas equivalentes de descuento no son proporcionales.

5- Las tasas periódicas nominales convertibles de descuento decrecen a media que disminuye la frecuencia de actualización.

6- Siendo las tasas subperiódicas de descuento equivalentes, las tasas periódicas efectivas de descuento son iguales.

2.4.4.3.4. Tasa Periódica Nominal Instantánea de Descuento (actualización Continua)δ'

2.4.4.3.4.1. Definiciones

Definición analítica: es aquella Tasa Periódica Nominal de Descuento que actualizando continuamente (o cuando el intervalo de actualización tiende a cero) produce el mismo valor efectivo que la tasa periódica efectiva "*d*" actualizando periódicamente, trabajando sobre el mismo valor nominal y el mismo número de períodos.

<u>Definición sintética</u>: es la tasa Periódica Nominal de Descuento que se obtiene aplicando el $\lim\limits_{m\to\infty}$ a la tasa periódica nominal convertible $f_{(m)}$. En símbolos $\boxed{\delta' = \lim\limits_{m\to\infty} f_{(m)}}$

2.4.4.3.4.2. Deducción aplicando el número *e*

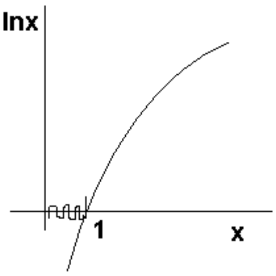
Recordando que en el "Enfoque de Equivalencia" o "Igualdad de Valores Efectivos" o "Tasa Periódica Efectiva d Constante" se igualan los valores efectivos con actualización periódica y subperiódica (considerando N=\$1 y n=1) y aplicando límite para m → ∞:

$\lim\limits_{m\to\infty}(1-d) = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^m$ siendo el primer miembro constante y haciendo ciertos artificios:

$$1-d = \underbrace{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\frac{f_{(m)}}{f_{(m)}}}{-\frac{m}{f_{(m)}}}\right)^{\frac{m}{(-f_{(m)})}.(-f_{(m)})}}_{e} \qquad \text{recordar que} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$1-d = e^{-\lim\limits_{m\to\infty} f_{(m)}} \qquad 1-d = e^{-\delta'} \ (*) \qquad \ln(1-d) = -\delta'.\ln e \ \boxed{\delta' = -\ln(1-d)}$$

<u>Aclaración 1:</u> Se recuerda que para todo $0 < x < 1$ el $\ln x < 0$ y siendo $0 < (1-d) < 1$ entonces $\ln(1-d) < 0$. Luego, la tasa Instantánea de Descuento es positiva. Ver gráfico:



<u>Aclaración 2:</u> De (*) se obtiene el Valor Efectivo, trabajando bajo el Supuesto de Equivalencia, con actualización continua y con la tasa nominal instantánea de descuento δ':

$1-d = e^{-\delta'}$. Considerando N> \$1.- y n> 1 período resulta:

$$\boxed{V_4 = N(1-d)^n = Ne^{-\delta' n}}$$

2.4.4.3.5. Ejemplo

Se enuncia una tasa de descuento efectiva constante del 12% anual (*d* constante implica Enfoque de Equivalencia). Determinar las tasas subperiódicas equivalentes y las tasas periódicas nominales convertibles de descuento siendo la actualización:

a) Anual $m = 1$
$d = f =$ $\boxed{\text{0,12 anual efectiva}}$

b) Semestral

d = 0,12 anual efectiva $\qquad m = 2$

$$1-d=\left(1-d_{(m)}\right)^{m}$$

$$d_{(m)}=1-\sqrt[m]{1-d} \qquad d_{(2)}=1-\sqrt[2]{1-0,12}=\boxed{0,0619168\ \textit{semestral equivalente}}$$

$$f_{(m)}=d_{(\mathrm{m})}xm \qquad f_{(2)}=d_{(2)}x2=\boxed{0{,}123834 \text{ nominal anual convertible act. semetralmente}}$$

c) Trimestral

d = 0,12 anual efectiva $\qquad m = 4$

$$d_{(4)}=1-\sqrt[4]{1-0,12}=\boxed{0,0314531\ \textit{trimestral equivalente}}$$

$$f_{(4)}=d_{(4)}x4=\boxed{0{,}125812 \text{ nominal anual convertible act. trimestralmente}}$$

d) Mensual

d = 0,12 anual efectiva $\qquad m = 12$

$$d_{(12)}=1-\sqrt[12]{1-0,12}=\boxed{0,010596\ \textit{mensual equivalente}}$$

$$f_{(12)}=d_{(12)}x12=\boxed{0{,}127155 \text{ nominal anual convertible act. mensualmente}}$$

e) Continua

d = 0,12 anual efectiva $\qquad m \to \infty$

Al ser la actualización continua no existe tasa subperiódica. Se calcula la tasa periódica nominal instantánea de descuento:

$$1-d=e^{-\delta'}$$

$$\delta'=-\ln(1-d)=-\ln(1-0,12)=\boxed{0{,}127833 \text{ instantánea nominal anual act. continuamente}}$$

A medida que aumenta la frecuencia de actualización, si se desea obtener siempre el mismo valor efectivo (Supuesto de Equivalencia) se deben enunciar tasas periódicas nominales convertibles de descuento cada vez mayores, hasta llegar a la tasa instantánea de descuento que es la mayor de las tasas periódicas nominales de descuento.

Se demuestra teóricamente:

2.4.4.3.6. Comparación de las Tasas Periódicas Nominales Convertibles de Descuento para "m" variable

Partiendo del enfoque de equivalencia:

$$(1-d)=\left(1-d_{(1)}\right)^{1}=\left(1-d_{(2)}\right)^{2}=\left(1-d_{(3)}\right)^{3}=\ldots=\left(1-d_{(m)}\right)^{m}$$

y reemplazando

$$(1-d)=\overbrace{\left(1-\frac{f_{(1)}}{1}\right)^{1}=\left(1-\frac{f_{(2)}}{2}\right)^{2}}^{(1)}=\underbrace{\left(1-\frac{f_{(3)}}{3}\right)^{3}=\ldots}_{(2)}=\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{m}$$

Se compara $f_{(1)}$ y $f_{(2)}$:

Manteniendo constante la tasa periódica nominal de descuento y aumentando la frecuencia de actualización se obtiene la siguiente desigualdad

$$\left(1-\frac{f_{(1)}}{1}\right)^{1}<\left(1-\frac{f_{(1)}}{2}\right)^{2}$$ reemplazando el primer miembro de la desigualdad por (1)

$$\left(1-\frac{f_{(2)}}{2}\right)^2 < \left(1-\frac{f_{(1)}}{2}\right)^2$$ y simplificando

$$-f_{(2)} < -f_{(1)}$$

$$\boxed{f_{(2)} > f_{(1)} = d}$$

Se compara ahora $f_{(2)}$ y $f_{(3)}$.con idéntico razonamiento

$$\left(1-\frac{f_{(2)}}{2}\right)^2 < \left(1-\frac{f_{(2)}}{3}\right)^3$$ reemplazando el primer miembro de la desigualdad por (2)

$$\left(1-\frac{f_{(3)}}{3}\right)^3 < \left(1-\frac{f_{(2)}}{3}\right)^3$$ y simplificando

$$-f_{(3)} < -f_{(2)}$$

$$\boxed{f_{(3)} > f_{(2)}}$$

Y así sucesivamente se demuestra que:

$$\boxed{f_{(4)} > f_{(3)}}$$

$$\boxed{f_{(5)} > f_{(4)}}$$

<u>Conclusiones</u>

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} f_{(m)} = \delta' > \ldots > f_{(m)} > \ldots > f_{(3)} > f_{(2)} > f_{(1)} = d}$$

<u>Primera conclusión</u>: Bajo el enfoque de Equivalencia, la Tasa Periódica Efectiva "*d*" de Descuento es menor a todas las tasas periódicas de descuento.

<u>Segunda conclusión</u>: Bajo el enfoque de Equivalencia, las tasas Periódicas Nominales Convertibles crecen a medida que aumenta la frecuencia de actualización.

<u>Tercera conclusión</u>: Bajo el enfoque de Equivalencia, la tasa Nominal Instantánea de Descuento δ' es la mayor de todas las tasas periódicas nominales de descuento.

<u>Cuarta conclusión</u>: Las conclusiones para las relaciones entre las tasas de Descuento son las inversas a las vistas para tasas de Interés.

<u>Quinta conclusión</u>: Por suponer "equivalencia", estas tasas "*d*", "$f_{(m)}$" y "δ'" que actualizan periódica, subperiódica y continuamente, producen valores efectivos iguales:

$$N(1-d)^n = N\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{nm} = N\left(1-d_{(m)}\right)^{nm} = Ne^{-\delta' n}$$

Simplificando:

$$\boxed{1-d = \left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^m = \left(1-d_{(m)}\right)^m = e^{-\delta'}}$$

2.4.4.4. Comparación de las Tasas Subperiódicas de Descuento: Proporcional y Equivalente.

Partiendo del mismo valor numérico de las tasas periódicas d y f y para m>1 se sabe que aumentando m los valores efectivos crecen

$$(1-d) < \left(1-\frac{f}{m}\right)^{m}$$

Despejando f/m

$$(1-d)^{(1/m)} - 1 < -\frac{f}{m}$$

Multiplicando ambos miembros por (-1) se invierte el sentido de la desigualdad

$$1-(1-d)^{(1/m)} > \frac{f}{m}$$

Siendo el primer miembro la tasa subperiódica equivalente de descuento se obtiene:

$$\boxed{d_{(m)} > \frac{f}{m}}$$

Conclusión: Partiendo del mismo valor numérico de las tasas periódicas, la Tasa Subperiódica Equivalente de descuento es siempre mayor a la Tasa Subperiódica Proporcional de Descuento (conclusión inversa a la obtenida para tasas subperiódicas de interés).

Ejemplo $d = f = 0{,}12$ anual $m=2$

$d_{(2)}= 1-(1-0{,}12)^{(1/2)} = 0{,}0619168$ semestral equivalente.

$f/m = 0{,}12/2 = 0{,}06$ semestral proporcional.

Resumen de ambos enfoques: Proporcionalidad y Equivalencia

Enfoque de Proporcionalidad - Tasa periódica nominal f constante

	A C T U A L I Z A C I Ó N		
	Periódica	Subperiódica	Continua
Vs efectivos Crecientes	$V_4 = N(1-d)^{n}$	$V_4 = N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}$	$\overline{V_4} = Ne^{-fn}$ (máximo)
Tasas efectivas decrecientes	$d = f$	$d = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m}$	$\overline{d} = 1-e^{-f}$ (mínima)

A medida que aumenta la frecuencia de actualización los descuentos decrecen y los valores efectivos crecen, hasta llegar al valor efectivo máximo $(\overline{V_4})$ para $m \to \infty$

Este decrecimiento en los descuentos se refleja en la tasa efectiva de descuento que para $m \to \infty$ se obtiene la tasa efectiva mínima $(\overline{d})$

Enfoque de Equivalencia - Tasa periódica efectiva d constante

	ACTUALIZACIÓN		
	Periódica	Subperiódica	Continua
Vs efectivos iguales	$V_4 = N(1-d)^n$	$V_4 = N\left(1-d_{(m)}\right)^{nm} = N\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^{nm}$	$V_4 = Ne^{-\delta' n}$
Tasas nom. convertibles crecientes	$d = f_{(1)}$	$1-d = \left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^m$; $f_{(m)} = \left(1-\sqrt[m]{1-d}\right)m$	$1-d = e^{-\delta'}$ luego $\delta' = -\ln(1-d)$

En este enfoque todos los valores efectivos son iguales. Para encontrar las tasas nominales convertibles se igualan los valores efectivos. Para $m \to \infty$ se obtiene la tasa nominal instantánea (δ').

Estas nominales convertibles crecen para m creciente, hasta llegar a la tasa instantánea de descuento que es la mayor de todas las tasas de interés $\delta' > f_{(m)} > d$

2.4.4.5. Comparación de las Tasas Instantáneas de Interés y de Descuento

Para comparar las tasas instantáneas se igualan los valores efectivos que corresponden al Descuento Racional Compuesto y al Descuento Comercial Compuesto

$$\left.\begin{array}{l} V_3 = N(1+i)^{-n} \\ V_4 = N(1-d)^n \end{array}\right\}$$

$$N(1+i)^{-n} = N(1-d)^n \qquad (1+i)^{-1} = (1-d)$$

invirtiendo ambos miembros

$(1+i) = (1-d)^{-1}$ aplicando ln en ambos miembros

$$\ln(1+i) = -\ln(1-d)$$

$$\boxed{\delta = \delta'}$$

Conclusión: Las tasas Instantáneas de Interés y de Descuento son iguales.

2.4.4.6. Síntesis de las relaciones entre Tasas Periódicas de Interés y de Descuento bajo el Supuesto de Equivalencia

Tasas Nominales

$$\underbrace{\overbrace{i = j_{(1)}}^{\text{Tasa Efva}} > j_{(2)} > j_{(3)} > \ldots > j_{(m)} > \ldots > \delta}_{\text{Tasas de Interés}} = \underbrace{\delta' > \ldots > f_{(m)} > \ldots > f_{(3)} > f_{(2)} > \overbrace{f_{(1)} = d}^{\text{Tasa Efva}}}_{\text{Tasas de Descuento}}$$

Aclaración: al suponer "equivalencia", todas estas tasas producen valores futuros (Montos o Valores Nominales) iguales, operando siempre sobre el mismo valor presente (Capital o Valor Efectivo) y el mismo número de períodos. La tasa periódica efectiva "i" es la tasa efectiva de Rendimiento para operaciones de capitalización y la tasa efectiva de Costo para operaciones de actualización o descuento.

$$V_3(1+i)^n = V_3\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{nm} = V_3 e^{\delta n} = V_4 e^{\delta' n} = V_4\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-nm} = V_4(1-d)^{-n}$$

Y simplificando

$$\boxed{(1+i) = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m} = e^{\delta} = e^{\delta'} = \left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m} = (1-d)^{-1}}$$

Ejemplo:

Dada la tasa efectiva de costo (interés) del 12% anual, calcular las tasas:

Tasa de:	m	Tasas periódicas anuales
Interés Nominal Convertible para:	$m = 2$	$j_{(2)} = \left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)m = \left(1{,}12^{\frac{1}{2}} - 1\right)x2 = \boxed{0{,}116601}$
	$m = 12$	$j_{(12)} = \left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)m = \left(1{,}12^{\frac{1}{12}} - 1\right)x12 = \boxed{0{,}113866}$
	$m \to\infty$	$\delta = \ln(1+i) = \ln 1{,}12 = \boxed{0{,}113329}$
Descuento Nominal Convertible para:	$m \to\infty$	$\delta' = -\ln(1-d) = -\ln(1-0{,}107143) = \boxed{0{,}113329}$
	$m = 12$	$f_{(12)} = \left\{1-\left[(1-d)^{\frac{1}{12}}\right]\right\}m = \left\{1-\left[(1-0{,}107143)^{\frac{1}{12}}\right]\right\}x12 = \boxed{0{,}112795}$
	$m = 2$	$f_{(2)} = \left\{1-\left[(1-d)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}m = \left\{1-\left[(1-0{,}107143)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}x2 = \boxed{0{,}110178}$
	$m = 1$	$f_{(1)} = d = \frac{i}{1+i} = \frac{0{,}12}{1{,}12} = \boxed{0{,}107143}$ efectiva

Con este ejemplo, se verifica que:

$$\boxed{i = j_{(1)} > j_{(2)} > j_{(12)} > \delta = \delta' > f_{(12)} > f_{(2)} > f_{(1)} = d}$$

2.4.4.7. Relación y Comparación entre las tasas de Interés y Descuento

2.4.4.7.1. Régimen de Interés Simple

Para encontrar la relación entre ambas tasas se igualan los valores efectivos V_1 y V_2

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = N(1-d_s n) \\ V_2 = \dfrac{N}{1+i_s n} \end{array}\right\}$$

$$N(1-d_s n) = \frac{N}{1+i_s n}$$

$$\boxed{(1-d_s n) = \frac{1}{1+i_s n}} \qquad (*)$$

Despejando d_s de (*)

$1-\dfrac{1}{1+i_s n} = d_s n \qquad \dfrac{1+i_s n-1}{1+i_s n} = d_s n \qquad \dfrac{i_s n}{1+i_s n} = d_s n$ simplificando "n" en los numeradores

$$\boxed{d_s = \frac{i_s}{1+i_s n}}$$

En Régimen de Interés Simple, la relación entre tasas periódicas de Descuento y de Interés depende del tiempo de antelación o descuento (permaneciendo constante “i_s” la tasa de descuento varía para distintos valores de “n”).

Comparación de d_s e i_s

$i_s = i_s$ por la propiedad de identidad

$1 < 1+i_s n$ Dividiendo miembro a miembro

$i_s > \dfrac{i_s}{1+i_s n}$ siendo "d_s" el segundo miembro de esta desigualdad:

$$\boxed{i_s > d_s}$$

Despejando i_s de (*)

$$1+i_s n = \frac{1}{1-d_s n}\ ;\quad i_s n = \frac{1}{1-d_s n} - 1\ ;\quad i_s n = \frac{1-1+d_s n}{1-d_s n}\ ;\quad i_s n = \frac{d_s n}{1-d_s n}$$

simplificando "n" en los numeradores

$$\boxed{i_s = \frac{d_s}{1-d_s n}}$$

La relación entre tasas periódicas de Interés y de Descuento depende del tiempo del tiempo de antelación o descuento (permaneciendo constante “d_s” la tasa de interés varía para distintos valores de “n”).

Comparación de d_s e i_s

$d_s = d_s$ por la propiedad de identidad

$1 > 1-d_s n$ Dividiendo miembro a miembro

$d_s < \dfrac{d_s}{1-d_s n}$ siendo "i_s" el segundo miembro de esta desigualdad:

$$\boxed{d_s < i_s}$$

Conclusión: La Tasa de Interés es siempre mayor a las Tasa de Descuento.

2.4.4.7.2. Régimen de Interés Compuesto

Para encontrar la relación entre ambas tasas se igualan los valores efectivos V_3 y V_4

$$\left.\begin{aligned} V_3 &= N(1+i)^{-n} \\ V_4 &= N(1-d)^{n} \end{aligned}\right\}$$

$$N(1+i)^{-n} = N(1-d)^n$$

$$\boxed{(1+i)^{-1} = (1-d)} \qquad (**)$$

Despejando d en (**)

$$d = 1 - \frac{1}{1+i} \qquad d = \frac{1+i-1}{1+i}$$

$$\boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

En régimen de interés compuesto la relación entre tasa de Descuento y Tasa de Interés NO depende del plazo de la operación (permaneciendo constante "*i*" la tasa de descuento es contante para todo valor de "*n*").

Comparación de *d* e *i*

$i = i$ por la propiedad de identidad

$1 < 1+i$ dividiendo miembro a miembro

$i > \frac{i}{1+i}$ siendo "*d*" el segundo miembro de esta desigualdad:

$$\boxed{i > d}$$

Conclusión: La Tasa de Interés es siempre mayor a las Tasa de Descuento. (Recordar las relaciones y las comparaciones vistas en el Capítulo I con φ y λ).

Despejando *i* de (**)

$$1+i = \frac{1}{1-d} \qquad i = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{1-1+d}{1-d}$$

$$\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$ Tasa Efectiva de Costo operando en D_4

En Régimen de Interés Compuesto, la relación entre tasa de Interés y tasa de Descuento NO depende del tiempo de antelación (permaneciendo constante "*d*" la tasa de interés es contante para todo valor de "*n*").

Comparación de *d* e *i*

$d = d$ por la propiedad de identidad

$1 > 1-d$ dividiendo miembro a miembro se invierte la desigualdad

$d < \frac{d}{1-d}$ siendo "*i*" el segundo miembro de esta desigualdad:

$$\boxed{d < i}$$

Conclusión: La Tasa de Interés es siempre mayor a las Tasa de Descuento.

Ejemplo:

Suponiendo una tasa de interés del 1% mensual determinar la tasa de descuento mensual para operaciones a 7 días tanto en régimen de interés Simple como Compuesto.

Régimen de Interés Simple	Régimen de Interés Compuesto
$d_s = \frac{i_s}{1+i_s n} = \frac{0,01}{\left(1+0,01\frac{7}{30}\right)} = \boxed{0,0099767}$	$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,01}{1,01} = \boxed{0,00990099}$

En ambos regímenes se obtiene que $d < i$

2.4.4.8. Tasa Efectiva de Costo para los descuentos que aplican régimen de Interés Simple

Cuando se determinó la tasa efectiva de descuento se dijo que esta tasa es una tasa de referencia o tasa adelantada de interés porque se aplica sobre el valor futuro y no sobre el valor actual. Por este motivo se llegó a la conclusión de que los descuentos comerciales no son racionales. Por otro lado, se planteó la siguiente cadena de equivalencia en régimen de interés compuesto:

$$V_3(1+i)^n = V_3\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{nm} = V_3 e^{\delta n} = V_4 e^{\delta' n} = V_4\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-nm} = V_4(1-d)^{-n}$$

Y simplificando:

$$(1+i) = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m} = e^{\delta} = e^{\delta'} = \left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m} = (1-d)^{-1}$$

Se hace énfasis, nuevamente, en que la Tasa Efectiva de Costo de una operación de descuento es aquella que, al colocar el valor efectivo a interés compuesto con capitalización periódica (tasa efectiva de interés "*i*") se reproduce el valor nominal del documento.

Con idéntico razonamiento, para encontrar la tasa efectiva de costo, en operaciones de descuento en régimen de interés simple, se deben igualar los valores futuros (pueden ser los valores actuales) obteniendo:

$$V_3(1+i)^n = \frac{V_1}{1-d_s n} = V_2(1+i_s n)$$

Simplificando los valores actuales y despejando Efectiva de Costo en Descuento Comercial Simple:

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \qquad \boxed{\mathrm{i} = \sqrt[n]{\frac{1}{1-d_s n}} - 1}$$

Simplificando los valores actuales y despejando la Tasa Efectiva de Costo en Descuento Racional Simple:

$$(1+i)^n = 1+i_s n \qquad \boxed{\mathrm{i} = \sqrt[n]{1+i_s n} - 1}$$

(ver Capítulo I)

Ejemplo:

Considerando la tasa de interés y de descuento en régimen de interés simple del 1% mensual calcular las tasas efectivas anuales de costo para operaciones a:

a) 7 días

Trabajando con descuento Comercial

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \quad \Rightarrow \quad (1+i)^{\frac{7}{365}} = \frac{1}{1-0,01\frac{7}{30}} \quad \text{y despejando}$$

$$\mathrm{i} = \sqrt[\frac{7}{365}]{\frac{1}{1-0,01\frac{7}{30}}} - 1 = \boxed{0,129538} \text{ anual efectiva de costo}$$

Trabajando con descuento Racional

$$(1+i)^n = 1+i_s n \quad \Rightarrow \quad (1+i)^{\frac{7}{365}} = 1+0,01\frac{7}{30} \quad \text{y despejando}$$

$$\mathrm{i} = \sqrt[\frac{7}{365}]{1+0,01\frac{7}{30}} - 1 = \boxed{0,129218} \text{ anual efectiva de costo}$$

b) 30 días

Trabajando con descuento Comercial

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \quad \Rightarrow \quad (1+i)^{\frac{30}{365}} = \frac{1}{1-0,01\frac{30}{30}} \quad \text{y despejando}$$

$$\mathrm{i} = \sqrt[\frac{30}{365}]{\frac{1}{1-0,01}} - 1 = \boxed{0,130069} \text{ anual efectiva de costo}$$

Trabajando con descuento Racional

$$(1+i)^n = 1+i_s n \quad \Rightarrow \quad (1+i)^{\frac{30}{365}} = 1+0,01\frac{30}{30} \quad \text{y despejando}$$

$$\mathrm{i} = \sqrt[\frac{30}{365}]{1+0,01} - 1 = \boxed{0,128695} \text{ anual efectiva de costo}$$

c) 365 días

Trabajando con descuento Comercial

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \quad \Rightarrow \quad (1+i)^{\frac{365}{365}} = \frac{1}{1-0,01\frac{365}{30}} \quad \text{y despejando}$$

$$\mathrm{i} = \frac{1}{1-0,01\frac{365}{30}} - 1 = \boxed{0,138520} \text{ anual efectiva de costo}$$

Trabajando con descuento Racional

$$(1+i)^n = 1+i_s n \quad \Rightarrow \quad (1+i)^{\frac{365}{365}} = 1+0,01\frac{365}{30} \quad \text{y despejando}$$

$$\mathrm{i} = 0,01\frac{365}{30} = \boxed{0,121667} \text{ anual efectiva de costo}$$

Conclusión: Para 0 <*n*< 1 en Descuento Comercial Simple se obtiene una tasa efectiva de costo siempre mayor a la del Descuento Racional Simple. El D_1 es el que más utilizan las entidades financieras para descontar documentos.

Aclaración: Se observa que, en el planteo inicial de cada solución, "*n*" en el primer miembro se escribe en años porque corresponde a la tasa efectiva anual de costo y "*n*" en el segundo miembro se escribe en meses porque corresponde a la tasa mensual (de interés o de descuento) en régimen de interés simple.

Despejando, ahora, las tasas (de interés y de descuento) que operan en interés simple:

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \qquad 1-d_s n = (1+i)^{-n} \qquad \boxed{d_s = \frac{1-(1+i)^{-n}}{n}}$$

$$(1+i)^n = 1+i_s n \qquad \boxed{\mathrm{i}_s = \frac{(1+i)^n - 1}{n}}$$ (ver Capítulo I)

Ejemplo:

Considerando la tasa de costo efectiva del 14% anual, calcular las tasas de interés y de descuento mensuales, en régimen de interés simple, para operaciones a:

a) 7 días (observar que el *n* del exponente del primer miembro corresponde a la tasa anual y el *n* del denominador del segundo miembro corresponde a la tasa mensual)

Trabajando con descuento Comercial

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \qquad (1+0{,}14)^{\frac{7}{365}} = \frac{1}{1-d_s\frac{7}{30}}$$ y despejando

$$d_s = \frac{1-1{,}14^{-\frac{7}{365}}}{\frac{7}{30}} = \boxed{0{,}010756} \text{ mensual}$$

Trabajando con descuento Racional

$$(1+i)^n = 1+i_s n \qquad (1+0{,}14)^{\frac{7}{365}} = 1+i_s\frac{7}{30}$$ y despejando

$$\mathrm{i}_s = \frac{1{,}14^{\frac{7}{365}}-1}{\frac{7}{30}} = \boxed{0{,}010783} \text{ mensual}$$

b) 30 días

Trabajando con descuento Comercial

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \qquad (1+0{,}14)^{\frac{30}{365}} = \frac{1}{1-d_s\frac{30}{30}}$$ y despejando

$$d_s = \frac{1-1{,}14^{-\frac{30}{365}}}{1} = \boxed{0{,}010712} \text{ mensual}$$

Trabajando con descuento Racional

$$(1+i)^n = 1+i_s n \qquad (1+0{,}14)^{\frac{30}{365}} = 1+i_s\frac{30}{30}$$ y despejando

$$\mathrm{i}_s = \frac{1{,}14^{\frac{30}{365}}-1}{1} = \boxed{0{,}010828} \text{ mensual}$$

c) 365 días

Trabajando con descuento Comercial

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-d_s n} \qquad (1+0{,}14)^{\frac{365}{365}} = \frac{1}{1-d_s \frac{365}{30}} \qquad \text{y despejando}$$

$$d_s = \frac{1-1{,}14^{-\frac{365}{365}}}{\frac{365}{30}} = \boxed{0{,}010094} \text{ mensual}$$

Trabajando con descuento Racional

$$(1+i)^n = 1+i_s n \qquad (1+0{,}14)^{\frac{365}{365}} = 1+i_s \frac{365}{30} \qquad \text{y despejando}$$

$$\mathrm{i}_s = \frac{1{,}14^1 - 1}{\frac{365}{30}} = \boxed{0{,}011507} \text{ mensual}$$

Resumen: A continuación se presenta la Cadena de Equivalencias (igualando los valores nominales) para determinar la tasa Efectiva de Costo de cualquier descuento y simplificando los valores efectivos iguales.

$$\boxed{\left(1+\underbrace{i}_{\text{Tasa Efectiva de Costo}}\right)^n = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{nm} = e^{\delta n} = e^{\delta' n} = \left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-nm} = (1-d)^{-n} = 1+i_s n = \frac{1}{1-d_s n}}$$

2.4.5. Análisis funcional de los Valores Efectivos para "*n*" variable

2.4.5.1. Descuento Comercial a Interés Simple (D_1)

$$V_1 = N(1-d_s n)$$

Considerando N = \$1.-

$$f_{(n)} = 1-d_s n$$

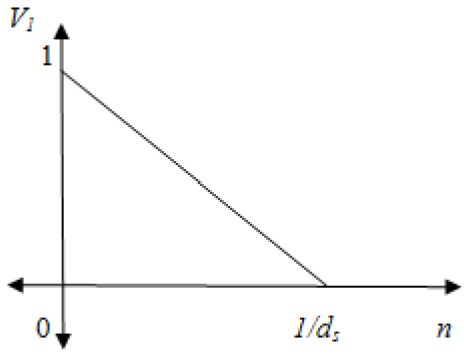
Valores extremos

n	$f_{(n)} = 1-d_s n$
0	1
$1/d_s$	0

$\to$ Condición de Aplicabilidad de D_1

$$f'_{(n)} = 0-d_s.1 = -d_s < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{función decreciente}$$

$$f''_{(n)} = 0 \Rightarrow \text{función lineal}$$



2.4.5.2. Descuento Racional a Interés Simple (D_2)

$$V_2 = \frac{N}{1+i_s n} \quad \text{siendo } N = 1.\text{-}$$

$$f_{(n)} = \frac{1}{(1+i_s n)} = (1+i_s n)^{-1}$$

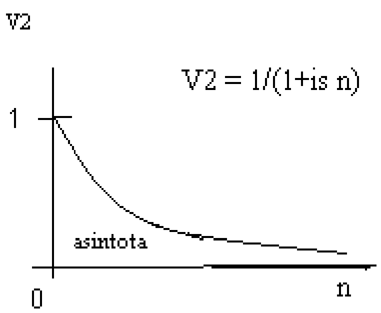
Valores extremos

n	$f(n) = (1+i_s n)^{-1}$
0	1
1	$\frac{1}{1+i_s} = (1+i_s)^{-1}$
$\to\infty$	$\to 0$ asíntota

$$f(x) = g_{(x)}^{\alpha}$$
$$f'(x) = \alpha . g_{(x)}^{\alpha-1} . g'_{(x)}$$

$$f'_{(n)} = -(1+i_s n)^{-2} . i_s < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{función decreciente}$$

$$f''_{(n)} = -i_s(-2).(1+i_s n)^{-3} . i_s = 2 i_s^{\,2} . (1+i_s n)^{-3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{función cóncava hacia arriba}$$



2.4.5.3. Descuento Racional a Interés Compuesto (D_3)

$$V_3 = N(1+i)^{-n}$$

Considerando N = $1.-

$$f_{(n)} = (1+i)^{-n}$$

Valores extremos

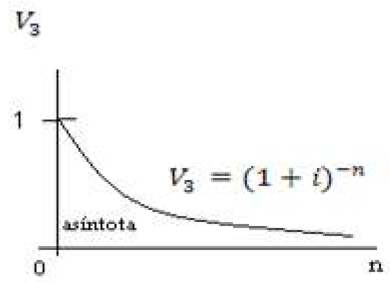
n	$f_{(n)} = (1+i)^{-n}$
0	1
1	1/(1+i)
→∞	→0 asíntota

Porque $(1+i)>1$

Recordando que: $f_{(x)} = a^{g_{(x)}} \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = a^{g_{(x)}}.\ln(a).g'_{(x)}$

$$f'_{(n)} = (1+i)^{-n}.\overbrace{\ln(1+i)}^{\delta}.(-1) = -\delta.(1+i)^{-n} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{función decreciente}$$

$$f''_{(n)} = -\delta.(1+i)^{-n}.\ln(1+i).(-1) = \delta^2(1+i)^{-n} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{función cóncava hacia arriba}$$



2.4.5.4. Descuento Comercial a Interés Compuesto (D_4)

$$V_4 = N(1-d)^n$$

Considerando N = \$1.-

$$f_{(n)} = (1-d)^n$$

Valores extremos

n	$f_{(n)}=(1-d)^n$
0	1
1	1-d
→∞	→0 asíntota

Porque $0 < (1-d) < 1$

Recordando que: $f_{(x)} = a^x \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = a^x.\ln(a)$

$$f'_{(n)} = (1-d)^n.\overbrace{\ln(1-d)}^{-\delta'} = -\delta'.(1-d)^n < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{función decreciente}$$

$$f''_{(n)} = -\delta'.(1-d)^n.\ln(1-d) = -\delta'(1-d)^n\left(-\delta'\right) = \delta'^2(1-d)^n > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{función cóncava hacia arriba}$$

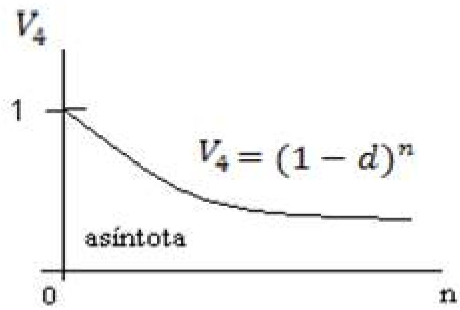
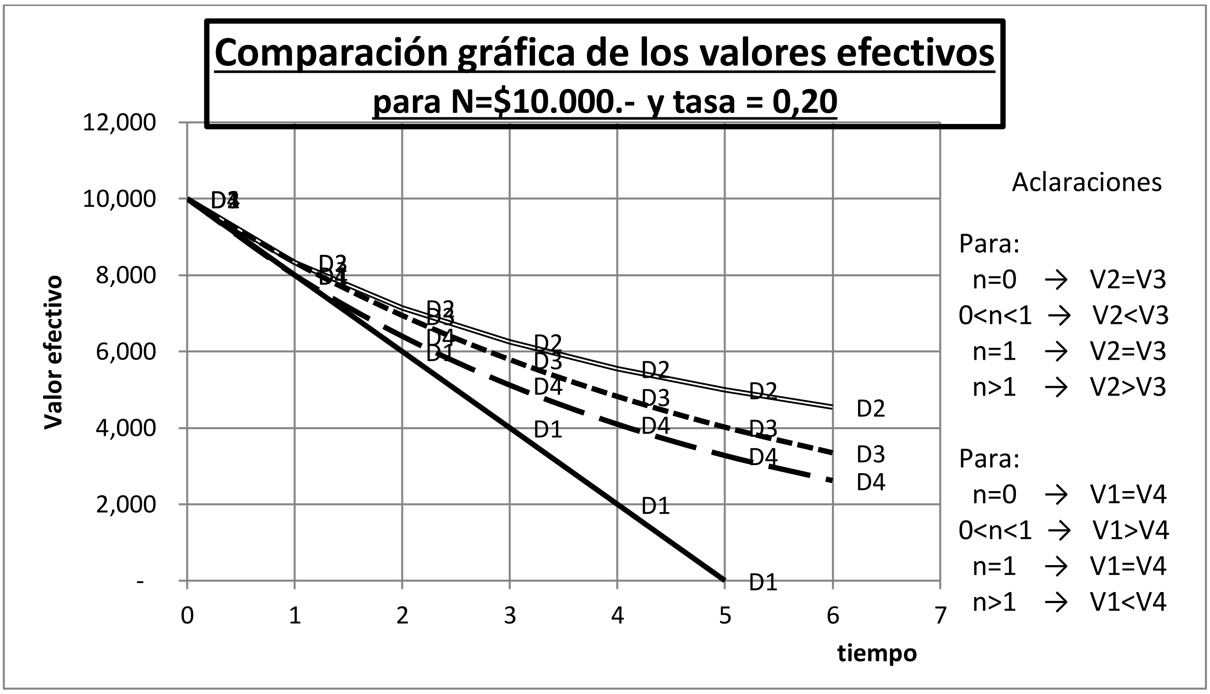


Gráfico Conjunto de los Valores Efectivos en descuento Comercial y Racional a Interés Simple y Compuesto



2.4.6. Resumen de Valores Efectivos en Descuento Comercial Compuesto V_4

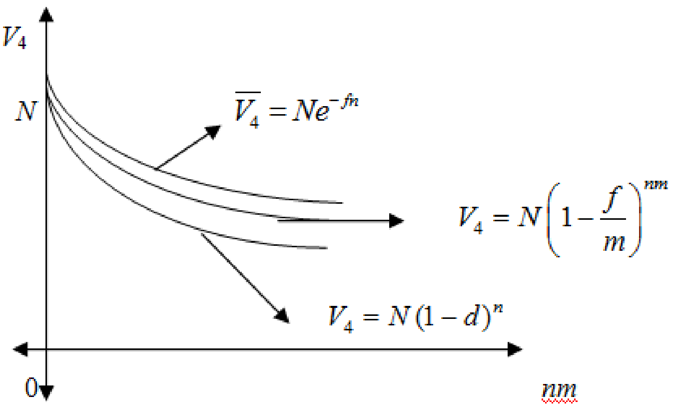
2.4.6.1. Cuadro

Actualización	Tasa de descuento utilizada	Valor efectivo
Periódica (m=1)	Con tasa efectiva d	$V_4 = N(1-d)^n$ (1)
Subperiódica (1<m<∞)	Con tasa proporcional f/m Con tasa equivalente $d_{(m)}$	$V_4 = N\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}$ (2) $V_4 = N(1-d_{(m)})^{nm}$ (3)
Continua (m→∞)	Con tasa proporcional f Con tasa equivalente δ'	$\overline{V}_4 = Ne^{-fn}$ (4) $V_4 = Ne^{-\delta' n}$ (5)

En este cuadro las tasas d y f son numéricamente iguales.

2.4.6.2. Gráficos de los Valores Efectivos para "*nm*" variable

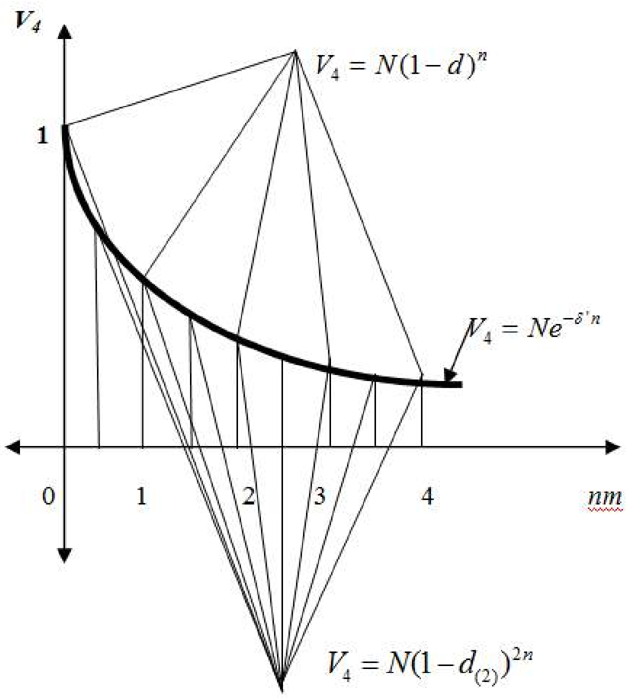
2.4.6.2.1. Gráfico de los Valores Efectivos trabajando con tasas Proporcionales de Descuento



Resumiendo (1) < (2) < (4)

Al trabajar con tasas proporcionales, (manteniendo constante la tasa periódica nominal *f*) a medida que aumenta la frecuencia de actualización, los valores efectivos crecen (ya que el descuento se calcula sobre un nominal que se va actualizando) hasta obtener el Valor Efectivo Máximo que corresponde a la actualización "continua".

2.4.6.2.2. Gráfico de los Valores Efectivos trabajando con tasas Equivalentes de Descuento



Resumiendo (1) = (3) = (5)

Al trabajar con tasas equivalentes los valores efectivos son todos iguales. La diferencia está en la cantidad de puntos que se grafican sobre la curva que representa el valor efectivo.

Al actualizar periódicamente (m=1) sólo se representan los puntos que corresponden a los valores enteros del tiempo sobre el eje horizontal (nm). Cuando se actualiza 2 veces en cada período (m=2) se representa el doble de puntos que en el caso anterior. Así sucesivamente, se van agregando puntos sobre la curva de valor efectivo a medida que aumenta m. El trazo continuo se obtiene cuando se actualiza continuamente con la tasa periódica nominal instantánea δ´.

Recordando que la tasa subperiódica equivalente $d_{(2)}$ se calcula por igualdad de valores efectivos:

$$1-d=(1-d_{(2)})^2$$

$$\sqrt[2]{(1-d)}=1-d_{(2)}$$

$$\boxed{d_{(2)}=1-\sqrt[2]{(1-d)}}$$

Y así todas las demás tasas subperiódicas equivalentes.

Para la tasa nominal instantánea de descuento:

$$1-d=e^{-\delta'}$$

$$\ln(1-d)=-\delta'.\ln e$$

$$\boxed{\delta'=-\ln(1-d)}$$

2.5. Refinanciación de Deudas o Sustitución de Documentos

Una aplicación frecuente en el área financiera es la de refinanciar deudas sustituyendo documentos emitidos por otros nuevos, cambiando alguna de las variables intervinientes (valores nominales, fechas de vencimiento, etc.).

Cuando se emite una deuda documentada en varios pagarés suele ocurrir que dicha financiación no pueda cumplirse y se decide refinanciarla reemplazando los documentos emitidos por documentos nuevos de acuerdo con una nueva financiación pactada entre deudor y acreedor. Esta refinanciación se basa en “El Principio de Equidad Financiera” que dice:

“La suma de los valores efectivos de los documentos a reemplazar (viejos documentos) debe ser igual a la suma de los valores efectivos de los documentos reemplazantes (nuevos documentos), al régimen de descuento pactado y a la tasa pactada”.

En símbolos:

$$\boxed{V_1+V_2+V_3+...+V_t=V'_1+V'_2+V'_3+...+V'_k}$$

donde:

V_j es el j-ésimo documento viejo a reemplazar (documento viejo) para $j = 1, 2,\dots t$

V'_l es el l-ésimo documento reemplazante (documento nuevo) para $l = 1, 2,\dots k$

Existen “t” documentos a reemplazar y “k” documentos reemplazantes.

Ejemplo:

Se emiten los siguientes documentos:

a) \$10.000.- a 6 meses
b) \$12.000.- a 7 meses
c) \$15.000 a 8 meses

Si se refinancia la deuda librando un pagaré de \$20.000 a 12 meses y otro pagaré a 3 meses. Determinar el valor nominal de este segundo a la tasa del 3% mensual, de forma tal, que ambas operaciones resulten financieramente equivalentes. Aplicar los cuatro descuentos estudiados.

Tipo de Descuento	Sustitución de documentos
Comercial Simple	Principio de Equidad Financiera: $V_{1a}+V_{1b}+V_{1c}=V'_{1a}+V'_{1b}$ $10.000x(1-0,03x6)+12.000x(1-0,03x7)+15.000x(1-0,03x8)=$ $=20.000x(1-0,03x12)+N'_{1b}x(1-0,03x3)$ $8.200+9.480+11.400=12.800+N'_{1b}x0,91$ $N'_{1b}=\dfrac{29.080-12.800}{0,91}=\boxed{\$17.890,11}$
Racional Simple	Principio de Equidad Financiera: $V_{2a}+V_{2b}+V_{2c}=V'_{2a}+V'_{2b}$ $\dfrac{10.000}{(1+0,03x6)}+\dfrac{12.000}{(1+0,03x7)}+\dfrac{15.000}{(1+0,03x8)}=\dfrac{20.000}{(1+0,03x12)}+\dfrac{N'_{2b}}{(1+0,03x3)}$ $8.474,58+9.917,36+12.096,77=14.705,88+\dfrac{N'_{2b}}{1,09}$ $N'_{2b}=\left(30.488,71-14.705,88\right)x1,09=\boxed{\$17.203,28}$
Racional Compuesto	Principio de Equidad Financiera: $V_{3a}+V_{3b}+V_{3c}=V'_{3a}+V'_{3b}$ $10.000x1,03^{-6}+12.000x1,03^{-7}+15.000x1,03^{-8}=20.000x1,03^{-12}+N'_{3b}x1,03^{-3}$ $8.374,84+9.757,10+11.841,14=14.027,60+N'_{3b}x1,03^{-3}$ $N'_{3b}=\left(29.973,08-14.027,60\right)x1,03^{3}=\boxed{\$17.424,06}$
Comercial Compuesto	Principio de Equidad Financiera: $V_{4a}+V_{4b}+V_{4c}=V'_{4a}+V'_{4b}$ $10.000x0,97^{6}+12.000x0,97^{7}+15.000x0,97^{8}=20.000x0,97^{12}+N'_{4b}x0,97^{3}$ $8.329,72+9.695,79+11.756,15=13.876,85+N'_{4b}x0,97^{3}$ $N'_{4b}=\dfrac{29.781,66-13.876,85}{0,97^{3}}=\boxed{\$17.426,62}$

2.6. Aplicación

En esta aplicación se presentan algunas definiciones y ejemplos ya estudiados en mi carrera de grado.

Cuando se presentó el tema de sustitución de documentos (punto 2.5. de este capítulo) se planteó una “equivalencia financiera” entre dos “valores financieros globales”.

Se define como “valor financiero global” de un conjunto de pagos/cobros a la suma de todos esos pagos/cobros contemporizados en un mismo momento calculatorio, al mismo régimen de contemporización y a la misma tasa. En alguna bibliografía se lo suele encontrar como “valor de conjunto de capitales”.

Haciendo referencia a estos dos conceptos (refinanciación de deudas y valor financiero global), se define “vencimiento común” y “vencimiento medio”.

Si un conjunto de documentos es reemplazado por un único documento, se habla de vencimiento común de todos esos documentos a un determinado régimen de contemporización. Evidentemente la incógnita puede ser:

- el valor nominal del único nuevo documento dado el vencimiento común o bien
- el vencimiento común del nuevo documento dado su valor nominal.

Ejemplo 1: la incógnita es el valor nominal del nuevo documento: se tienen un documento en cartera de $3.000.- a 2 meses y otro de $6.000.- a 4 meses. Determinar el valor nominal del documento que los sustituya siendo su vencimiento común a 6 meses y considerando una tasa de descuento del 3% mensual con actualizaciones mensuales.

$$N \text{ x } 0{,}97^6 = 3.000 \text{ x } 0{,}97^2 + 6.000 \text{ x } 0{,}97^4$$

$$\boxed{N = 9.765{,}58}$$

Ejemplo 2: la incógnita es el vencimiento del nuevo documento: se tienen un documento en cartera de $3.000.- a 2 meses y otro de $6.000.- a 4 meses. Determinar el vencimiento común del nuevo documento de $11.000.- que los sustituye considerando una tasa de descuento del 3% mensual con actualizaciones mensuales.

$$11.000 \text{ x } 0{,}97^n = 3.000 \text{ x } 0{,}97^2 + 6.000 \text{ x } 0{,}97^4$$

$$\boxed{n = 9{,}907884 \text{ meses} = 9 \text{ meses y } 27 \text{ días}}$$

El vencimiento medio es un caso particular del vencimiento común ya que el valor nominal del nuevo documento es la suma de los valores nominales de los documentos a reemplazar, a un mismo régimen de contemporización y a la misma tasa. Evidentemente la única incógnita posible es el tiempo de vencimiento sin necesidad de expresar el valor nominal del nuevo documento.

Calcular el vencimiento medio en el ejemplo anterior.

$$9.000 \text{ x } 0{,}97^n = 3.000 \text{ x } 0{,}97^2 + 6.000 \text{ x } 0{,}97^4$$

$$\boxed{n = 3{,}3197 \text{ meses} = 3 \text{ meses y } 10 \text{ días}} \qquad \text{siempre } n_{\text{mínimo}} < \text{vto. medio} < n_{\text{máximo}}$$

2.7. EJERCITACIÓN CAPÍTULO II

1.- ¿Cuál es el descuento comercial simple que sufre un documento de $5.000.- que vence el 10 de noviembre si es descontado el 5 de agosto al 84% anual? Justifique por qué el descuento no es racional y cuál es la tasa anual de interés simple equivalente que resulta. Operar con año calendario.

a) Cálculo de los días:

Agosto	26 días
Setiembre	30 días
Octubre	31 días
Noviembre	10 días
Total	97días

$$D_1 = Nxd_s xn = 5.000x0,84x\frac{97}{365} = \boxed{1.116,16}$$

b) No es racional porque el valor efectivo colocado al 84% anual durante 97 días a interés simple NO reproduce el nominal de documento.

$$V_1 = N - D_1 = 5.000 - 1.116,16 = 3.883,84$$

$$M_s = 3.883.84\left(1 + 0,84x\frac{97}{365}\right) = \boxed{4.750,84 \neq 5.000}$$

c) La tasa anual de interés, a interés simple, equivalente a la de descuento enunciada es:

$$5.000 = 3.883,84\left(1 + i_s\frac{97}{365}\right)$$

$$\boxed{i_s = 1,0814 \text{ anual}}$$

2.- ¿Qué descuento comercial simple sufrió un pagaré que vence dentro de 64 días si realizada la operación al 96% anual de descuento produjo un valor efectivo de $17.866,-? Calcular, además, el nominal del documento operando con año calendario.

$$V_1 = N\left(1 - d_s n\right) \qquad \text{N} = \frac{V_1}{\left(1 - d_s n\right)}$$

$$D_1 = N - V_1 = \frac{V_1}{\left(1 - d_s n\right)} - V_1 = \frac{V_1 - V_1(1 - d_s n)}{\left(1 - d_s n\right)} = \frac{V_1 - V_1 + V_1 d_s n}{\left(1 - d_s n\right)} = \frac{V_1 d_s n}{\left(1 - d_s n\right)}$$

$$D_1 = \frac{17.866x0,96x\frac{64}{365}}{1 - 0,96x\frac{64}{365}} = \boxed{3.616,05}$$

$$N = V_1 + D_1 = 17.866 + 3.616,05 = \boxed{21.482,05} = \frac{V_1}{\left(1 - d_s n\right)} = \frac{17.866}{1 - 0,96x\frac{64}{365}}$$

3.- ¿A qué tasa mensual de interés fue descontado racionalmente a interés simple un documento, 9 meses antes de vencer, para que el descuento represente el 40% del valor nominal?

$$D_2 = 0,40N$$

$$\frac{Ni_s n}{1+i_s n} = 0,40N \qquad i_s n = 0,40(1+i_s n)$$

$$9i_s = 0,40 + 0,40.i_s.9 \qquad 9i_s = 0,40 + 3,6i_s \qquad 5,4i_s = 0,40$$

$$\boxed{i_s = 0,074074 \text{ mensual}}$$

4.- Se descuentan comercialmente a interés simple dos documentos que vencen a los 15 y 25 días de la fecha de la operación. La diferencia de los descuentos es de \$187,50 y el valor efectivo del documento que vence a los 25 días es el 44,7368% mayor que el del documento que vence a los 15 días. ¿Cuál es el valor nominal de cada documento si la tasa de descuento es del 10% mensual?

$$D_{1b} \quad - \quad D_{1a} \quad = 187,50$$

$$\frac{V_{1b} x 0,10 x \frac{25}{30}}{1-0,10x\frac{25}{30}} - \frac{V_{1a} x 0,10 x \frac{15}{30}}{1-0,10x\frac{15}{30}} = 187,50$$

como $V_{1b} = 1,447368 x V_{1a}$ y reempazando

$$\frac{1,447368 x V_{1a} x 0,10 x \frac{25}{30}}{1-0,10x\frac{25}{30}} - \frac{V_{1a} x 0,10 x \frac{15}{30}}{1-0,10x\frac{15}{30}} = 187,50 \qquad V_{1a}(0,1315789 - 0,0526316) = 187,50$$

$$V_{1a} = 2.375.-$$

$$V_{1b} = 1,447368 x V_{1a} = 3.437,50$$

$$N_{1a} = \frac{V_{1a}}{1-0,10x\frac{15}{30}} = \boxed{2.500.-}$$

$$N_{1b} = \frac{V_{1b}}{1-0,10x\frac{25}{30}} = \boxed{3.750.-} \qquad Verif.: \quad 312,50 - 125 = 187,50$$

5.- Un documento vence dentro de 73 días. Si se descuenta comercialmente al 93% anual el descuento excede en \$2.100,27 al que corresponde a un descuento racional a interés simple. Determinar el valor nominal del documento operando con año calendario.

$$D_1 \quad - \quad D_2 \quad = 2.100,27$$

$$Nd_s n \quad - \quad \frac{Ni_s n}{1+i_s n} \quad = 2.100,27$$

$$N\left(0,93x\frac{73}{365} - \frac{0,93x\frac{73}{365}}{1+0,93x\frac{73}{365}}\right) = 2.100,27 \qquad N\left(0,186 - 0,15682968\right) = 2.100,27$$

$$Nx0,029170 = 2.100,27 \qquad \boxed{N = 72.000.-}$$

$$Verif: \quad 13.392 - 11.291,73 = 2.100,27$$

6.- ¿Cuánto tiempo resta para que 2 documentos de $8.400,- y $12.000,- descontados racionalmente a interés compuesto al 5% y 10% bimestral respectivamente, igualen sus valores actuales? Operar con año comercial.

$$V_{3a} = V_{3b}$$

$$\frac{8.400}{1,05^n} = \frac{12.000}{1,10^n}$$

$$\frac{1,10^n}{1,05^n} = \frac{12.000}{8.400} \qquad \left(\frac{1,10}{1,05}\right)^n = \frac{12.000}{8.400} \qquad 1,047619^n = 1,428571$$

$$n\log(1,047619) = \log(1,428571)$$

$$\boxed{n = 7,6671286 \text{ bimestres} = 7 \text{ bimestres y } 40 \text{ días}}$$

7.- Se descontaron 2 documentos que vencen dentro de 8 y 12 meses recibiéndose $3.486,60. Se aplicó la tasa de interés del 8% bimestral en régimen de interés compuesto con actualizaciones bimestrales. El valor nominal del documento que vence a los 12 meses supera al valor nominal del documento a 8 meses en $1.200,-. ¿Cuál es el valor escrito de cada documento?

$$V_{3a} + V_{3b} = 3.486,60 \qquad \text{sabiendo que: } N_{3b} = N_{3a} + 1.200$$

$$N_{3a} x 1,08^{-4} + N_{3b} x 1,08^{-6} = 3.486,60$$

$$N_{3a} x 1,08^{-4} + \left(N_{3a} + 1.200\right) x 1,08^{-6} = 3.486,60$$

$$N_{3a} x 1,08^{-4} + N_{3a} x 1,08^{-6} + 1.200 x 1,08^{-6} = 3.486,60$$

$$N_{3a}\left(1,08^{-4} + 1,08^{-6}\right) = 3.486,60 - 1.200 x 1,08^{-6}$$

$$\boxed{N_{3a} = 2.000.-} \qquad \boxed{N_{3b} = N_{3a} + 1.200 = 3.200.-} \qquad Verif:\ 1.470,06 + 2.016,54 = 3.486,60$$

8.- Se descontó un pagaré de $6.672,05 5 meses antes de vencer con descuento racional a interés compuesto. El importe descontado fue de $2.172,05. Durante los 3 primeros meses la tasa de interés fue 9% mensual y luego se modificó. Determinar:
a) La tasa de interés utilizada para los 2 meses restantes.
b) La tasa de descuento equivalente a esta última.

$$a)\ V_3 = N - D_3 = 6.672,05 - 2.172,05 = 4.500$$

$$4.500 = 6.672,05 x 1,09^{-3} x \left(1 + i_2\right)^{-2}$$

$$\boxed{i_2 = 0,07 \text{ mensual}}$$

$$b)\ 1 + i = \frac{1}{1-d} \qquad 1\text{-}d = \frac{1}{1,07} \qquad \boxed{d = 0,065420 \text{ mensual}}$$

9.- Una entidad financiera descuenta documentos al 73% anual cobrando una comisión del 1% sobre el nominal del documento. Si además cobra el 1% de impuesto de sellos provincial sobre el valor nominal, determinar el valor recibido por un documento de $15.070.- durante 67 días, considerando año calendario. Calcular, además, la tasa de costo financiero total anual (que incluye gastos) operando con:
a) descuento comercial a interés simple,
b) descuento racional a interés simple,
c) descuento racional a interés compuesto con tasa de interés anual actualizando anualmente.

d) descuento racional a interés compuesto con tasa de interés anual actualizando mensualmente.
e) descuento racional a interés compuesto actualizando continuamente.
f) descuento comercial a interés compuesto con tasa de descuento anual actualizando anualmente.
g) descuento comercial a interés compuesto con tasa de descuento anual actualizando mensualmente.
h) descuento comercial a interés compuesto con tasa de descuento anual actualizando continuamente.

a) $V_1 = N\left(1-d_s n\right) - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$V_1 = 15.070\left(1-0,73\frac{67}{365}\right) - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{12.749,22}$$

$$15.070 = 12.749,22\left(1+i\right)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 1,486961 \text{ anual}}$$

b) $V_2 = \dfrac{N}{1+i_s n} - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$V_2 = \frac{15.070}{1+0,73x\dfrac{67}{365}} - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{12.987,84}$$

$$15.070 = 12.987,84\left(1+i\right)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 1,248000 \text{ anual}}$$

c) $V_3 = N(1+i)^{-n} - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$V_3 = 15.070x1,73^{-\frac{67}{365}} - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{13.326,13}$$

$$15.070 = 13.326,13\left(1+i\right)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 0,954162 \text{ anual}}$$

d) $V_3 = N\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-nm} - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$V_3 = 15.070x\left(1+\frac{0,73}{\dfrac{365}{30}}\right)^{-\frac{67}{365}x\frac{365}{30}} - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{12.929,72}$$

$$15.070 = 12.929,72\left(1+i\right)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 1,303603 \text{ anual}}$$

e) $\overline{V}_3 = Ne^{-jn} - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$\overline{V}_3 = 15.070xe^{-0,73\frac{67}{365}} - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{12.878,67}$$

$$15.070 = 12.878,67\left(1+i\right)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 1,353788 \text{ anual}}$$

f) $V_4 = N(1-d)^n - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$V_4 = 15.070x(1-0,73)^{\frac{67}{365}} - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{11.549,01}$$

$$15.070 = 11.549,01(1+i)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 3,261766 \text{ anual}}$$

g) $V_4 = N\left(1-\dfrac{f}{m}\right)^{nm} - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$V_4 = 15.070x\left(1-\frac{0,73}{\frac{365}{30}}\right)^{\frac{67}{365}x\frac{365}{30}} - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{12.823,58}$$

$$15.070 = 12.823,58(1+i)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 1,409404 \text{ anual}}$$

h) $\overline{V}_4 = Ne^{-fn} - \text{Comisión} - \text{Impuesto}$

$$\overline{V_4} = 15.070xe^{-0,73\frac{67}{365}} - 15.070x0,01 - 15.070x0,01 = \boxed{12.878,67}$$

$$15.070 = 12.878,67(1+i)^{\frac{67}{365}} \qquad \boxed{i = 1,353788 \text{ anual}}$$

10.- Al descontar un documento 28 meses antes de vencer se recibe el doble de lo que se hubiera recibido si se lo descuenta 45 meses antes de vencer. Determinar a qué tasa de descuento mensual se efectuó la operación si se actualizó mensualmente. Calcular, además, las tasas anuales nominal convertible y efectiva de descuento.

$$N(1-d)^{28} = 2N(1-d)^{45} \qquad \tfrac{1}{2} = (1-d)^{45-28} \qquad \tfrac{1}{2} = (1-d)^{17}$$

$$\sqrt[17]{\tfrac{1}{2}} = 1-d \qquad d = 1-\sqrt[17]{\tfrac{1}{2}} \qquad \boxed{d = 0,039953 \text{ mensual}}$$

$$f_{(m)} = 0,039953x12 = \boxed{0,479436 \text{ anual nominal convertible}}$$

$$1-d = (1-0,039953)^{12} \qquad \boxed{d = 0,386930 \text{ anual efectiva}}$$

11.- Un pagaré de \$3.500.- fue descontado 9 meses antes de su vencimiento. El importe descontado fue \$426,47. En los primeros 6 meses se aplicó la tasa de descuento del 1,50% mensual actualizando mensualmente y luego fue modificada. Determinar:

a) la tasa de descuento mensual empleada en los 3 meses restantes.

b) la tasa de interés mensual equivalente a la obtenida en a).

$a)\ V_4 = N - D_4 = 3.500 - 426,47 = 3.073,53$

$$V_4 = N(1-d_1)^{n_1}(1-d_2)^{n_2} \qquad 3.073,53 = 3.500x0,985^6x(1-d_2)^3$$

$$\boxed{d_2 = 0,013 \text{ mensual}}$$

$$b)\ i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,013}{1-0,013} = \boxed{0,013171 \text{ mensual}}$$

12.- Dada la tasa de descuento nominal del 90% anual, calcular la tasa de descuento efectiva anual considerando actualización:

a) anual,
b) semestral,
c) bimestral,
d) mensual y
e) continua.
Operar con año comercial.

$f = 0,90$ anual nominal constante. Enfoque de Proporcionalidad

$$1 - d = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m \qquad d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m$$

a) $\boxed{d = f = 0,90 \text{ anual efectiva}}$ $(m = 1)$

b) $d = 1 - \left(1 - \frac{0,90}{2}\right)^2 = \boxed{0,6975 \text{ anual efectiva}}$ $(m = 2)$

c) $d = 1 - \left(1 - \frac{0,90}{6}\right)^6 = \boxed{0,622850 \text{ anual efectiva}}$ $(m = 6)$

d) $d = 1 - \left(1 - \frac{0,90}{12}\right)^{12} = \boxed{0,607625 \text{ anual efectiva}}$ $(m = 12)$

e) $1 - \overline{d} = e^{-f}$ $\quad \overline{d} = 1 - e^{-f} = 1 - e^{-0,90} = \boxed{0,593430 \text{ anual efectiva mínima}}$ $(m \to \infty)$

13.- Dada la tasa de descuento efectiva del 80% anual, calcular la tasa de descuento nominal convertible anual considerando actualización:
a) anual,
b) semestral,
c) bimestral,
d) mensual y
e) continua.
Operar con año comercial.

$d = 0,80$ anual efectiva constante. Enfoque de Equivalencia

$$1 - d = \left(1 - \frac{f_{(m)}}{m}\right)^m \qquad f_{(m)} = \left(1 - \sqrt[m]{1-d}\right) m$$

a) $\boxed{f_{(1)} = d = 0,80 \text{ anual}}$ $(m = 1)$

b) $f_{(2)} = \left(1 - \sqrt[2]{1 - 0,80}\right) 2 = \boxed{1,105573 \text{ anual nominal act. semestralmente}}$ $(m = 2)$

c) $f_{(6)} = \left(1 - \sqrt[6]{1 - 0,80}\right) 6 = \boxed{1,411653 \text{ anual nominal act. bimestralmente}}$ $(m = 6)$

d) $f_{(12)} = \left(1 - \sqrt[12]{1 - 0,80}\right) 12 = \boxed{1,506177 \text{ anual nominal act. mensualmente}}$ $(m = 12)$

e) $1 - d = e^{-\delta'}$ $\quad \delta' = -\ln(1 - d) = \boxed{1,609438 \text{ instantánea nominal act. continuamente}}$ $(m \to \infty)$

14.- Dada la tasa de descuento f(365/60)= 0,90 anual, hallar:
a) la tasa de descuento anual efectiva,

b) la tasa de descuento para 90 días equivalente a la del punto a) y
c) la tasa instantánea anual de descuento.

$d_{(m)}$ tasa subperiódica equivalente

→ es proporcional a la tasa periódica nominal $f_{(m)}$

$$\boxed{d_{(m)} = \frac{f_{(m)}}{m}} \quad \text{y} \quad \boxed{f_{(m)} = d_{(m)} x m}$$

→ es equivalente a la tasa periódica efectiva d

$$1-d = \left(1-d_{(m)}\right)^m$$

$$\boxed{d = 1-\left(1-d_{(m)}\right)^m} \qquad \boxed{d_{(m)} = 1-\sqrt[m]{1-d}}$$

$f_{\left(\frac{365}{60}\right)} = 0,90$ anual nominal act. cada 60 días

$$1-d = \left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^m \qquad d = 1-\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^m$$

a) $d = 1-\left(1-\dfrac{0,90}{\dfrac{365}{60}}\right)^{\frac{365}{60}} = \boxed{0,622418 \text{ anual efectiva}}$

b) $1-d = \left(1-d_{(m)}\right)^m \qquad 1-0,622418 = \left(1-d_{\left(\frac{365}{90}\right)}\right)^{\frac{365}{90}}$

$$d_{\left(\frac{365}{90}\right)} = 1-\sqrt[\frac{365}{90}]{1-0,622418} = \boxed{0,213495 \text{ anual nominal act. cada 90 días}}$$

c) $1-d = e^{-\delta'} \qquad \delta' = -\ln\left(1-0,622418\right) = 0,973967$ instantánea nominal act. continuamente

$$\boxed{\delta' > f_{(m)} > d}$$

15.- Un capital de \$140.000.- cancelable dentro de 2 meses posee un valor actual de \$136.270,60. Operando con descuento continuo, determinar:
a) la tasa instantánea de descuento mensual de la operación y
b) la tasa mensual efectiva de descuento.
c) la tasa de costo efectiva anual.

a) $V_4 = Ne^{-\delta' n} \qquad 136.270,60 = 140.000 e^{-2\delta'} \qquad \dfrac{136.270,60}{140.000} = e^{-2\delta'}$

$$0,973361 = e^{-2\delta'} \qquad \ln\left(0,973361\right) = -2\delta' \qquad \boxed{\delta' = 0,0135 \text{ mensual}}$$

b) $1-d = e^{-\delta'} \qquad d = 1-e^{-0,0135} = \boxed{0,013409 \text{ efectiva mensual}}$

c) $1+i = e^{\delta' x12} \qquad i = e^{0,0135x12}-1 = \boxed{0,175860 \text{ efectiva anual de costo}}$

16.- Determinar donde es más conveniente para el beneficiario de un pagaré descontarlo, si puede optar entre:

Banco X: aplica la tasa de descuento del 12% para 45 días.

Banco Y: enuncia la tasa de descuento nominal anual del 95% actualizando cada 60 días.

Banco Z: anuncia la tasa instantánea de descuento del 102% anual nominal.

A los fines de la comparación, determinar las tasas anuales de descuento, trabajando con año calendario.

X: $1-d=\left(1-d_{(m)}\right)^m \qquad 1-d=\left(1-0{,}12\right)^{\frac{365}{45}} \qquad \boxed{d=0{,}645438 \text{ anual efectiva}}$

Y: $1-d=\left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^m \qquad 1-d=\left(1-\dfrac{0{,}95}{\frac{365}{60}}\right)^{\frac{365}{60}} \qquad \boxed{d=0{,}644039 \text{ anual efectiva}}$

Z: $1-d=e^{-\delta'} \qquad d=1-e^{-\delta'}=1-e^{-1{,}02} \qquad \boxed{d=0{,}639405 \text{ anual efectiva}}$

$\boxed{\text{Orden de preferencia: c), b) y a)}}$

17.- Un pagaré de \$64.000.- descontado 4 meses antes de su vencimiento arroja un valor actual de \$47.464,82. Determinar:

a) ¿A qué tasa de descuento mensual se efectuó la operación si se actualiza mensualmente?

b) ¿Cuál es la tasa de descuento efectiva anual que corresponde a la obtenida en a)?

c) ¿Cuál es la tasa de interés efectiva anual de costo que corresponde a la tasa de descuento obtenida en b) ?

a) $V_4=N\left(1-d\right)^n \qquad 47.464{,}82=64.000\left(1-d\right)^4$

$\boxed{d=0{,}072 \text{ mensual}}$

b) $1-d=\left(1-d_{(m)}\right)^m \qquad d=1-\left(1-0{,}072\right)^{12} \qquad \boxed{d=0{,}592079 \text{ anual efectiva}}$

c) $i=\dfrac{d}{1-d}=\dfrac{0{,}592079}{1-0{,}592079}=\boxed{1{,}451455 \text{ anual efectiva}}$

18.- Determinar la tasa efectiva de costo anual de los ejercicios de esta práctica:

a) 1.-
b) 3.-
c) 7.-
d) 10.-

a) $\left(1+\mathrm{i}\right)^n=\dfrac{1}{1-d_s x n} \qquad \left(1+i\right)^{\frac{97}{365}}=\dfrac{1}{1-0{,}84x\frac{97}{365}} \qquad \boxed{i=1{,}587159 \text{ anual efectiva de costo}}$

b) $\left(1+\mathrm{i}\right)^n=1+i_s x n \qquad \left(1+i\right)^{9/12}=1+0{,}074074x9 \qquad \boxed{i=0{,}976051 \text{ anual efectiva de costo}}$

c) $1+i=\left(1+i_{(m)}\right)^m \qquad 1+i=1{,}08^6 \qquad \boxed{i=0{,}586874 \text{ anual efectiva de costo}}$

d) $1+i=\left(1-d_{(m)}\right)^{-m} \qquad 1+i=\left(1-0{,}039953\right)^{-12} \qquad \boxed{i=0{,}631136 \text{ anual efectiva de costo}}$

19.- Convenimos descontar un documento de \$11.400.- a la tasa de descuento del 78% anual, actualizando mensualmente. Si nos descontaron \$4.741,17, determina:
a) ¿Cuántos meses antes de su vencimiento se descontó el documento?
b) ¿Qué tasa anual efectiva de descuento se originó, considerando año comercial?
c) ¿Cuál fue la tasa instantánea de descuento anual?
d) ¿Cuál es la tasa efectiva de costo anual? Verificar

a) $V_4 = N - D_4 = 11.400 - 4.741{,}17 = 6.658{,}83$

$$V_4 = N\left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{nm} \qquad 6.658{,}83 = 11.400\left(1-\frac{0{,}78}{12}\right)^{nm} \qquad \boxed{nm = 8 \text{ meses}}$$

b) $$1-d = \left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{m} \qquad d = 1-\left(1-\frac{0{,}78}{12}\right)^{12}$$

$$\boxed{d = 0{,}553584 \text{ anual efectiva}}$$

c) $1-d = e^{-\delta'}$ $\qquad 1-0{,}553584 = 1-e^{-\delta'}$ $\qquad \boxed{\delta' = 0{,}806505 \text{ nominal anual}}$

d) $$1+i = \left(1-\frac{f_{(m)}}{m}\right)^{-m} \qquad 1+i = \left(1-\frac{0{,}78}{12}\right)^{-12} \qquad \boxed{i = 1{,}240065 \text{ efectiva de costo}}$$

20.- En la fecha vence una obligación de \$7.083.- y se refinancia por las siguientes obligaciones: \$3.000.- que vencen dentro de 2 meses y \$6.000.- que vencen dentro de 4 meses. Determinar a qué tasa de descuento mensual se realizó la sustitución si se actualizó mensualmente. ¿Y si se operara en descuento Comercial Simple?

a) $V = V_1' + V_2'$

$$7.083 = 3.000(1-d)^2 + 6.000(1-d)^4$$

haciendo un cambio de variable $X = (1-d)^2$ nos queda

$7.083 = 3.000X + 6.000X^2$ aplicando la resolvente $aX^2 + bX + c = 0$

$$6X^2 + 3X - 7{,}083 = 0 \qquad X_{1,2} = \frac{-b+-\sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a} \qquad a=6 \quad b=3 \quad c=-7{,}083$$

$$X = (1-d)^2 = 0{,}864899$$

despejando $d = 1-\sqrt[2]{0{,}864899} = \boxed{0{,}07 \text{ mensual}}$

b) $7.083 = 3.000(1-d_s x2) + 6.000(1-d_s x4)$

$$7.083 = 3.000 - 6.000d_s + 6.000 - 24.000d_s$$

$$30.000d_s = 9.000 - 7.083 = 1.917 \qquad \boxed{d_s = 0{,}0639 \text{ mensual}}$$

21.- Una deuda de \$9.300.- que vence dentro de 6 meses se refinancia mediante la entrega de 3 pagarés de igual valor nominal con vencimientos dentro de 9, 12 y 15 meses de la fecha de refinanciación. ¿Cuál es el valor nominal de cada documento si se utiliza tasa de descuento del 3% mensual actualizando mensualmente?

$$9.300(1-0,03)^6 = N(1-0,03)^9 + N(1-0,03)^{12} + N(1-0,03)^{15}$$

$$9.300(1-0,03)^6 = N\left[(1-0,03)^9 + (1-0,03)^{12} + (1-0,03)^{15}\right]$$

$$\boxed{N = 3.711,28}$$

22.- Tenemos en cartera 2 documentos de \$3.000.- y \$4.000.- que vencen dentro de 8 y 12 meses respectivamente. Deseamos saber cuándo vencerá el documento que los sustituya si se aplica descuento racional a:

a) interés compuesto con actualizaciones mensuales a la tasa de interés del 2% mensual y el nuevo nominal es de \$7.690,88.

b) interés simple.

a) $7.690,88x1,02^{-n} = 3.000x1,02^{-8} + 4.000\text{x}1,02^{-12}$

$$\boxed{n = 15 \text{ meses}}$$

b) $\dfrac{7.690,88}{(1+0,02n)} = \dfrac{3.000}{(1+0,02x8)} + \dfrac{4.000}{(1+0,02x12)}$

$$\boxed{n = 16 \text{ meses y 5 días}}$$

23.- Una deuda de \$5.100.- que vence dentro de 1 mes se refinancia mediante la entrega de 3 pagarés de igual valor efectivo con vencimientos a los 2, 3 y 5 meses de la fecha.

a) ¿Cuáles son los valores nominales de cada documento si se utiliza una tasa de descuento del 20% cuatrimestral con actualizaciones mensuales?

b) ¿Cuál es la tasa de descuento efectiva anual?

c) ¿Cuál es la tasa de interés efectiva anual de costo?

d) ¿Cuál es la tasa de interés mensual?

a) $5.100\left(1-\dfrac{0,20}{4}\right)^1 = V' + V' + V' = 3V' \qquad V' = \dfrac{4.845}{3} = 1.615$

$$N_1 = \frac{1.615}{\left(1-\frac{0,20}{4}\right)^2} = \boxed{1.789,47} \;;\; N_2 = \frac{1.615}{\left(1-\frac{0,20}{4}\right)^3} = \boxed{1.883,66} \;;\; N_3 = \frac{1.615}{\left(1-\frac{0,20}{4}\right)^5} = \boxed{2.087,15}$$

b) $1-d = \left(1-\dfrac{f_{(m)}}{m}\right)^m \qquad d = 1-\left(1-\dfrac{0,20}{4}\right)^{12}$

$$\boxed{d = 0,459670 \text{ anual efectiva}}$$

$c)$ $i = \dfrac{d}{1-d} = \dfrac{0,459640}{1-0,459640} = \boxed{0,850618 \text{ anual efectiva}}$

d) $1+i=\left(1+i_{(m)}\right)^{m}$ $\quad \left(1+i_{(12)}\right)^{12}=1{,}0850618 \quad \boxed{i_{(12)}=0{,}052632 \text{ mensual}}$

Otra forma: $i_{(m)}=\dfrac{d_{(m)}}{1-d_{(m)}}=\dfrac{0{,}05}{0{,}95}=0{,}052632$ mensual

24.- Se descuentan dos documentos de \$7.000 y \$4.000 a la tasa de descuento del 24% anual actualizando bimestralmente, recibiéndose en total \$9.394. Sabiendo que al 2º documento le faltan 4 meses para vencer, hallar cuanto tiempo antes de vencer se descontó el 1º documento. Hallar la tasa efectiva de descuento anual que genera el mismo rendimiento que la nominal enunciada.

a) $9.394=7.000\left(1-0{,}04\right)^{n}+4.000\left(1-0{,}04\right)^{2}$

$\boxed{\text{n}=5 \text{ bimestres}}$

b) $1-d=\left(1-0{,}04\right)^{6} \quad \boxed{d=0{,}217242 \text{ anual efectiva}}$

25.- Dada la tasa de descuento efectiva del 70% anual calcular, considerando año comercial

a) la tasa nominal de descuento anual actualizando semestralmente,
b) la tasa nominal de descuento anual actualizando bimestralmente,
c) la tasa nominal de descuento anual con actualización continua,
d) la tasa efectiva de interés anual,
e) la tasa nominal de interés anual capitalizando semestralmente,
f) la tasa nominal de interés anual capitalizando bimestralmente y
g) la tasa nominal de interés anual con capitalización continua.
Ordenar las tasas en forma decreciente a su valor numérico.

a) $f_{(2)}=\left(1-\sqrt[2]{1-0{,}70}\right)2=\boxed{0{,}904555 \text{ anual nominal act. semestralmente}} \quad (m=2)$

b) $f_{(6)}=\left(1-\sqrt[6]{1-0{,}70}\right)6=\boxed{1{,}090867 \text{ anual nominal act. bimestralmente}} \quad (m=6)$

c) $\delta'=-\ln\left(1-0{,}70\right)=\boxed{1{,}203973 \text{ anual nominal act. continuamente}} \quad (m\to\infty)$

d) $i=\dfrac{d}{1-d}=\dfrac{0{,}70}{1-70}=\boxed{2{,}333333 \text{ anual efectiva}}$

e) $1-d=\left(1+\dfrac{j_{(m)}}{m}\right)^{-m} \quad j_{(m)}=\left[\left(\sqrt[-m]{1-d}\right)-1\right]m \quad j_{(2)}=\left[\left(\sqrt[-2]{1-0{,}70}\right)-1\right]2$

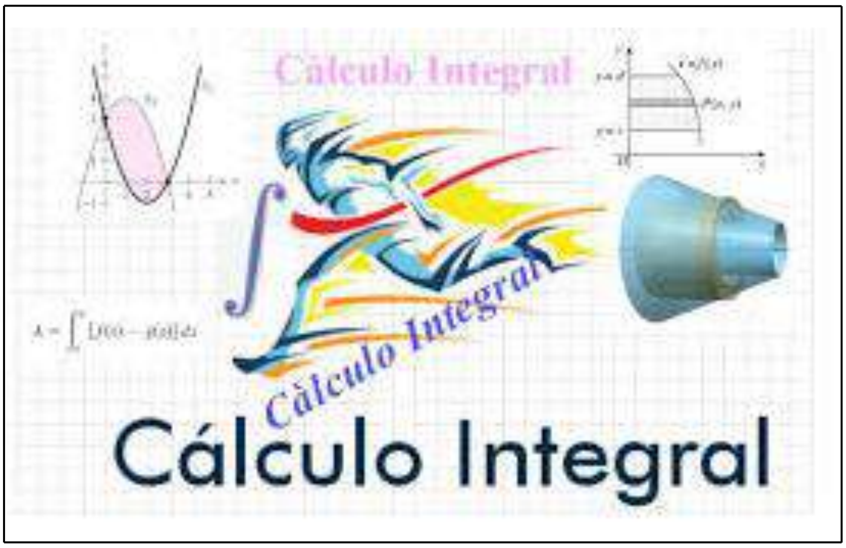
$\boxed{j_{(2)}=1{,}651484 \text{ anual nom. capitalizando semestralmente}}$

f) $j_{(6)}=\left[\left(\sqrt[-6]{1-0{,}70}\right)-1\right]6=\boxed{1{,}333271 \text{ anual nom. capitalizando bimestralmente}}$

g) $\text{e}^{\delta}=\left(1-\text{d}\right)^{-1} \quad \delta=-\ln(1-d)=-\ln(1-0{,}70)=\boxed{1{,}203973 \text{ anual nom. capit. continuamente}}$

$\boxed{i > j_{(2)} > j_{(6)} > \delta = \delta' > f_{(6)} > f_{(2)} > d}$

CAPÍTULO III
Principio Genético del Rédito



3.1. Introducción.

3.2. Teoría General del Interés.
  3.2.1. Fórmula General de Capitalización.
    3.2.1.1. Introducción.
    3.2.1.2. Aplicación a los distintos Regímenes de Capitalización.
  3.2.2. Fórmula General de Actualización.
    3.2.2.1. Introducción.
    3.2.2.2. Aplicación a los distintos Regímenes de Actualización.

3.3. Aplicaciones a Operaciones Financieras Compuestas.

PRINCIPIO GENÉTICO DEL RÉDITO

3.1.Introducción

Para que un capital produzca intereses necesariamente debe transcurrir el tiempo. El rédito o interés es una función dinámica del capital. Los intereses se generan en el campo continuo (no discreto) si bien, muchas veces, se capitalizan en ciertos intervalos de tiempo.

Si se simboliza con $\delta_{(t)}$ a la tasa instantánea de interés que representa el interés producido por una unidad de capital al cabo de un período capitalizando instantáneamente:

$1.- en 1 período produce $\delta_{(t)}$

$f_{(t)}$ en 1 período produce $f_{(t)}\ \delta_{(t)}$

$f_{(t)}$ en $\underbrace{\text{dt}}_{\text{intervalo infinitesimal}}$ producirá $f_{(t)}\ \delta_{(t)}\ dt$

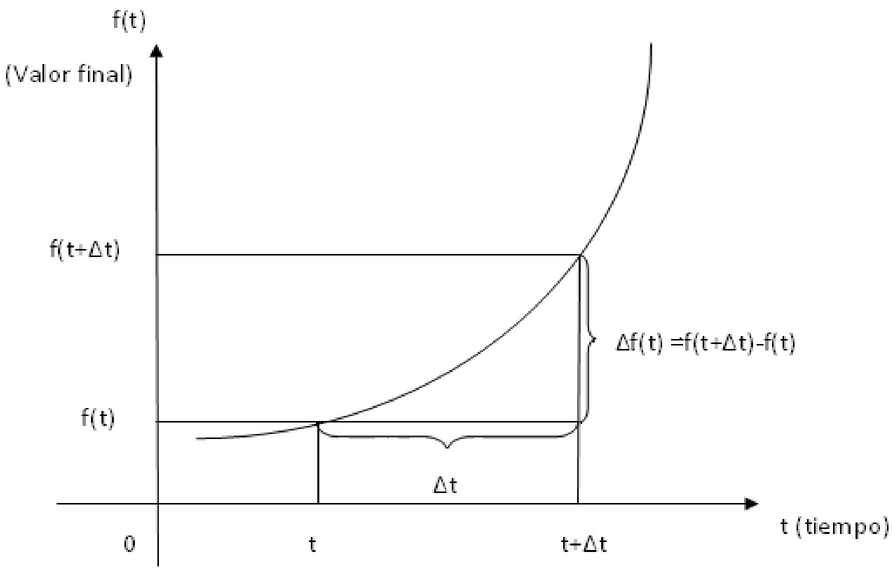
La expresión anterior representa el incremento experimentado por un capital $f_{(t)}$ en un intervalo infinitésimo dt a la tasa instantánea $\delta_{(t)}$. Esta ecuación diferencial se simboliza:

$$\boxed{df_{(t)} = f_{(t)}\ \delta_{(t)}\ dt}$$

y recibe el nombre de "Principio Genético del Rédito".

3.2. Teoría General del Interés

Si bien en el orden práctico los intereses se determinan y capitalizan al final de determinados intervalos prefijados, en la realidad financiera la generación de los mismos es continua. Gráficamente:



Si $\Delta f_{(t)} = f_{(t+\Delta t)} - f_{(t)}$ esta variación referida a la unidad de tiempo es

$$\frac{\Delta f_{(t)}}{\Delta t} = \frac{f_{(t+\Delta t)} - f_{(t)}}{\Delta t}$$ (cociente incremental)

Para analizar esta variación en un intervalo infinitesimal

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f_{(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_{(t+\Delta t)} - f_{(t)}}{\Delta t}$$

Por definición de derivada (incremento de la función $f_{(t)}$ sobre el incremento de la variable independiente cuando $\Delta t \to 0$)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f_{(t)}}{\Delta t} = \frac{df_{(t)}}{dt} = f'_{(t)}$$

Para expresarlo en una unidad de capital debo dividir por $f_{(t)}$

$$\frac{df_{(t)}}{f_{(t)}dt} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}}$$ interés ganado por unidad de capital en un intervalo infinitesimal.

Ahora bien, despejando $\delta_{(t)}$ de la ecuación del principio genético del rédito:

Siendo $df_{(t)} = f_{(t)}\ \delta_{(t)}\ dt$ y despejando $\delta_{(t)} = \dfrac{df_{(t)}}{f_{(t)}dt}$ que coincide con el primer miembro de la expresión anterior.

Luego, esta es la expresión de la tasa instantánea de interés aplicable a cualquier régimen de interés:

$$\boxed{\delta_{(t)} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}}}$$

3.2.1. Fórmula General de Capitalización

3.2.1.1. Introducción

Por el principio genético del rédito:

$df_{(t)} = f_{(t)}\ \delta_{(t)}\ dt$ y $\dfrac{df_{(t)}}{f_{(t)}} = \delta_{(t)}dt$

Para calcular los intereses producidos en el tiempo total, se integra a ambos miembros de la igualdad precedente entre 0 y n

$$\int_0^n \frac{df_{(t)}}{f_{(t)}} = \int_0^n \delta_{(t)}dt \quad \textbf{(1)}$$

$$\int_0^n \frac{df_{(t)}}{f_{(t)}} = \ln f_{(t)} \Big|_0^n = \ln f_{(n)} - \ln f_{(0)} = \ln\left(\frac{f_{(n)}}{f_{(0)}}\right) = \int_0^n \delta_{(t)}dt$$

por (1)

$$\frac{f_{(n)}}{f_{(0)}} = e^{\int_0^n \delta_{(t)}dt}$$

$$\boxed{f_{(n)} = f_{(0)}e^{\int_0^n \delta_{(t)}dt}}$$ Fórmula General de Capitalización

3.2.1.2. Aplicación a los distintos Regímenes de Capitalización

3.2.1.2.1. Régimen de Interés Simple

Considerando la función de t

$\left.\begin{matrix} f_{(t)} = 1 + it \\ f'_{(t)} = i \end{matrix}\right\} \quad \delta_{(t)} = \dfrac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} \Rightarrow \delta_{(t)} = \dfrac{i}{1+it}$ la tasa instantánea de interés resulta variable y decreciente.

Trabajando el exponente en la fórmula general de capitalización

$$\int_0^n \delta_{(t)} dt = \int_0^n \frac{i}{1+it} dt = \ln(1+it)\,|_0^n = \ln(1+in) - \ln(1+i0) = \ln(1+in)$$

Reemplazando en $f_{(n)}$

$$f_{(n)} = f_{(0)} e^{\ln(1+in)}$$

$$\boxed{f_{(n)} = f_{(0)}(1+in)}$$

3.2.1.2.2. Régimen de Interés Compuesto

Considerando la función de t

$\left.\begin{matrix} f_{(t)} = (1+i)^t \\ f'_{(t)} = (1+i)^t.\ln(1+i) \end{matrix}\right\} \quad \delta_{(t)} = \dfrac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} \Rightarrow \delta = \ln(1+i)$ la tasa instantánea de interés resulta independiente del tiempo, es una constante, por lo tanto, se simboliza δ.

$$\int_0^n \delta dt = \delta \int_0^n dt = \delta\ t\,|_0^n = \delta n - \delta 0 = \delta n$$

Reemplazando en $f_{(n)}$

$$\boxed{f_{(n)} = f_{(0)} e^{\delta n}}$$

Reemplazando δ por su igual

$$\delta = \ln(1+i)$$

Se obtiene $\quad f_{(n)} = f_{(0)} e^{\delta n} = f_{(0)} e^{\ln(1+i).n} = f_{(0)} e^{\ln\left[(1+i)^n\right]} = f_{(0)}(1+i)^n$

$$\boxed{f_{(n)} = f_{(0)}(1+i)^n}$$

3.2.2. Fórmula General de Actualización

3.2.2.1. Introducción

Partiendo de la fórmula general de capitalización

$f_{(n)} = f_{(0)} e^{\int_0^n \delta_{(t)} dt}$ despejando

$$f_{(0)} = \frac{f_{(n)}}{e^{\int_0^n \delta_{(t)} dt}} = f_{(n)} e^{-\int_0^n \delta_{(t)} dt}$$

$$\boxed{f_{(0)} = f_{(n)} e^{\int_n^0 \delta_{(t)} dt}}$$ Fórmula General de Actualización

3.2.2.2. Aplicación a los distintos Regímenes de Actualización

3.2.2.2.1. Descuento Comercial a Interés Simple

Considerando la función de *t*

$$\left.\begin{aligned} f_{(t)} &= (1-d.t)^{-1} \\ f'_{(t)} &= -(1-d.t)^{-2}(-d) \end{aligned}\right\} \quad \delta_{(t)} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} \Rightarrow \delta_{(t)} = \frac{\dfrac{d}{(1-d.t)^2}}{\dfrac{1}{1-d.t}} = \frac{d}{1-d.t}$$

$$\int_n^0 \delta_{(t)} dt = -\int_n^0 \frac{-d}{1-d.t} dt = -\ln(1-d.t)\,|_n^0 = -[\ln(1-d0) - \ln(1-dn)] = \ln(1-dn)$$

Nótese que en el primer paso se multiplica por -1 dentro y fuera de la integral para obtener la derivada de la función del denominador. Reemplazando en $f_{(0)}$

$$f_{(0)} = f_{(n)} e^{\ln(1-dn)}$$

$$\boxed{f_{(0)} = f_{(n)}(1-dn)}$$

3.2.2.2.2. Descuento Racional a Interés Simple

Considerando la función de *t*

$$\left.\begin{aligned} f_{(t)} &= (1+it) \\ f'_{(t)} &= i \end{aligned}\right\} \quad \delta_{(t)} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} \Rightarrow \delta_{(t)} = \frac{i}{1+it}$$

$$\int_n^0 \delta_{(t)} dt = \int_n^0 \frac{i}{1+it} dt = \ln(1+it)\,|_n^0 = \ln(1+i0) - \ln(1+in) = -\ln(1+in)$$

Reemplazando en $f_{(0)}$

$$f_{(0)} = f_{(n)} e^{-\ln(1+in)} = \frac{f_{(n)}}{e^{\ln(1+in)}}$$

$$\boxed{f_{(0)} = \frac{f_{(n)}}{1+in}}$$

3.2.2.2.3. Descuento Racional a Interés Compuesto

Considerando la función de *t*

$$\left.\begin{array}{l} f_{(t)} = (1+i)^t \\ f'_{(t)} = (1+i)^t \ln(1+i) \end{array}\right\} \delta_{(t)} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} \Rightarrow \delta = \ln(1+i)$$ la tasa instantánea de interés no depende de t, es constante, y se simboliza δ.

$$\int_n^0 \delta dt = \delta \int_n^0 dt = \delta\ t\,|_n^0 = \delta 0 - \delta n = -\delta n$$

Reemplazando en $f_{(0)}$

$$f_{(0)} = f_{(n)} e^{-\delta n} = \frac{f_{(n)}}{e^{\delta n}}$$

$$\boxed{f_{(0)} = f_{(n)} e^{-\delta n}}$$

Reemplazando δ por su igual:

$\delta = \ln(1+i)$ se obtiene

$$f_{(0)} = \frac{f_{(n)}}{e^{\delta n}} = \frac{f_{(n)}}{e^{\ln(1+i).n}} = \frac{f_{(n)}}{e^{\ln\left[(1+i)^n\right]}} = \frac{f_{(n)}}{(1+i)^n}$$

$$\boxed{f_{(0)} = f_{(n)} (1+i)^{-n}}$$

3.2.2.2.4. Descuento Comercial a Interés Compuesto

Considerando la función de *t*

$$\left.\begin{array}{l} f_{(t)} = (1-d)^{-t} \\ f'_{(t)} = (1-d)^{-t} \ln(1-d).(-1) \end{array}\right\} \delta'_{(t)} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} \Rightarrow \delta' = -\ln(1-d)$$ la tasa instantánea de descuento resulta independiente del tiempo y se simboliza δ'

$$\int_n^0 \delta' dt = \delta'\,|_n^0 = \delta' 0 - \delta' n = -\delta' n$$

Reemplazando en $f_{(0)}$

$$f_{(0)} = f_{(n)} e^{-\delta' n} = \frac{f_{(n)}}{e^{\delta' n}}$$

$$\boxed{f_{(0)} = f_{(n)}.e^{-\delta' n}}$$

Reemplazando δ' por su igual:

$\delta' = -\ln(1-d)$

Se obtiene

$$f_{(0)} = f_{(n)}.e^{-\delta' n} = \frac{f_{(n)}}{e^{\delta'.n}} = \frac{f_{(n)}}{e^{[-\ln(1-d)].n}} = f_{(n)} e^{\ln\left[(1-d)^n\right]} = f_{(n)} (1-d)^n$$

$$\boxed{f_{(0)} = f_{(n)} (1-d)^n}$$

3.3. Aplicaciones a Operaciones Financieras Compuestas

Este capítulo del libro tiene como objetivo realizar una aplicación de los temas desarrollados en la matemática y el análisis matemático, donde la sumatoria del campo discreto (Matemática I) se convierte en una integral en el campo continuo (Matemática II).

1- Se desarrolla el valor final de una renta compuesta por *n* cuotas vencidas (imposición).

Recordando la Fórmula General de Capitalización obtenida en el punto 3.2.1.1.

$$f_{(n)} = f_{(0)} e^{\int_0^n \delta_{(t)} dt} \qquad \textit{Fórmula General de Capitalización}$$

Se aplica dicha fórmula para encontrar el valor final de cada una de las "n" cuotas vencidas. Se simboliza con $f_{(0)}$ a la cuota constante y vencida. La primera cuota se integra desde el período 1 hasta el período n, la segunda cuota desde el período 2 hasta el período n y así sucesivamente hasta la última cuota que se ubica en el momento *n*.

Cuando se desarrolló el punto 3.2.1.2.2. para Régimen de Interés compuesto en operaciones simples o singulares se determinó que la función a integrar (exponente de la fórmula general de capitalización) era constante e igual a la tasa de instantánea:

$$\delta_{(t)} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} = \frac{(1+i)^t . \ln(1+i)}{(1+i)^t} \Rightarrow \ln(1+i) = \delta$$

Luego, se integró esta función (constante) en el campo de variación (de 0 a n) y se reemplazó dicha integral en la Fórmula General de Capitalización y se obtuvo la fórmula de monto compuesto.

Ahora, en el caso de una renta se calculan "*n*" integrales, una para cada cuota y cada una de ellas por el tiempo de capitalización que corresponda:

Para la primera cuota: $\int_1^n \delta . dt = \delta . t \,|_1^n = \delta .(n-1)$

Para la segunda cuota: $\int_2^n \delta . dt = \delta . t \,|_2^n = \delta .(n-2)$

Para la tercera cuota: $\int_3^n \delta . dt = \delta . t \,|_3^n = \delta .(n-3)$

. .

. .

. .

Para la penúltima cuota: $\int_{n-1}^n \delta . dt = \delta . t \,|_{n-1}^n = \delta . 1$

Para la última cuota: $\int_n^n \delta . dt = \delta . t \,|_n^n = \delta . 0$

Y reemplazando cada una de las n cuotas capitalizadas en la Fórmula General de Capitalización (como suma de valores finales individuales) se obtiene:

$$f_{(n)} = f_{(0)} e^{\delta(n-1)} + f_{(0)} e^{\delta(n-2)} + \ldots + f_{(0)} e^{\delta 2} + f_{(0)} e^{\delta 1} + f_{(0)} e^{\delta 0}$$

$$f_{(n)} = f_{(0)} \left[e^{\delta(n-1)} + e^{\delta(n-2)} + \ldots + e^{\delta 2} + e^{\delta 1} + e^{\delta 0} \right]$$ dentro del corchete se invierte el orden de los términos

$$f_{(n)} = f_{(0)} \left[e^{\delta 0} + e^{\delta 1} + e^{\delta 2} + \ldots + e^{\delta(n-2)} + e^{\delta(n-1)} \right]$$

En el corchete se observa la suma de términos de una progresión geométrica de razón e^{δ} y recordando que la suma de términos de una progresión geométrica es:

$$S_{pg} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad siendo\ q > 1$$

Se obtiene:

$$f_{(n)} = f_{(0)}.1.\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} \qquad \text{recordando que} \qquad \delta = \ln(1+i) \qquad \text{y reemplazando}$$

$$f_{(n)} = f_{(0)} \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = f_{(0)} \frac{e^{\ln(1+i)n} - 1}{e^{\ln(1+i)} - 1} = f_{(0)} \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}$$

$$\boxed{f_{(n)} = f_{(0)} \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

2- En esta segunda aplicación se desarrolla el valor actual de una renta compuesta por *n* cuotas vencidas (amortización).

Recordando la Fórmula General de Actualización obtenida en el punto 3.2.2.1.

$$f_{(0)} = f_{(n)} e^{\int_n^0 \delta_{(t)} dt} \qquad \textit{Fórmula General de Actualización}$$

Se aplica dicha fórmula para encontrar el valor actual de cada una de las "*n*" cuotas vencidas. Se simboliza con $f_{(n)}$ a la cuota constante y vencida. La primera cuota se actualiza desde el período 1 hasta el período 0, la segunda cuota desde el período 2 hasta el período 0 y así sucesivamente hasta la última cuota que se actualiza desde el momento *n* al momento 0.

Cuando se desarrolló el punto 3.2.2.2.3. para descuento Racional a Interés compuesto en operaciones simples o singulares se determinó que la función a integrar era constante e igual a la tasa de instantánea de interés:

$$\delta_{(t)} = \frac{f'_{(t)}}{f_{(t)}} = \frac{(1+i)^t . \ln(1+i)}{(1+i)^t} \Rightarrow \ln(1+i) = \delta$$

Luego se integró esta función (constante) en su campo de variación (de *n* a 0) y se reemplazó dicha integral en la Fórmula General de Actualización.

Ahora, en el caso de una renta se calculan "*n*" integrales, una para cada cuota y cada una de ellas por el tiempo de actualización que corresponda:

Para la primera cuota: $\int_1^0 \delta.dt = \delta.t \,|_1^0 = \delta.(-1)$

Para la segunda cuota: $\int_2^0 \delta.dt = \delta.t \,|_2^0 = \delta.(-2)$

Para la tercera cuota: $\int_3^0 \delta.dt = \delta.t \,|_3^0 = \delta.(-3)$

. .

. .

. .

Para la penúltima cuota: $\int_{n-1}^{0} \delta.dt = \delta.t\,|_{n-1}^{0} = \delta.(-(\mathrm{n}-1))$

Para la última cuota: $\int_{n}^{0} \delta.dt = \delta.t\,|_{n}^{0} = \delta.(-n)$

Y reemplazando cada una de las *n* cuotas actualizadas en la Fórmula General de Actualización (como suma de valores actuales individuales), se obtiene:

$$f_{(0)} = f_{(\mathrm{n})}e^{\delta(-1)} + f_{(\mathrm{n})}e^{\delta(-2)} + \ldots + f_{(\mathrm{n})}e^{\delta(-(n-2))} + f_{(\mathrm{n})}e^{\delta(-(n-1))} + f_{(\mathrm{n})}e^{\delta(-n)}$$

$$f_{(0)} = f_{(\mathrm{n})}\left[e^{\delta(-1)} + e^{\delta(-2)} + \ldots + e^{\delta(-(n-2))} + e^{\delta(-(n-1))} + e^{\delta(-n)}\right]$$

En el corchete se observa la suma de términos de una progresión geométrica de razón $e^{-\delta}$ y recordando que la suma de términos de una progresión geométrica es:

$$S_{pg} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \qquad ya \ que \ q<1$$

Se obtiene:

$$f_{(0)} = f_{(\mathrm{n})}.e^{\delta(-1)}.\frac{1-e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta}} \qquad recordando \ \ que \qquad \delta = \ln(1+i) \qquad y \ \ reemplazando$$

$$f_{(0)} = f_{(\mathrm{n})}(1+i)^{-1}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}\right) = f_{(\mathrm{n})}\frac{1}{1+i}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}}\right) = f_{(\mathrm{n})}\frac{1}{1+i}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{1+i}}\right) = f_{(\mathrm{n})}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{f_{(0)} = f_{(\mathrm{n})}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

CAPÍTULO IV

Rentas con Cuotas Constantes

4.1. Definición.

4.2. Elementos de una Renta. Época inicial, época de valuación y época final.

4.3. Clasificación.

4.4. Rentas Ciertas y Temporarias.
- 4.4.1. Rentas Inmediatas o Amortizaciones.
- 4.4.2. Cálculo de la tasa de interés aplicando tanteo financiero e interpolación lineal.
- 4.4.3. Imposiciones o Rentas de Ahorro.
- 4.4.4. Relaciones entre funciones financieras plurales.
- 4.4.5. Rentas Diferidas.
- 4.4.6. Rentas Anticipadas.
- 4.4.7. Relaciones entre Rentas Temporarias.
- 4.4.8. Fórmula General Unificada para Rentas Ciertas y Temporarias.

4.5. Rentas Perpetuas o Perpetuidades.
- 4.5.1. Rentas Perpetuas Inmediatas.
- 4.5.2. Rentas Perpetuas Diferidas.
- 4.5.3. Rentas Perpetuas Anticipadas.
- 4.5.4. Relaciones entre Rentas Perpetuas.

4.6. Cuadro Resumen de Rentas con Cuotas Constantes.

4.7. Aplicación (Leasing)

4.8. Ejercitación Capítulo IV.

RENTAS CON CUOTAS CONSTANTES

4.1. Definición:

Las rentas son operaciones financieras compuestas ya que en ellas existe pluralidad de prestaciones o contraprestaciones.

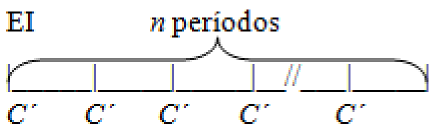
"Una renta es una sucesión de pagos equi espaciados (de igual distancia temporal) que se produce en un lapso de tiempo".

4.2. Elementos de una renta

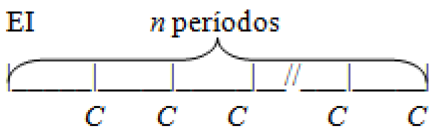
1- Término, periodicidad o cuota.
2- Tasa de interés: es la tasa utilizada para realizar las operaciones financieras de contemporización (actualización y capitalización).
3- Número de períodos, que coincide con el número de cuotas a abonar/cobrar.

Época Inicial de Pago de Cuotas

Definición: La Época Inicial es el inicio del período en el que se abona la primera cuota.



Renta con Cuotas Adelantadas

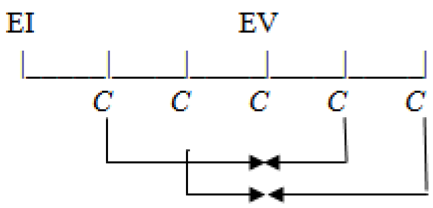


Renta con Cuotas Vencidas

Época de Valuación

Definición: La Época de Valuación es el momento que se elige para contemporizar o valuar todas las cuotas.

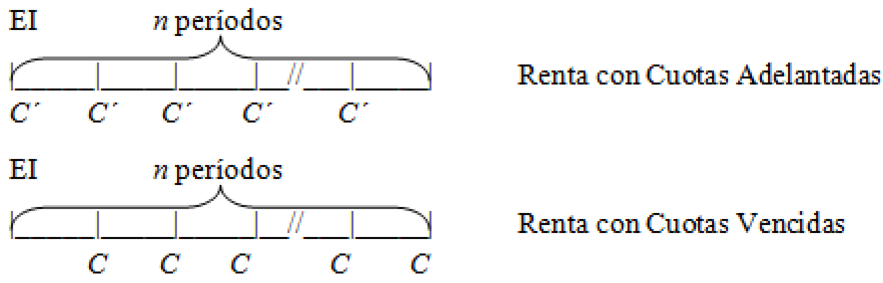
Aquellas cuotas ubicadas con anterioridad a la época de valuación serán capitalizadas, incrementando su valor. Aquellas cuotas ubicadas con posterioridad a la época de valuación serán actualizadas, disminuyendo su valor. La cuota ubicada en la época de valuación no sufrirá modificación alguna.



La suma de todas las cuotas contemporizadas se denomina "Valor Financiero Global" de una renta. Cabe destacar que la suma aritmética de todas las cuotas no tiene significado financiero alguno.

Época Final

Definición: La Época Final es el final del último período en el que se paga la última cuota.



4.3. Clasificación

1- Según los elementos que la integran:

a) Rentas ciertas o de crédito puro: en ellas existen solamente los tres elementos mencionados anteriormente. Los pagos/cobros se realizarán indefectiblemente.

b) Rentas de previsión, contingentes o aleatorias: en ellas existe un elemento aleatorio que condiciona la realización o pago de la contraprestación. Los seguros (que cubren todo tipo de riesgo) son rentas aleatorias en las cuales el acaecimiento u ocurrencia del riesgo asegurado es el elemento condicionante. Se estudian en Cálculo Actuarial (Capítulo VIII). Como ejemplo, en un mal llamado seguro de vida (en realidad es un seguro de muerte), el beneficiario designado en la póliza cobrará el "premio" si el asegurado designado en la póliza fallece en el tiempo de cobertura de la misma. Si el deceso del asegurado no se produce en el período de vigencia del contrato del seguro la compañía aseguradora no realizará pago alguno. El verdadero seguro de vida es el que contrata una persona hasta una determinada edad y si sobrevive a dicha edad ella cobra el seguro (es asegurado y beneficiario).

2- Según el momento que se elija para el pago de las cuotas:

a) Rentas con cuotas vencidas o pos pagables: cada cuota se abona al final de cada período.

b) Rentas con cuotas adelantadas o prepagables: cada cuota se abona al inicio de cada período.

3- Según su duración:

a) Rentas temporarias: tienen un número finito de cuotas. Existe una última cuota.

b) Rentas perpetuas: no existe una última cuota pudiendo considerar que el número de períodos $n \to \infty$ En una renta perpetua la cuota está formada sólo por los intereses de la deuda, no existe amortización de deuda, y por ello es perpetua.

4- Según el objetivo de la renta:

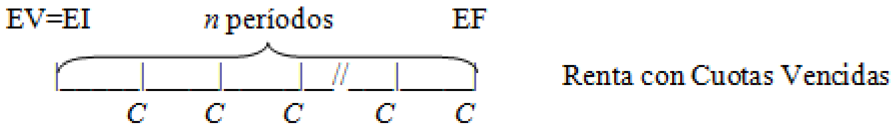
a) Rentas de Préstamo o de Financiación o Amortizaciones: el objetivo de estas rentas es cancelar una deuda y se logra con el pago del préstamo más los intereses que la institución financiera cobra (a una cierta tasa activa) por la financiación.

b) Rentas de Ahorro o de Capitalización o Imposiciones: el objetivo de estas rentas es formar un capital que se obtiene con el depósito de las cuotas más los intereses que el banco abona (a una cierta tasa pasiva) por la colocación de los fondos.

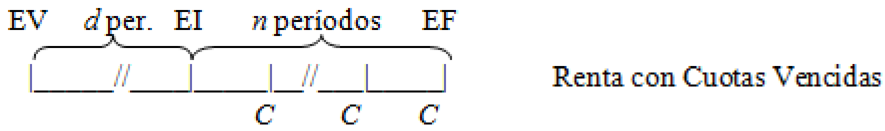
c) Rentas Mixtas o Rentas de Ahorro y Préstamos: en este caso las rentas se originan como una Imposición (ahorro) y a partir de un cierto período se transforman en una Amortización (deuda). El ejemplo más corriente es los Círculos de Ahorro y Préstamo para la compra de automotores.

5- Según la coincidencia de la época inicial y la época de valuación:

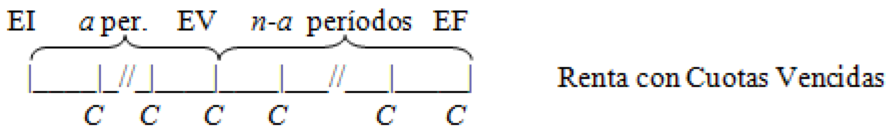
a) Rentas Inmediatas o Amortizaciones: en este caso coinciden la época inicial con la época de valuación.



b) Rentas Diferidas: en este caso la época de valuación de las cuotas es anterior la época inicial de pago. Existe un período de diferimiento (*d*) en el cual no se abonan cuotas.



c) Rentas Anticipadas: en este caso la época de valuación es posterior a la época inicial de pago. Se abonan (*a*) cuotas anticipadamente. Ej.: círculos de ahorro y préstamo.



6- Según la variabilidad de la cuota:

a) Rentas con cuotas constantes: todas las cuotas son iguales (Capítulo IV)
b) Rentas con cuotas variables (Capítulo V): la variabilidad se puede dar en:
I- Progresión aritmética
II- Progresión geométrica
III- En forma arbitraria (sin ley de variabilidad – Teoría de las Inversiones).

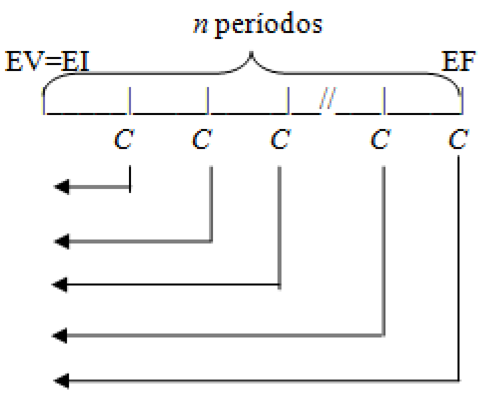
4.4. Rentas Ciertas y Temporarias

4.4.1. Rentas Inmediatas o Amortizaciones

En estas rentas coincide la época inicial con la época de valuación.

4.4.1.1. Con cuotas vencidas

Gráficamente



Como la época de valuación es el momento inicial para encontrar el valor financiero global de una amortización se deben actualizar todas las cuotas.

$$V_{\overline{n|}} = \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^n}$$

$$V_{\overline{n|}} = C\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Dentro del corchete se observa una suma de términos de una progresión geométrica en la cual:

q = razón de la progresión = $(1+i)^{-1} < 1$
a_1 = primer término = $(1+i)^{-1}$
n = número de términos = n cuotas

Siendo la suma de términos de una progresión geométrica $S_g = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ para $q< 1$:

$$V_{\overline{n|}} = C\frac{1}{1+i}\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{C}{1+i}\left[\frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{\frac{1+i-1}{1+i}}\right] = C\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n.i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i}} \quad \text{siendo } a_{\overline{n|}i} = \underbrace{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n i}}_{\text{ampliada}} = \underbrace{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}_{\text{reducida (práctica)}} \quad \text{el factor plural de actualización}$$

Forma de escritura: ampliada / reducida (práctica)

El factor plural de actualización representa el "valor actual" de *"n"* cuotas unitarias (de \$1.-) y vencidas actualizadas a una cierta tasa "*i*".

Si se despeja la cuota $\boxed{C = V_{\overline{n|}}a^{-1}_{\overline{n|}i} = V_{\overline{n|}}\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$

La inversa del factor plural de actualización se denomina "función cuota de una amortización" y representa la cuota vencida que se debe abonar durante "*n*" períodos a una cierta tasa "*i*" para cancelar una deuda de \$1.-

<u>Ejemplo</u>:

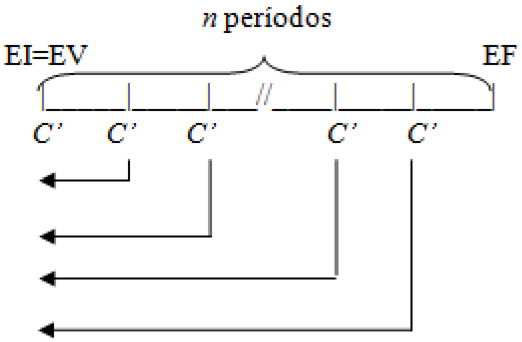
Suponiendo que se abonan 10 cuotas mensuales vencidas de \$10.000.- al 1% mensual, calcular la deuda que se cancela y los intereses que se abonan por la financiación.

$$V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10.000\frac{1-1{,}01^{-10}}{0{,}01} = \boxed{\$94.713{,}04}$$

$$Intereses\ abonados = nC - V_{\overline{n|}} = 100.000 - 94.713{,}04 = \boxed{\$5.286{,}96}$$

4.4.1.2. Con cuotas adelantadas

Gráficamente:



Como en el caso anterior, para encontrar el valor financiero global de esta renta se deben actualizar todas las cuotas adelantadas, salvo la primera.

$$V'_{\overline{n|}}=C'+\frac{C'}{1+i}+\frac{C'}{(1+i)^2}+\frac{C'}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{C'}{(1+i)^{n-1}}$$

$$V'_{\overline{n|}}=C'\left[1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Dividiendo ambos miembros por $1+i$

$$\frac{V'_{\overline{n|}}}{1+i}=C'\left[\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]$$

$\boxed{V'_{\overline{n|}}=C'(1+i)a_{\overline{n|}i}}$ siendo $\boxed{a_{\overline{n|}i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$ el factor plural de actualización

Se suele simbolizar:

$\boxed{V'_{\overline{n|}}=C'a'_{\overline{n|}i}}$ donde $\boxed{a'_{\overline{n|}i}=(1+i)a_{\overline{n|}i}}$

Ejemplo:

Suponiendo que se abonan 10 cuotas mensuales adelantadas de \$10.000.- al 1% mensual, calcular la deuda que se cancela y los intereses que se abonan por la financiación.

$$V'_{\overline{n|}}=C'(1+i)a_{\overline{n|}i}=C'(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=10.000x1,01\frac{1-1,01^{-10}}{0,01}=\boxed{\$95.660,18}$$

Al abonar cuotas adelantadas el deudor puede cancelar una deuda mayor, ya que cada cuota paga intereses por 1 período menos.

$$Intereses\ abonados=nC'-V'_{\overline{n|}}=10x10.000-95.660,18=\boxed{\$4.339,82}$$

4.4.1.3. Relación entre $a_{\overline{n|}i}$ y $a'_{\overline{n|}i}$

Considerando C = \$1.-

$$a'_{\overline{n|}i} = (1+i)a_{\overline{n|}i} = (1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = \frac{1+i-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] + \frac{i}{i}$$

$$\boxed{a'_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n-1|}i} + 1}$$

Conclusión: una amortización con "*n*" cuotas unitarias adelantadas es igual a una amortización con "*n-1*" cuotas unitarias vencidas más la primera cuota unitaria ubicada en la época de valuación. (Si la cuota es de \$*C'* ambos miembros se multiplican por *C'*).

$$\boxed{C'a'_{\overline{n|}i} = C'(a_{\overline{n-1|}i} + 1) = C'a_{\overline{n-1|}i} + C'}$$

Ejemplo:

Considerando el ejemplo anterior:

$$C'a'_{\overline{n|}i} = 10.000x1,01\frac{1-1,01^{-10}}{0,01} = \boxed{\$95.660,18}$$

$$C'a_{\overline{n-1|}i} + C' = 10.000\frac{1-1,01^{-9}}{0,01} + 10.000 = 85.660,18 + 10.000 = \boxed{\$95.660,18}$$

4.4.1.4. Análisis Funcional de las funciones plurales de una Amortización

4.4.1.4.1. Valor Actual de una Renta. Factor Plural de Actualización

Recordando que: $V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i}$ y siendo C=\$1.- , $a_{\overline{n|}i}$ representa el valor actual de "*n*" cuotas unitarias y vencidas actualizadas a una cierta tasa "*i*".

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^j} = \sum_{j=1}^{n}(1+i)^{-j} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i}(1+i)^{-n}$$

4.4.1.4.1.1. Para "*n*" variable e "*i*" constante

Valores extremos

n	$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
0	0 (1)
$\to \infty$	$\to \frac{1-0}{i} \to \frac{1}{i}$ Renta Perpetua (asíntota) (2)

(1) Si no se abonan cuotas no se amortiza ninguna deuda.
(2) Si el número de cuotas $n \to \infty$ la renta es perpetua.
Observando los valores extremos se deduce que la función es creciente.

Derivadas

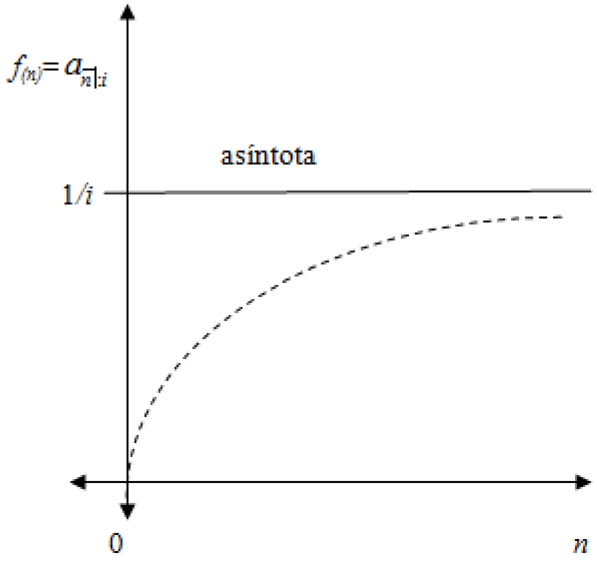
$$f_{(n)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i}(1+i)^{-n}$$

Recordando que: $f_{(x)} = c.A^{g(x)}$ $\quad f'_{(x)} = c.A^{g(x)}.\ln A.g'_{(x)}$

$$f'_{(n)} = 0 - \frac{1}{i}(1+i)^{-n}.\ln(1+i).(-1) = \frac{\delta}{i}(1+i)^{-n} > 0 \Rightarrow \text{función monótona y creciente}$$

$$f''_{(n)} = \frac{\delta}{i}.(1+i)^{-n}.\ln(1+i).(-1) = -\frac{\delta^2}{i}(1+i)^{-n} < 0 \Rightarrow \text{función cóncava hacia abajo}$$

Gráfico



Aclaración: la variable independiente "*n*", cantidad de cuotas, es discreta sólo toma valores enteros y por lo tanto la curva no es continua. Esta aclaración es válida para todas las funciones analizadas considerando "*n*" variable.

4.4.1.4.1.2. Para "*i*" variable y "*n*" constante

Valores extremos

Los valores extremos se obtienen reemplazando "*i*" en la sumatoria de las cuotas unitarias.

i	$a_{\overline{n}\vert i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$
0	1+1+…+1= n (1)
$\to \infty$	$\to 0$ asíntota (2)

(1) Si la tasa activa es 0, con "*n*" cuotas de $1.- se cancela una deuda de $*n*.- (en la forma reducida de escritura queda una indeterminación 0/0)

(2) Si la tasa activa es muy alta con "*n*" cuotas de $1.- se cancela una deuda muy pequeña. Cada peso será íntegramente intereses y no habrá amortización de deuda.

Observando los valores extremos se deduce que la función es decreciente y como presenta una asíntota para $i \to \infty$ el decrecimiento es con concavidad hacia arriba.

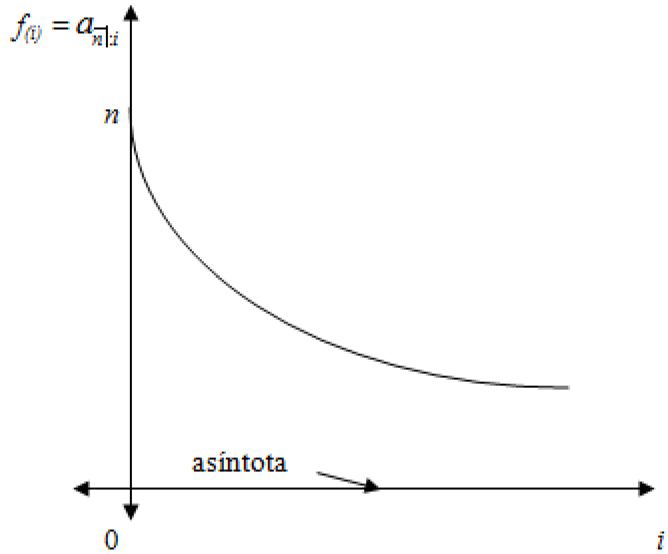
Derivadas

$$f_{(i)} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}$$

Recordando que: $f_{(x)} = g_{(x)}^{\alpha}$ entonces $f'_{(x)} = \alpha . g_{(x)}^{\alpha-1} . g'_{(x)}$

$$f'_{(i)} = -(1+i)^{-2} - 2(1+i)^{-3} - \ldots - n(1+i)^{-(n+1)} < 0 \Rightarrow \text{función monótona y decreciente}$$
$$f''_{(i)} = 2(1+i)^{-3} + 6(1+i)^{-4} + \ldots + n(n+1)(1+i)^{-(n+2)} > 0 \Rightarrow \text{función cóncava hacia arriba}$$

Gráfico



Aclaración: en este caso la variable independiente (eje de abscisas) es continua y por ello el trazo de la curva es continuo. Esta aclaración es válida para todas las funciones analizadas y para "*i*" variable.

4.4.1.4.2. Función Cuota de una Amortización

Recordando que $V_{\overline{n|}} a^{-1}_{\overline{n|}i} = C$ y siendo $V_{\overline{n|}} = 1.-$, $a^{-1}_{\overline{n|}i}$ representa la cuota periódica vencida que debe abonarse durante "*n*" períodos para cancelar una deuda de \$1.- a una cierta tasa activa "*i*".

$$a^{-1}_{\overline{n|}i} = \frac{1}{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^j}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}} = \left[\sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j}\right]^{-1} = \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Para "*i*" variable y "*n*" constante (solamente)

Valores extremos

Los valores extremos se obtienen reemplazando "*i*" en la sumatoria invertida de las cuotas unitarias.

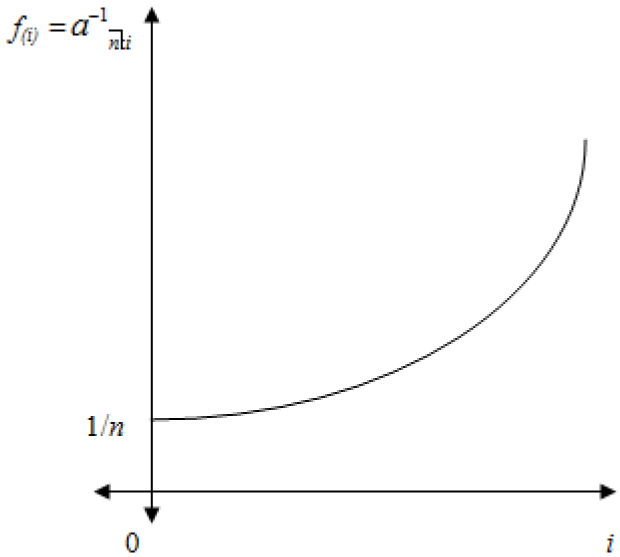
i	$a^{-1}_{\overline{n|}i} = \frac{1}{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}}$
0	$\frac{1}{1+1+1+\ldots+1} = \frac{1}{n}$ (1)
$\to \infty$	$\to \frac{1}{0} \to \infty$ (2)

(1) Si la tasa activa es igual a 0, para cancelar una deuda de \$1.- se abonará, en cada período, la *n*-ésima parte de ese \$1.-

(2) A medida que la tasa activa de interés aumenta la cuota también aumenta.

Observando los valores extremos se deduce que la función es monótona y creciente y como “no” presenta una asíntota para $i \to \infty$ el crecimiento es con concavidad hacia arriba.

Gráfico



4.4.2. Cálculo de la tasa de interés aplicando tanteo financiero e interpolación lineal

a) Para funciones crecientes $a^{-1}_{\overline{n}|i}$ y $s_{\overline{n}|i}$ (ver punto 4.4.1.4.2. y 4.4.3.4.1.2. caso n>2)

Suponiendo que en una renta inmediata se conoce el valor de la deuda, la cuota y el número de períodos en el que se amortizará, determinar la tasa de interés. Recordando que:

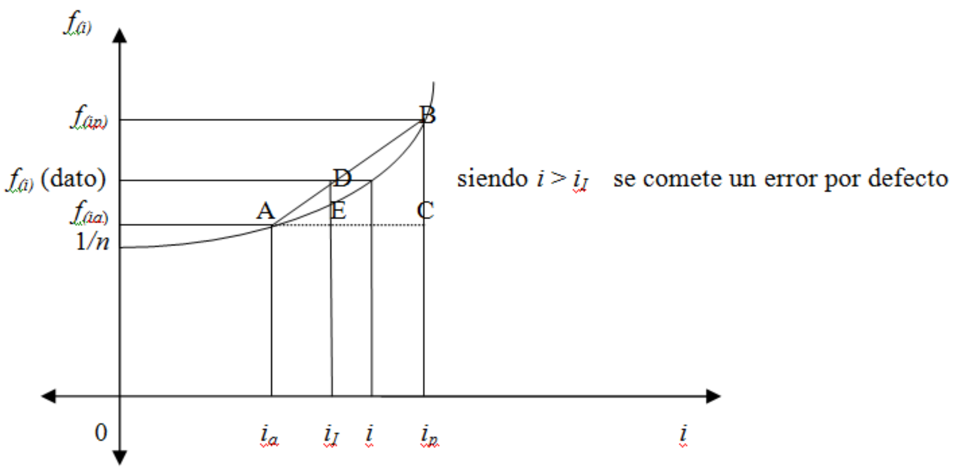
$V_{\overline{n}|} = C a_{\overline{n}|i}$ y despejando la función cuota de una amortización $a^{-1}_{\overline{n}|i} = \dfrac{C}{V_{\overline{n}|}} = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

El cociente $a^{-1}_{\overline{n}|i} = \dfrac{C}{V_{\overline{n}|}}$ es un número que se simboliza $f_{(i)}$

“Tantear financieramente” significa encontrar dos valores de i (que se simbolizan i_a: tasa anterior e i_p: tasa posterior) tal que:

$$f_{(i_a)} < f_{(i)} < f_{(i_p)}$$

Gráficamente:



"Interpolar linealmente" significa considerar que en el intervalo $[i_a \,;\, i_p]$ la función crece linealmente en vez de exponencialmente. En el gráfico se reemplaza, en ese intervalo, el segmento de arco por un segmento de recta. Desde la prolongación de $f_{(i)}$ y en la intersección con el segmento de recta se traza una vertical al eje horizontal quedando así formados 2 triángulos: el ABC y el ADE. (Ver gráfico)

Dichos triángulos son "semejantes" ya que existe un teorema que dice: "si por uno de los lados de un triángulo se traza una paralela a cualquiera de sus otros dos lados se forma un triángulo interior semejante al mayor".

Aplicando la propiedad de "proporcionalidad de lados homólogos" (lados que se oponen a un mismo ángulo) de triángulos semejantes se obtiene:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \text{ y reemplazando } \frac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}} \text{ despejando}$$

$$\boxed{i_I = i_a + \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}}(i_p - i_a)}$$

En el gráfico se puede observar que $i_I < i$ y por lo tanto se comete un error "por defecto".

<u>Ejemplo:</u>

Se contrae una deuda de \$23.000.- que se cancela mediante el pago de 19 cuotas mensuales y vencidas de \$2.000.-. Calcular la tasa de interés del préstamo por tanteo financiero e interpolación lineal cuando el error es menor a 0,001.

$$a^{-1}_{\overline{19|}i} = \frac{C}{V_{\overline{n|}}} = \frac{2.000}{23.000} = 0{,}086957 = f_{(i)}$$

Tanteo financiero:

i	$a^{-1}_{\overline{19|}i} = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-19}}$
0,060	0,089621
i_a = 0,056	0,086839 = $f_{(ia)}$
i_p = 0,057	0,087531 = $f_{(ip)}$

Se cumple que $f_{(i_a)} < f_{(i)} < f_{(i_p)}$

Interpolación lineal:

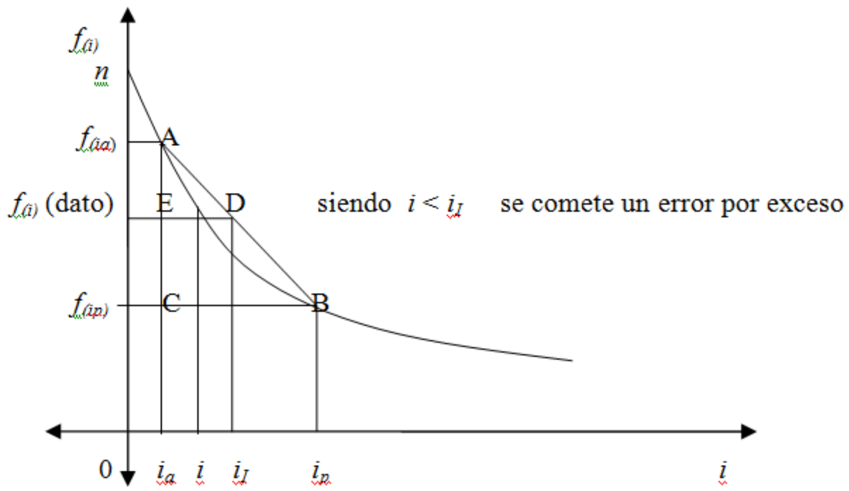
$$\boxed{i_I = i_a + \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}}(i_p - i_a) = 0,056 + \frac{0,086957 - 0,086839}{0,087531 - 0,086839}(0,057 - 0,056) = 0,05617052}$$

b) Para funciones decrecientes $a_{\overline{n}|i}$ y $s^{-1}_{\overline{n}|i}$ (ver punto 4.4.1.4.1.2. y 4.4.3.4.2.)

Para las funciones decrecientes la fórmula a utilizar es la misma que para funciones crecientes pero el error que se comete es por "exceso" ya que al tantear financieramente:

$f_{(i_p)} < f_{(i)} < f_{(i_a)}$

Gráficamente:



Con idéntico procedimiento al utilizado para funciones crecientes y observando el gráfico precedente:

$\dfrac{\overline{ED}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ y reemplazando $\dfrac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \dfrac{f_{(i_a)} - f_{(i)}}{f_{(i_a)} - f_{(i_p)}}$ multiplicando numerador y denominador del segundo miembro por (-1) y despejando:

$$\boxed{i_I = i_a + \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}}(i_p - i_a)}$$

<u>Conclusión</u>: cuando se trabaja con funciones decrecientes, la fórmula para calcular la tasa de interés por interpolación lineal es la misma a la utilizada para funciones crecientes pero cambia el error cometido, es un "error por exceso".

<u>Ejemplo:</u>

Se contrae una deuda de \$23.000.- que se cancela mediante el pago de 19 cuotas mensuales y vencidas de \$2,000.-. Calcular la tasa de interés del préstamo por tanteo financiero e interpolación lineal cuando el error es menor a 0,001.

$$a_{\overline{19}|i} = \frac{V_{\overline{n}|}}{C} = \frac{23.000}{2.000} = 11,5 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = f_{(i)}$$

Tanteo financiero:

i	$a_{\overline{19}|i} = \frac{1-(1+i)^{-19}}{i}$
$ia = 0,056$	$11,515562 = f_{(ia)}$
$ip = 0,057$	$11,424579 = f_{(ip)}$

Se cumple que $f_{(i_p)} < f_{(i)} < f_{(i_a)}$

Interpolación lineal:

$$\boxed{i_I = i_a + \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}}(i_p - i_a) = 0,056 + \frac{11,5 - 11,515562}{11,424579 - 11,515562}(0,057 - 0,056) = 0,05617104}$$

En la interpolación lineal con funciones decrecientes se comete un error por “exceso”.

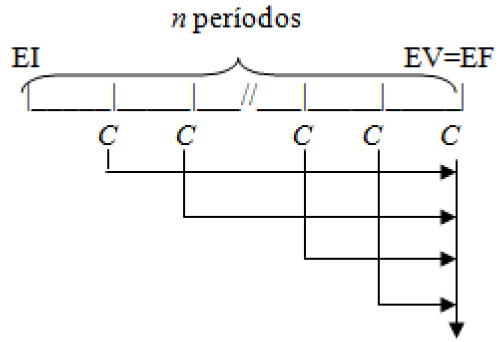
Aclaración: Los errores cometidos en el cálculo de la tasa de interés por interpolación lineal son los indicados: para las funciones crecientes (error por defecto) y para las funciones decrecientes (error por exceso) porque las funciones plurales presentan concavidad hacia arriba.

4.4.3. Imposiciones o Rentas de Ahorro

En estas rentas todas las cuotas se capitalizan a la época de valuación o época final.

4.4.3.1. Con cuotas vencidas

Gráficamente:



Como la época de valuación está ubicada al final, para encontrar el valor financiero global de una imposición se deben capitalizar todas las cuotas, salvo la última que está ubicada en el momento calculatorio. En la siguiente ecuación se escriben desde la última cuota hasta la primera.

$$S_{\overline{n}|} = C + C(1+i) + C(1+i)^2 + \ldots + C(1+i)^{n-1}$$

$$S_{\overline{n}|} = C[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}]$$

El corchete es la suma de términos de una progresión geométrica en la cual:

a_1 = primer término =1

q = razón de la progresión = $1+i > 1$
n = número de términos = n cuotas
S_g = suma de términos de una progresión geométrica

Siendo $S_g = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ para $q > 1$ se obtiene:

$$S_{\overline{n|}} = C \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$S_{\overline{n|}} = C \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$\boxed{S_{\overline{n|}} = C s_{\overline{n|}i}}$ siendo $s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ el factor plural de capitalización

El factor plural de capitalización representa el “valor final” de *“n”* cuotas unitarias (de \$1.-) y vencidas capitalizadas a una cierta tasa *“i”*.

Despejando la cuota $\boxed{C = S_{\overline{n|}} s_{\overline{n|}i}^{-1}}$

La inversa del “factor plural de capitalización” se denomina función cuota de una imposición y representa la cuota periódica y vencida que debe depositarse durante “*n*” períodos para formar un capital de \$1.- capitalizándolas a una cierta tasa de interés “*i*”.

<u>Ejemplo</u>:

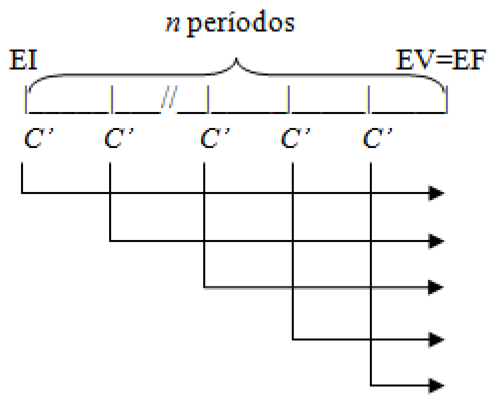
Suponiendo que se depositan 10 cuotas mensuales de \$10.000.- al 1% mensual calcular el ahorro que se obtiene y los intereses que se cobran por los depósitos.

$$S_{\overline{n|}} = C s_{\overline{n|}i} = C \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10.000 \frac{1,01^{10} - 1}{0,01} = \boxed{\$104.622,13}$$

$$\textit{Intereses}\text{ ganados} = S_{\overline{n|}} - nC = 104.622,13 - 100.000 = \boxed{\$4.622,13}$$

4.4.3.2. <u>Con Cuotas Adelantadas</u>

Gráficamente:



Nuevamente, para encontrar el valor financiero global de esta renta se deben capitalizar todas las cuotas, inclusive la última:

$$S'_{\overline{n|}} = C'(1+i) + C'(1+i)^2 + C'(1+i)^3 + ... + C'(1+i)^n$$

$$S'_{\overline{n}|} = C'[(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^n]$$

Dividiendo ambos miembros por (1+i):

$$\frac{S'_{\overline{n}|}}{(1+i)} = C'[1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{n-1}]$$

En el corchete del segundo miembro se obtiene el factor plural de capitalización cuya fórmula ya se dedujo. Luego:

$$S'_{\overline{n}|} = C'(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$\boxed{S'_{\overline{n}|} = C'(1+i)s_{\overline{n}|i}}$ siendo $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ el factor plural de capitalización

Si se simboliza $\boxed{s'_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}}$ entonces:

$$\boxed{S'_{\overline{n}|} = C's'_{\overline{n}|i}}$$

Ejemplo:

Suponiendo que se depositan 10 cuotas mensuales adelantadas de \$10.000.- al 1% mensual, calcular el ahorro que se obtiene y los intereses que se ganan por los depósitos.

$$S'_{\overline{n}|} = C'(1+i)s_{\overline{n}|i} = C'(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i} = 10.000x1,01\frac{1,01^{10}-1}{0,01} = \boxed{\$105.668,35}$$

$$Intereses \text{ ganados} = S'_{\overline{n}|} - nC' = 105.668,35 - 100.000 = \boxed{\$5.668,35}$$

Al ser las cuotas adelantadas el inversor ahorra y gana más intereses que cuando las cuotas son vencidas.

4.4.3.3. Relación entre $s_{\overline{n}|i}$ y $s'_{\overline{n}|i}$

Considerando C = \$1.-

$$s'_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i} = (1+i)\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] = \frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i} = \left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}\right] - \frac{i}{i}$$

$$\boxed{s'_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1}$$

Conclusión: una imposición con "n" cuotas unitarias adelantadas es igual a una imposición con "$n+1$" cuotas unitarias vencidas menos la última cuota unitaria ubicada en la época de valuación. (Si la cuota es de \$$C$' ambos miembros se multiplican por C').

$$\boxed{C's'_{\overline{n}|i} = C'(s_{\overline{n+1}|i} - 1) = C's_{\overline{n+1}|i} - C'}$$

Ejemplo:

Considerando el ejemplo anterior:

$$C'(1+i)s_{\overline{n|}i} = 10.000x1,01\frac{1,01^{10}-1}{0,01} = \boxed{\$105.668,35}$$

$$C's_{\overline{n+1|}i} - C' = 10.000\frac{1,01^{11}-1}{0,01} - 10.000 = 115.668,35 - 10.000 = \boxed{\$105.668,35}$$

4.4.3.4. Análisis funcional de las funciones plurales de una Imposición

4.4.3.4.1. Valor Final de una Renta. Factor Plural de Capitalización

Recordando que: $S_{\overline{n|}} = Cs_{\overline{n|}i}$ y siendo C=\$1.- , $s_{\overline{n|}i}$ representa el valor final de "n" cuotas unitarias y vencidas capitalizadas a una cierta tasa "i".

$$s_{\overline{n|}i} = 1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(1+i)^j = \frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{1}{i}(1+i)^n - \frac{1}{i}$$

4.4.3.4.1.1. Para "n" variable e "i" constante

Valores extremos

n	$s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$
0	0 (1)
$\to\infty$	$\to\infty$ (2)

(1) Si no se depositan cuotas el ahorro será nulo.

(2) Si aumenta el número de cuotas aumenta el capital ahorrado.

Derivadas

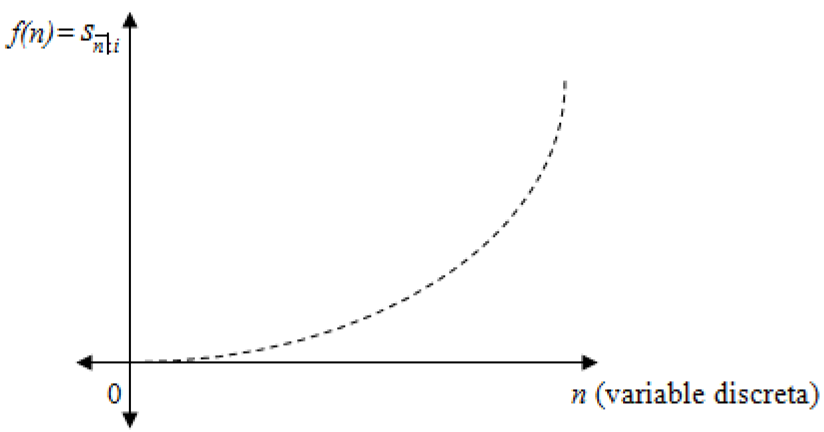
$$f_{(n)} = \frac{1}{i}(1+i)^n - \frac{1}{i}$$

Recordando que: $f_{(x)} = c.A^x$ $\quad f'_{(x)} = c.A^x.\ln A$

$$f'_{(n)} = \frac{1}{i}(1+i)^n\ln(1+i) - 0 = \frac{\delta}{i}(1+i)^n > 0 \Rightarrow \text{función monótona y creciente}$$

$$f''_{(n)} = \frac{\delta}{i}(1+i)^n\ln(1+i) = \frac{\delta^2}{i}(1+i)^n > 0 \Rightarrow \text{función cóncava hacia arriba}$$

Gráfico



4.4.3.4.1.2. Para "i" variable y "n" constante

Valores extremos

Los valores extremos se obtienen reemplazando *"i"* en la sumatoria.

i	$s_{\overline{n}\rceil i} = 1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{n-1}$
0	$1+1+1+...+1=n$ (1)
$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$ (2)

(1) Si la tasa pasiva es igual a 0, al depositar "*n*" cuotas de \$1.- se ahorrará \$*n* (En la fórmula de la imposición queda una indeterminación del tipo 0/0)

(2) Si la tasa pasiva $\rightarrow\infty$ el ahorro también $\rightarrow\infty$ (En la fórmula se obtiene un indeterminación del tipo ∞/∞)

Observando los valores extremos se deduce que la función es monótona y creciente y como no presenta una asíntota para $i \rightarrow \infty$ el crecimiento es con concavidad hacia arriba.

Derivadas

$$f_{(i)} = 1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{(n-1)}$$

Recordando que: $f_{(x)} = g_{(x)}^{\alpha}$ entonces $f'_{(x)} = \alpha . g_{(x)}^{\alpha-1} . g'_{(x)}$

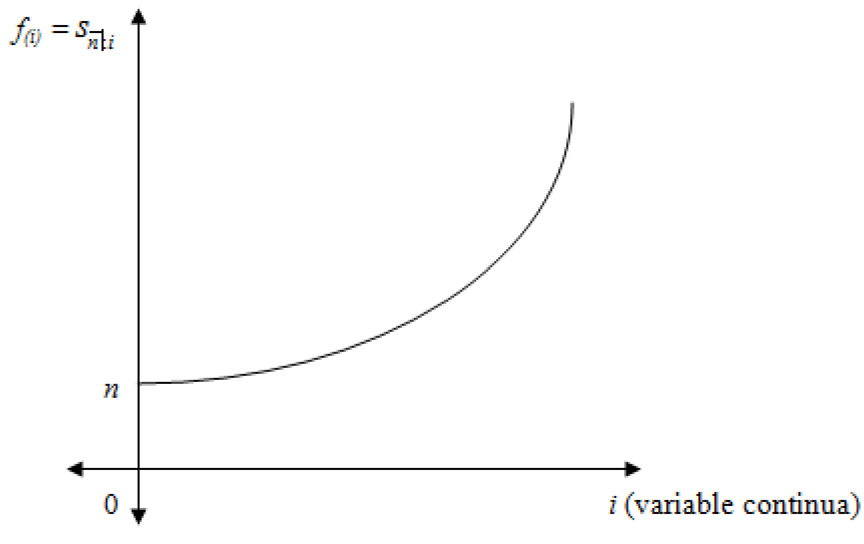
$$f'_{(i)} = 0+(1+i)^0+2(1+i)^1+3(1+i)^2+...+(n-1)(1+i)^{(n-2)} > 0 \Rightarrow \text{función monótona y creciente}$$

(Si *n*=0 y *n*=1 no es renta)

$$f''_{(i)} = 0+2(1+i)^0+6(1+i)^1+...+(n-1)(n-2)(1+i)^{(n-3)} > 0 \Rightarrow \text{función cóncava hacia arriba}$$

Vale para *n*>2 (ver casos particulares).

Gráfico del caso general (*n*>2)



Casos particulares

- Para *n*= 1

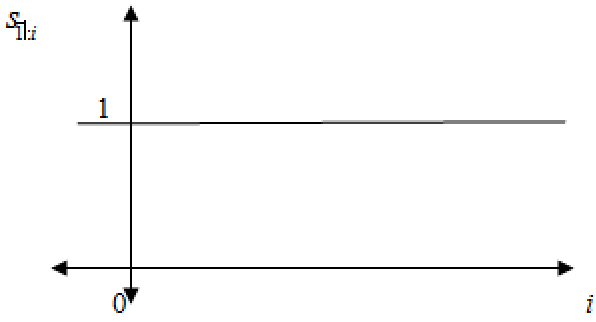
EI *n*=1 EV

\$1

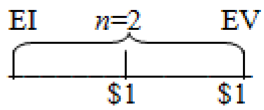
$$s_{\overline{1}\rceil i} = \frac{(1+i)^1-1}{i} = 1$$ En este caso se deposita una única cuota (no es una renta) y en ese momento termina la operación, sin siquiera ganar intereses. Las derivadas primera y se-

gunda son iguales a 0 con lo que la función es constante (lineal). Significa que cualquiera sea la tasa que la institución bancaria abone el ahorro será de \$1.-

Gráfico



- Para $n = 2$



$$s_{\overline{2}|i} = \frac{(1+i)^2 - 1}{i} = \frac{1+2i+i^2-1}{i} = \frac{2i+i^2}{i} = \frac{i(2+i)}{i} = 2+i$$

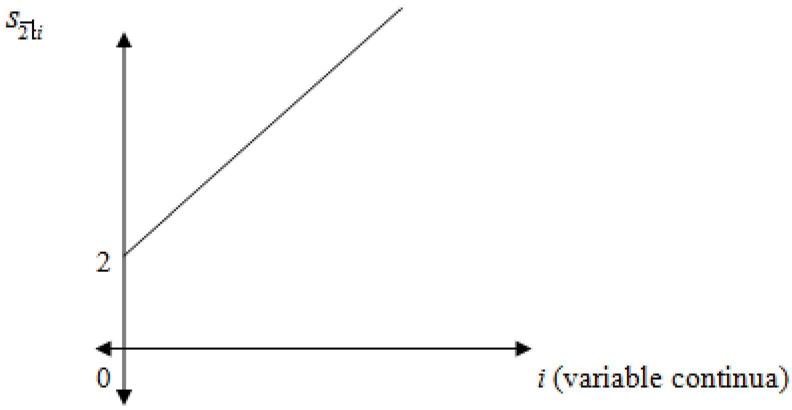
En este caso se deposita el primer \$1.- que gana \$$i$.- de interés, se deposita el segundo \$1.- y se retira el ahorro.

$f'_{(i)} = 0+1 = 1 > 0 \Rightarrow$ función monótona y creciente

$f''_{(i)} = 0 \Rightarrow$ función lineal

La función creciente y lineal es la recta que corresponde al ángulo de 45° partiendo del punto (0;2).

Gráfico



4.4.3.4.2. Función Cuota de una Imposición

Recordando que: $C = S_{\overline{n}|} s^{-1}_{\overline{n}|i}$ y siendo $S_{\overline{n}|} = \$1.-$, $s^{-1}_{\overline{n}|i}$ representa la cuota periódica vencida que debe depositarse durante "n" períodos para reunir un capital de \$1.- a una cierta tasa "i".

$$s^{-1}_{\overline{n}|i}=\frac{1}{1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{(n-1)}}=\frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1}(1+i)^j}=\left[\sum_{j=0}^{n-1}(1+i)^j\right]^{-1}=\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

<u>Para “*i*” variable y “*n*” constante</u> (solamente)

<u>Valores extremos</u>

Los valores extremos se obtienen reemplazando “*i*” en la sumatoria.

i	$s^{-1}_{\overline{n}\vert i}=\frac{1}{1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{(n-1)}}$
0	$\frac{1}{1+1+1+\ldots+1}=\frac{1}{n}$ (1)
$\to\infty$	$\to\frac{1}{\infty}\to 0$ asíntota (2)

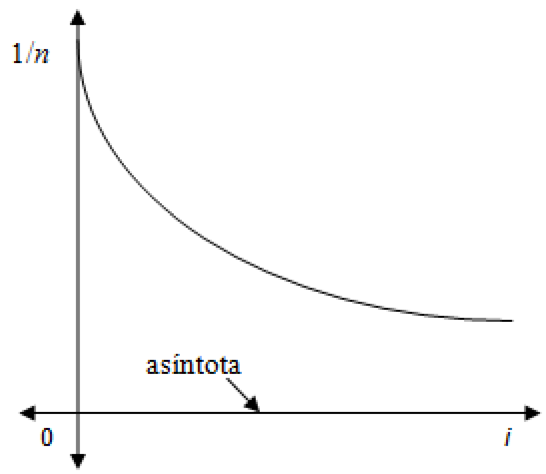
(1) Si la tasa pasiva es igual a 0, para ahorrar $1.- en cada período se debe depositar la enésima parte de ese $1.-

(2) Si la tasa $\to\infty$ la cuota periódica a depositar $\to 0$

Observando los valores extremos se deduce que la función es monótona y decreciente y como presenta una asíntota para $i\to\infty$ el decrecimiento es con concavidad hacia arriba.

<u>Gráfico</u>

$f_{(i)}=s^{-1}_{\overline{n}|i}$



4.4.4. <u>Relaciones entre Funciones Financieras Plurales</u>

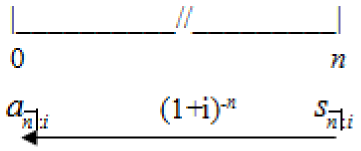
4.4.4.1. <u>Cociente entre el Valor Actual</u> $a_{\overline{n}|i}$ <u>y el Valor Final</u> $s_{\overline{n}|i}$

Considerando C = $1.-

$$\frac{a_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}}=\frac{\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}}{\frac{(1+i)^n-1}{i}}=\frac{1}{(1+i)^n}\Rightarrow\boxed{a_{\overline{n}|i}=\frac{s_{\overline{n}|i}}{(1+i)^n}}$$

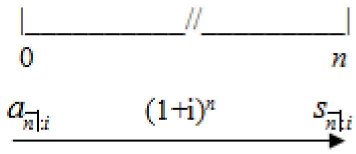
<u>1° Conclusión:</u> una amortización es una imposición actualizada por “*n*” períodos.

Gráficamente:



Despejando ahora $s_{\overline{n}|i}$: $\boxed{s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^n}$

<u>2° Conclusión:</u> una imposición es una amortización capitalizada por "n" períodos.



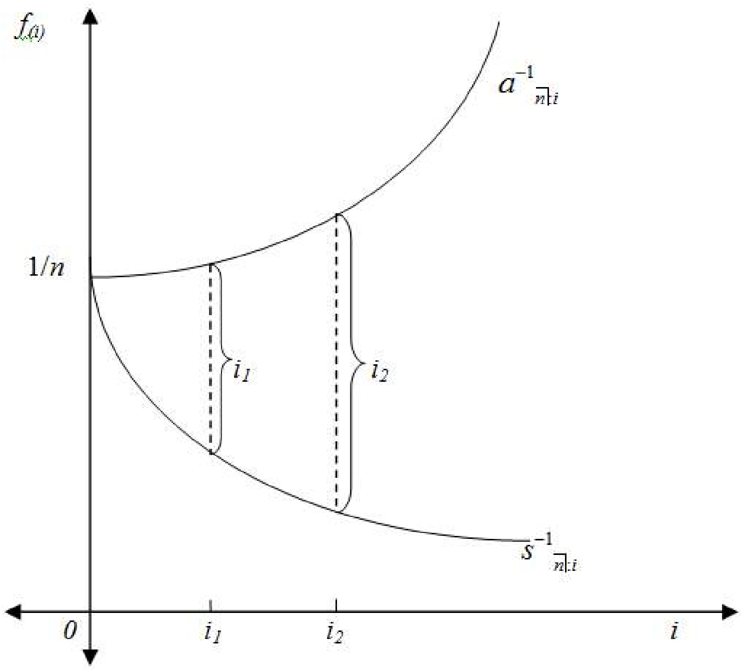
4.4.4.2. <u>Diferencia entre la Cuota de una Amortización $a^{-1}_{\overline{n}|i}$ y la Cuota de una Imposición $s^{-1}_{\overline{n}|i}$</u>

Considerando: $V_{\overline{n}|} = \$1.-$ y $S_{\overline{n}|} = \$1.-$

$$a^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n-1} - \frac{i}{(1+i)^n-1} = \frac{i.(1+i)^n - i}{(1+i)^n-1} = \frac{i\left[(1+i)^n-1\right]}{(1+i)^n-1} \Rightarrow \boxed{a^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i} = i}$$

<u>Conclusión:</u> la diferencia entre la cuota de una amortización y la cuota de una imposición es la tasa de interés.

Gráficamente:



<u>Observación:</u>

Si $V_{\overline{n}|}$ y $S_{\overline{n}|}$ son iguales y distintos de \$1.- entonces

$$V_{\overline{n}|}\left(a^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i}\right) = S_{\overline{n}|}\left(a^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i}\right) = V_{\overline{n}|}.i = S_{\overline{n}|}.i$$

<u>Ejemplo</u>:

Se tiene un préstamo de \$100.000.- cuya cuota es de \$8.852,63 y un ahorro de \$100.000.- cuya cuota es de \$5.852,63. Sabiendo que ambas rentas tienen el mismo plazo calcular el valor de la tasa de interés en ambas operaciones.

Sabiendo que: $a^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i} = i$ y siendo $V_{\overline{n}|} = S_{\overline{n}|} = \$100.000.-$

$$100.000\left(a^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i}\right) = 100.000\ i$$

$$100.000a^{-1}_{\overline{n}|i} - 100.000s^{-1}_{\overline{n}|i} = 100.000\ i$$

$$8.852,63 - 5.852,63 = 100.000\ i$$

$$3.000 = 100.000\ i \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{3.000}{100.000} = \boxed{0,03}$$

Verificar que el plazo de ambas rentas es el mismo

$$V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i} \qquad 100.000 = 8.852,63\frac{1-1,03^{-n}}{0,03} \qquad \text{despejando} \qquad n = 14$$

$$S_{\overline{n}|} = Cs_{\overline{n}|i} \qquad 100.000 = 5.852,63\frac{1,03^{n}-1}{0,03} \qquad \text{despejando} \qquad n = 14$$

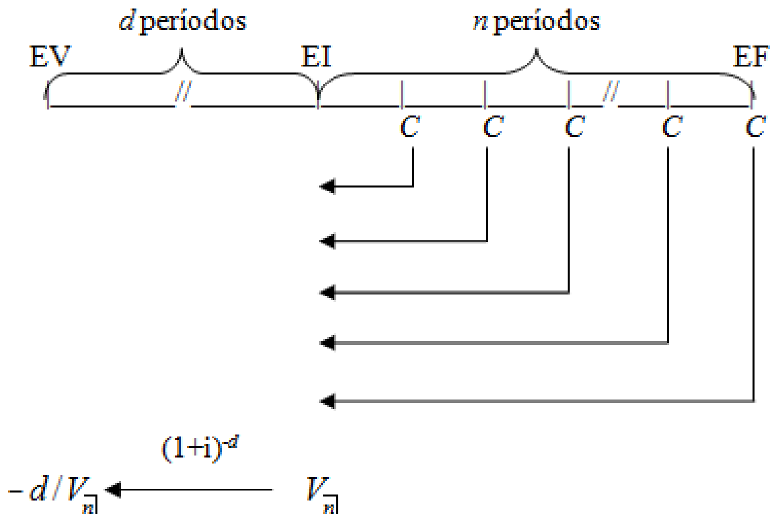
4.4.5. <u>Rentas Diferidas</u>- $d/V_{\overline{n}|}$

En estas rentas la época inicial de pago de cuotas es posterior a la época de valuación de la renta. Existe un período "*d*" llamado "período de diferimiento" en el cual no se abonan cuotas.

4.4.5.1. <u>Con Cuotas Vencidas</u>

Se simboliza $-d/V_{\overline{n}|}$ al valor financiero global de una renta temporaria por "*n*" períodos cuya primera cuota vencida se abona al final del primer período después de transcurridos "*d*" períodos.

Gráficamente



Para calcular el valor financiero global de esta renta se actualizan primero todas las cuotas a la época inicial (EI) encontrando el valor de la renta inmediata con cuotas vencidas ($V_{\overline{n}|}$), cuya fórmula ya se dedujo. Como un segundo paso, se actualiza esta renta por "*d*" períodos hasta la época de valuación encontrando el valor de la renta diferida ($-d/V_{\overline{n}|}$).

$$-d/V_{\overline{n}|} = V_{\overline{n}|}(1+i)^{-d} \Rightarrow \boxed{-d/V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-d}}$$

<u>Ejemplo</u>:

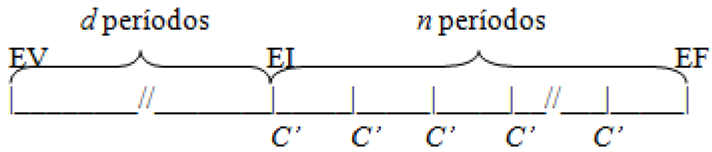
Suponiendo que se abonan 10 cuotas mensuales de $10.000.- al 1% mensual y con diferimiento de 2 meses, calcular la deuda que se cancela y los intereses que se abonan por la financiación.

$$-d/V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-d} = 10.000\frac{1-1,01^{-10}}{0,01}1,01^{-2} = \boxed{\$92.846,82}$$

$$Intereses\ abonados = nC - (-d/V_{\overline{n}|}) = 100.000 - 92.846,82 = \$7.153,18$$

Cuando existe diferimiento en el pago de las cuotas, el deudor puede cancelar una deuda menor que cuando no existe ese diferimiento. Debe pagar más intereses por la mayor financiación.

4.4.5.2. <u>Con Cuotas Adelantadas</u>



Con idéntico razonamiento se actualizan ahora todas las cuotas adelantadas y se obtiene:

$$-d/V'_{\overline{n}|} = V'_{\overline{n}|}(1+i)^{-d} \Rightarrow \boxed{-d/V'_{\overline{n}|} = C'(1+i)a_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d} = C'(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-d}}$$

<u>Ejemplo</u>:

Suponiendo que se abonan 10 cuotas mensuales adelantadas de $10.000.- al 1% mensual y con diferimiento de 2 meses, calcular la deuda que se cancela y los intereses que se abonan por la financiación.

$$-d/V'_{\overline{n}|} = C'(1+i)a_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d} = 10.000x1,01\frac{1-1,01^{-10}}{0,01}1,01^{-2} = \boxed{\$93.775,29}$$

$$Intereses\ abonados = nC' - (-d/V'_{\overline{n}|}) = 100.000 - 93.775,29 = \$6.224,71$$

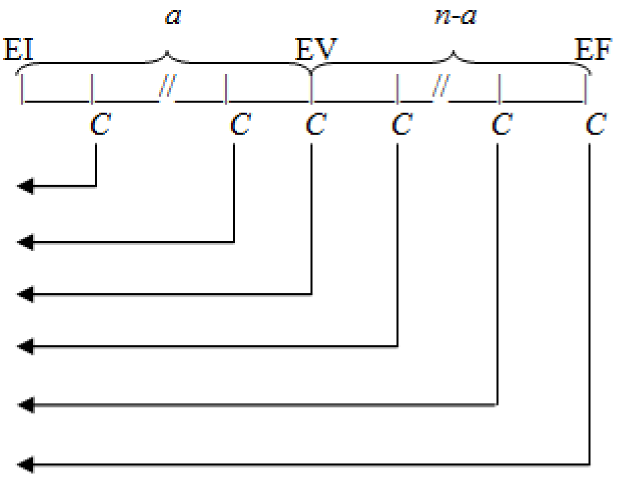
4.4.6. <u>Rentas Anticipadas</u> $a/V_{\overline{n}|}$

En estas rentas la época inicial de pago de cuotas es anterior a la época de valuación de la renta. Existe un período "*a*" llamado "período de anticipación" de pago de cuotas y luego de la época de valuación se abonan las "*n-a*" cuotas restantes.

4.4.6.1. <u>Con Cuotas Vencidas</u>

Se simboliza $a/V_{\overline{n}|}$ al valor financiero global de una renta temporaria por "*n*" períodos en la cual "*a*" cuotas vencidas se abonan antes de la época de valuación.

Gráficamente:



$$V_{\overline{n}|} \xrightarrow{(1+i)^a} a/V_{\overline{n}|}$$

Para calcular el valor financiero global de esta renta se actualizan primero todas las cuotas a la época inicial (EI) encontrando el valor de la renta inmediata con cuota vencida ($V_{\overline{n}|}$) cuya fórmula ya se dedujo. Como un segundo paso se capitaliza esta renta por "*a*" períodos hasta la época de valuación encontrando el valor de la renta anticipada ($a/V_{\overline{n}|}$).

$$a/V_{\overline{n}|} = V_{\overline{n}|}(1+i)^a \Rightarrow \boxed{a/V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^a = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^a}$$

<u>Ejemplo</u>:

Suponiendo que se abonan 10 cuotas mensuales de \$10.000.- al 1% mensual anticipando 4 cuotas a la valuación, calcular la deuda que se cancela y los intereses que se abonan por la financiación.

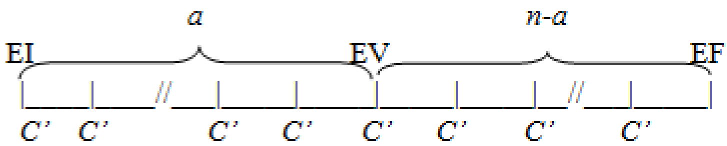
$$a/V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^a = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^a = 10.000\frac{1-1{,}01^{-10}}{0{,}01}1{,}01^4 = \boxed{\$98.558{,}77}$$

$$Intereses\ abonados = nC - a/V_{\overline{n}|} = 100.000 - 98.558{,}77 = \$1.441{,}23$$

En este caso, las primeras 3 cuotas ganan intereses (están ubicadas antes de la época de valuación) y por ello la deuda que se cancela es mayor a la de las rentas inmediatas y diferidas.

$$\boxed{a/V_{\overline{n}|} > V_{\overline{n}|} > -d/V_{\overline{n}|}}$$

4.4.6.2. <u>Con Cuotas Adelantadas</u>



Con idéntico razonamiento:

$$a/V'_{\overline{n|}} = V'_{\overline{n|}}(1+i)^a \rightarrow \boxed{a/V'_{\overline{n|}} = C'(1+i)a_{\overline{n|}i}(1+i)^a = C'(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^a}$$

<u>Ejemplo</u>:

Suponiendo que se abonan 10 cuotas mensuales adelantadas de \$10.000.- al 1% mensual anticipando 4 cuotas a la valuación, calcular la deuda que se cancela y los intereses que se abonan por la financiación.

$$a/V'_{\overline{n|}} = C'(1+i)a_{\overline{n|}i}(1+i)^a = 10.000x1,01\frac{1-1,01^{-10}}{0,01}1,01^4 = \boxed{\$99.544,36}$$

$$Intereses\ abonados = nC' - a/V'_{\overline{n|}} = 100.000 - 99.544,36 = \$455,64$$

<u>Caso particular:</u>

Si se anticipan todas las cuotas a la época de valuación, es decir, $a = n$ entonces EV coincide con la EF:

$$n/V_{\overline{n|}} = V_{\overline{n|}}(1+i)^n = Ca_{\overline{n|}i}(1+i)^n = C\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}(1+i)^n = C\frac{(1+i)^n-1}{i} = Cs_{\overline{n|}i} = S_{\overline{n|}}$$

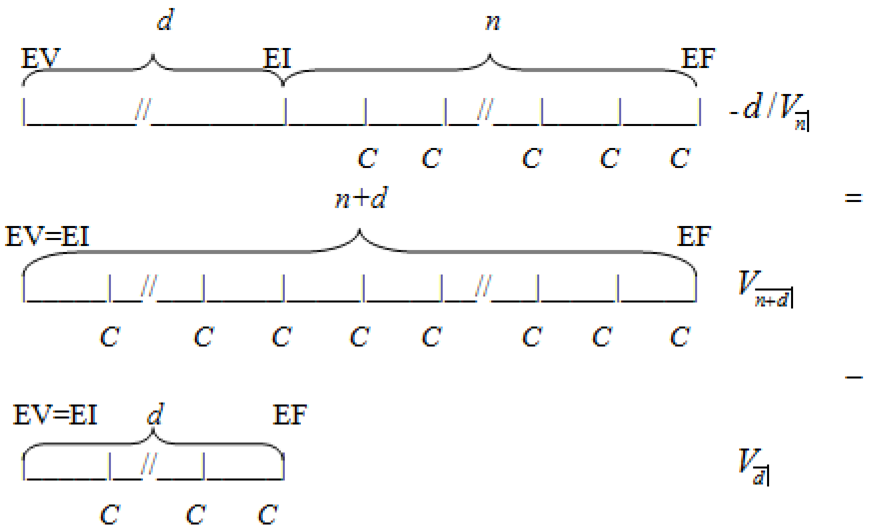
<u>Conclusión:</u> una imposición es un caso particular de una renta anticipada en la cual se anticipan todas (n) las cuotas.

4.4.7. <u>Relaciones entre Rentas Temporarias</u>

4.4.7.1. <u>Primera Relación. Renta Diferida</u>

Se demostrará que una renta temporaria por “n” períodos diferida por “d” períodos es igual a la diferencia entre dos rentas inmediatas: la primera temporaria por “$n+d$” períodos y la segunda temporaria por “d” períodos.

Gráficamente se observa que la época de valuación (EV) es coincidente en las tres rentas:



$$-d/V_{\overline{n|}} = V_{\overline{n|}}(1+i)^{-d} = Ca_{\overline{n|}i}(1+i)^{-d} = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-d} = \frac{C}{i}\left[(1+i)^{-d} - (1+i)^{-(n+d)}\right]$$

sumando y restando 1 dentro del corchete y agrupando convenientemente:

$$-d/V_{\overline{n}|} = \frac{C}{i}\left\{\left[1-(1+i)^{-(n+d)}\right]-\left[1-(1+i)^{-d}\right]\right\} = C\left[\frac{1-(1+i)^{-(n+d)}}{i}\right]-C\left[\frac{1-(1+i)^{-d}}{i}\right]$$

$$-d/V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n+d}|i} - Ca_{\overline{d}|i}$$

$$\boxed{-d/V_{\overline{n}|} = V_{\overline{n+d}|} - V_{\overline{d}|}}$$

Ejemplo:

Considerando la cuota de \$10.000.-, la tasa del 1% mensual, el plazo de 10 meses y el diferimiento de 2 períodos verificar la relación:

$$-d/V_{\overline{n}|} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-d} = 10.000\frac{1-1,01^{-10}}{0,01}1,01^{-2} = \boxed{\$92.846,82}$$

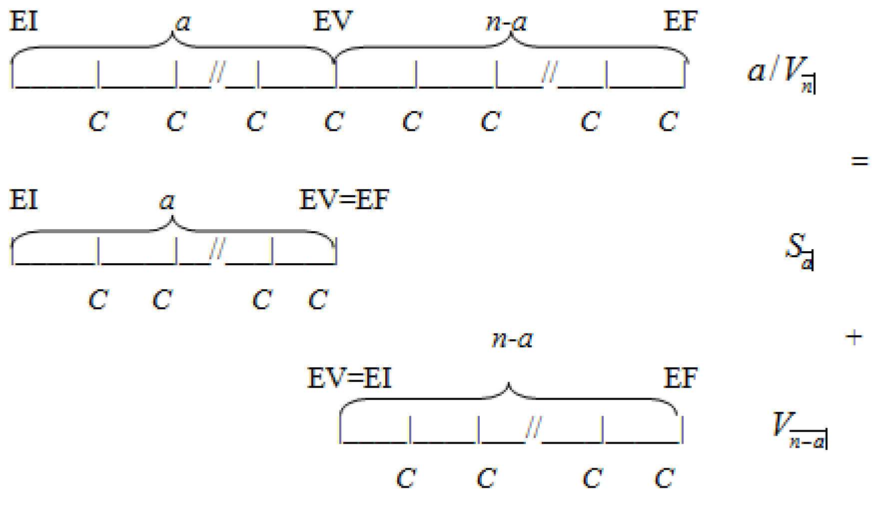
$$V_{\overline{n+d}|} - V_{\overline{d}|} = C\frac{1-(1+i)^{-(n+d)}}{i} - C\frac{1-(1+i)^{-d}}{i} = 10.000\frac{1-1,01^{-12}}{0,01} - 10.000\frac{1-1,01^{-2}}{0,01}$$

$$V_{\overline{n+d}|} - V_{\overline{d}|} = 112.550,77 - 19.703,95 = \boxed{\$92.846,82}$$

4.4.7.2. Segunda Relación. Renta Anticipada

Se demostrará que una renta temporaria por "*n*" períodos con "*a*" cuotas anticipadas es igual a la suma de una imposición por "*a*" períodos más una amortización por "*n-a*" períodos.

Gráficamente se observa que la época de valuación (EV) coincide en las tres rentas:



$$a/V_{\overline{n}|} = V_{\overline{n}|}(1+i)^{a} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^{a} = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{a} = \frac{C}{i}\left[(1+i)^{a}-(1+i)^{-(n-a)}\right]$$

sumando y restando 1 dentro del corchete y agrupando convenientemente:

$$a/V_{\overline{n}|} = \frac{C}{i}\left\{\left[(1+i)^{a}-1\right]+\left[1-(1+i)^{-(n-a)}\right]\right\} = C\left[\frac{(1+i)^{a}-1}{i}\right]+C\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-a)}}{i}\right]$$

$$a/V_{\overline{n}|} = Cs_{\overline{a}|i} + Ca_{\overline{n-a}|i}$$

$$\boxed{a/V_{\overline{n}|} = S_{\overline{a}|} + V_{\overline{n-a}|}}$$

Ejemplo:

Considerando la cuota de \$10.000.- la tasa del 1% mensual, el plazo de 10 meses y la anticipación de 4 cuotas verificar la relación anterior:

$$a/V_{\overline{n}|} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{a} = 10.000\frac{1-1,01^{-10}}{0,01}1,01^{4} = \boxed{\$98.558,77}$$

$$S_{\overline{a}|} + V_{\overline{n-a}|} = C\frac{(1+i)^{a}-1}{i} + C\frac{1-(1+i)^{-(n-a)}}{i} = 10.000\frac{1,01^{4}-1}{0,01} + 10.000\frac{1-1,01^{-6}}{0,01}$$

$$S_{\overline{a}|} + V_{\overline{n-a}|} = 40.604,01 + 57.954,76 = \boxed{\$98.558,77}$$

4.4.8. Fórmula General Unificada para Rentas Ciertas y Temporarias

Para determinar una Fórmula General Unificada que sirva para establecer el valor financiero global de cualquier renta temporaria se define una variable “*k*” que podrá tomar cualquier valor entero, incluso negativo (momentos anteriores a la época inicial de pago de cuotas que se toma como base y en la escala temporal vale cero (0)).

Gráficamente:

```
EI                          EV                          EF
|______|______|__//__|______|______|______//___|______|
0      1      2     k-1     k     k+1         n-1     n
       C      C      C      C      C           C      C
```

Se toma el período *k* como época de valuación. Las cuotas ubicadas con anterioridad a la época de valuación serán capitalizadas incrementando su valor. Las cuotas posteriores a la época de valuación serán actualizadas disminuyendo su valor y la cuota ubicada en el período *k* no modificará su valor. Contemporizando todas las cuotas:

Número de cuota	Operación de Contemporización	Tiempo de contemporización	Cuota contemporizada
1	Capitalización	*k-1*	$C(1+i)^{(k-1)}$
2	Capitalización	*k-2*	$C(1+i)^{(k-2)}$
3	Capitalización	*k-3*	$C(1+i)^{(k-3)}$
….....	……..	….....	……
k	Ninguna	*0*	C
k+1	Actualización	*1*	$C(1+i)^{-1}$
……	……	……	…….
n	Actualización	*n-k*	$C(1+i)^{-(n-k)}$

Sumando todas las cuotas contemporizadas:

$$V_{\overline{k}|} = C(1+i)^{k-1} + C(1+i)^{k-2} + C(1+i)^{k-3} + ... + C + C(1+i)^{-1} + ... + C(1+i)^{-(n-k)}$$
$$V_{\overline{k}|} = C\left[(1+i)^{k-1} + (1+i)^{k-2} + (1+i)^{k-3} + ... + 1 + (1+i)^{-1} + ... + (1+i)^{-(n-k)}\right]$$

Dentro del corchete se observa una suma de términos de una progresión geométrica en la cual:

q = razón de la progresión = $(1+i)^{-1} < 1$
a_1 = primer término = $(1+i)^{k-1}$
n = número de términos = n cuotas

Siendo la suma de términos de una progresión geométrica $S_g = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ para $q < 1$:

$$V_{\overline{k}|} = C(1+i)^{k-1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\dfrac{1}{1+i}} = C\frac{(1+i)^k}{1+i} \frac{1-(1+i)^{-n}}{\dfrac{1+i-1}{1+i}} = C(1+i)^k \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$\boxed{V_{\overline{k}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^k}$ siendo $\boxed{a_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$

Dando distintos valores a "k" se obtienen las distintas rentas temporarias:

k	Tipo de renta	Fórmula
0	Inmediata con cuotas vencidas	$V_{\overline{0}|} = Ca_{\overline{n}|i}$
-d	Diferida con cuotas vencidas	$V_{\overline{-d}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d}$
a	Anticipada con cuotas vencidas	$V_{\overline{a}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^{a}$
n	Imposición con cuotas vencidas	$V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i}(1+i)^{n} = Cs_{\overline{n}|i}$
1	Inmediata con cuotas adelantadas	$V_{\overline{1}|} = C\left(1+i\right)a_{\overline{n}|i}$
-d+1	Diferida con cuotas adelantadas	$V_{\overline{-d+1}|} = C(1+i)^1 a_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d}$
a+1	Anticipada con cuotas adelantadas	$V_{\overline{a+1}|} = C(1+i)^1 a_{\overline{n}|i}(1+i)^{a}$
n+1	Imposición con cuotas adelantadas	$V_{\overline{n+1}|} = C(1+i)^1 a_{\overline{n}|i}(1+i)^{n} = C(1+i)^1 s_{\overline{n}|i}$

4.5. Rentas Perpetuas o Perpetuidades

En una renta perpetua no existe una última cuota pudiendo considerar que $n \to \infty$

4.5.1. Rentas Perpetuas Inmediatas

4.5.1.1. Con Cuotas Vencidas

Se simboliza $V_{\overline{\infty}|}$ al valor financiero global de una renta perpetua cuya primera cuota se abona al final del primer período.

Gráficamente:

Para encontrar el valor financiero global de esta renta se aplica $\lim\limits_{n\to\infty}$ a la renta inmediata pero temporaria.

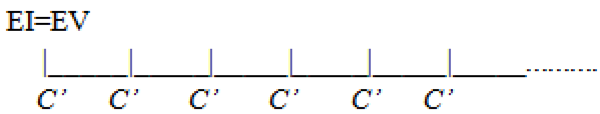
$$V_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} V_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} C a_{\overline{n}|i} = C \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C\frac{1}{i}$$

$$\boxed{V_{\overline{\infty}|} = \frac{C}{i}} \quad => \boxed{C = V_{\overline{\infty}|}.i}$$

Conclusión: en una renta perpetua inmediata la cuota está íntegramente formada por los intereses sobre la deuda, no existe amortización de deuda y por ello es perpetua.

4.5.1.2. Con Cuotas Adelantadas

Se simboliza $V'_{\overline{\infty}|}$ al valor financiero global de una renta perpetua cuya primera cuota se abona al inicio del primer período. Gráficamente:



Para encontrar el valor financiero global de esta renta se aplica $\lim\limits_{n\to\infty}$ a la renta inmediata con cuotas adelantadas pero temporaria.

$$V'_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} V'_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} C'(1+i) a_{\overline{n}|i} = C'(1+i) \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C'(1+i)\frac{1}{i}$$

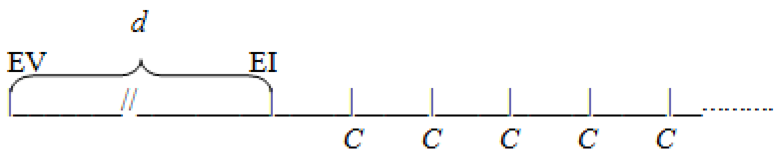
$$\boxed{V'_{\overline{\infty}|} = \frac{C'}{i}(1+i)}$$

4.5.2. Rentas Perpetuas Diferidas

4.5.2.1. Con Cuotas Vencidas

Se simboliza $_{d}/V_{\overline{\infty}|}$ al valor financiero global de una renta perpetua cuya primera cuota se abona al final del primer período después de transcurridos "*d*" períodos.

Gráficamente:



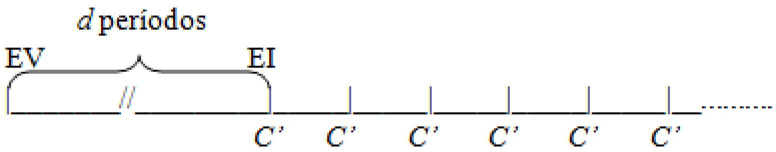
Para encontrar el valor financiero global de esta renta se aplica $\lim\limits_{n\to\infty}$ a la renta diferida pero temporaria.

$$-d/V_{\overline{\infty|}} = \lim_{n\to\infty} -d/V_{\overline{n|}} = \lim_{n\to\infty} C a_{\overline{n|}i}(1+i)^{-d} = C(1+i)^{-d}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C(1+i)^{-d}\frac{1}{i}$$

$$\boxed{-d/V_{\overline{\infty|}} = \frac{C}{i}(1+i)^{-d}}$$

4.5.2.2. Con Cuotas Adelantadas

Se simboliza $-d/V'_{\overline{\infty|}}$ al valor financiero global de una renta perpetua cuya primera cuota se abona al inicio del primer período después de transcurridos "*d*" períodos. Gráficamente:



Para encontrar el valor financiero global de esta renta se aplica $\lim\limits_{n\to\infty}$ a la renta diferida y con cuotas adelantadas pero temporaria.

$$-d/V'_{\overline{\infty|}} = \lim_{n\to\infty} -d/V'_{\overline{n|}} = \lim_{n\to\infty} C'(1+i)a_{\overline{n|}i}(1+i)^{-d}$$

$$-d/V'_{\overline{\infty|}} = C'(1+i)(1+i)^{-d}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C'(1+i)(1+i)^{-d}\frac{1}{i}$$

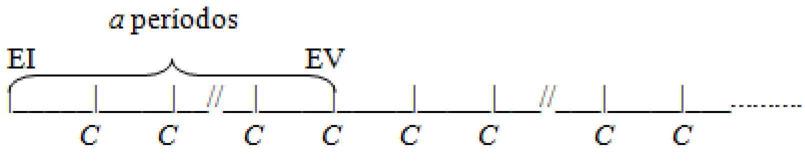
$$\boxed{-d/V'_{\overline{\infty|}} = \frac{C'}{i}(1+i)(1+i)^{-d}}$$

4.5.3. Rentas Perpetuas Anticipadas

4.5.3.1. Con Cuotas Vencidas

Se simboliza $a/V_{\overline{\infty|}}$ al valor financiero global de una renta perpetua cuya primera cuota vencida se abona "*a*" períodos antes de la época de valuación.

Gráficamente:



Para encontrar el valor financiero global de esta renta se aplica $\lim\limits_{n\to\infty}$ a la renta anticipada pero temporaria.

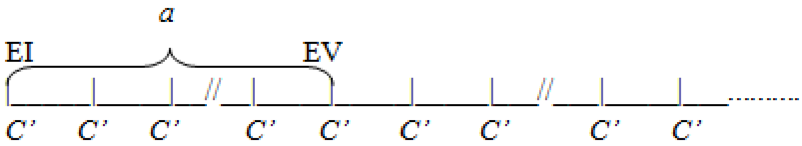
$$a/V_{\overline{\infty|}} = \lim_{n\to\infty} a/V_{\overline{n|}} = \lim_{n\to\infty} C a_{\overline{n|}i}(1+i)^{a} = C(1+i)^{a}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C(1+i)^{a}\frac{1}{i}$$

$$\boxed{a/V_{\overline{\infty|}} = \frac{C}{i}(1+i)^{a}}$$

4.5.3.2. Con Cuotas Adelantadas

Se simboliza $a/V'_{\overline{\infty|}}$ al valor financiero global de una renta perpetua cuya primera cuota se abona al inicio del primer período y "*a*" períodos antes de la época de valuación.

Gráficamente:



Para encontrar el valor financiero global de esta renta se aplica $\lim\limits_{n\to\infty}$ a la renta anticipada y con cuotas adelantadas pero temporaria.

$$a/V'_{\overline{\infty|}} = \lim_{n\to\infty} a/V'_{\overline{n|}} = \lim_{n\to\infty} C'(1+i)a_{\overline{n|}i}(1+i)^a = C'(1+i)(1+i)^a \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = C'(1+i)(1+i)^a\frac{1}{i}$$

$$\boxed{a/V'_{\overline{\infty|}} = \frac{C'}{i}(1+i)(1+i)^a}$$

Ejemplo:

Suponiendo una cuota mensual de \$10.000.- a perpetuidad, y considerando una tasa del 1% mensual calcular el valor del las siguientes rentas perpetuas:

Perpetua	Con cuotas Vencidas	Con cuotas Adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{\infty|}} = \frac{C}{i}$ $V_{\overline{\infty|}} = \frac{10.000}{0,01} = \boxed{\$1.000.000.-}$	$V'_{\overline{\infty|}} = \frac{C'}{i}(1+i)$ $V'_{\overline{\infty|}} = \frac{10.000}{0,01}1,01 = \boxed{\$1.010.000.-}$
Diferida *-d=-2*	$-d/V_{\overline{\infty|}} = \frac{C}{i}(1+i)^{-d}$ $-d/V_{\overline{\infty|}} = \frac{10.000}{0,01}1,01^{-2} = \boxed{\$980.296,05}$	$-d/V'_{\overline{\infty|}} = \frac{C'}{i}(1+i)(1+i)^{-d}$ $-d/V'_{\overline{\infty|}} = \frac{10.000}{0,01}1,01x1,01^{-2} = \boxed{\$990.099,01}$
Anticipada *a=4*	$a/V_{\overline{\infty|}} = \frac{C}{i}(1+i)^a$ $a/V_{\overline{\infty|}} = \frac{10.000}{0,01}1,01^4 = \boxed{\$1.040.604,01}$	$a/V'_{\overline{\infty|}} = \frac{C'}{i}(1+i)(1+i)^a$ $a/V'_{\overline{\infty|}} = \frac{10.000}{0,01}1,01x1,01^4 = \boxed{\$1.051.010,05}$

Las conclusiones respecto a las rentas Perpetuas y sus momentos de valuación son las mismas que para rentas Temporarias:

1- Si las cuotas son adelantadas, con las mismas cuotas y la misma tasa, se formará un valor financiero global mayor.

2- Cuando más se posterga el inicio de pago de cuotas respecto del momento de la valuación, con esas mismas cuotas, se formará un valor financiero global menor, ya que las cuotas se deberán actualizar por un plazo mayor.

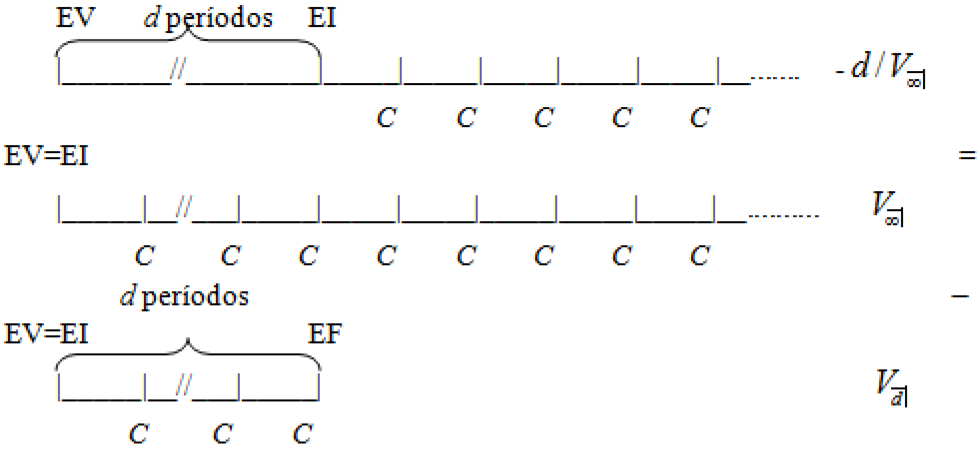
$$\boxed{a/V_{\overline{\infty|}} > V_{\overline{\infty|}} > -d/V_{\overline{\infty|}}}$$

4.5.4. Relaciones entre Rentas Perpetuas

4.5.4.1. Primera Relación. Renta Perpetua Diferida

Se demostrará que una renta perpetua diferida por "*d*" períodos es igual a la diferencia entre dos rentas inmediatas: la primera perpetua y la segunda temporaria por "*d*" períodos.

Gráficamente se observa que la época de valuación (EV) coincide en las tres rentas:



$-d/V_{\overline{\infty}|} = \frac{C}{i}\left[(1+i)^{-d}\right]$ sumando y restando 1 dentro del corchete y agrupando convenientemente:

$$-d/V_{\overline{\infty}|} = \frac{C}{i}\left\{1-\left[1-(1+i)^{-d}\right]\right\} = \frac{C}{i} - C\frac{1-(1+i)^{-d}}{i} = \frac{C}{i} - Ca_{\overline{d}|i}$$

$$\boxed{-d/V_{\overline{\infty}|} = V_{\overline{\infty}|} - V_{\overline{d}|}}$$

<u>Ejemplo</u>:

Considerando la cuota de $10.000.-, la tasa del 1% mensual y el diferimiento de 2 meses verificar la relación:

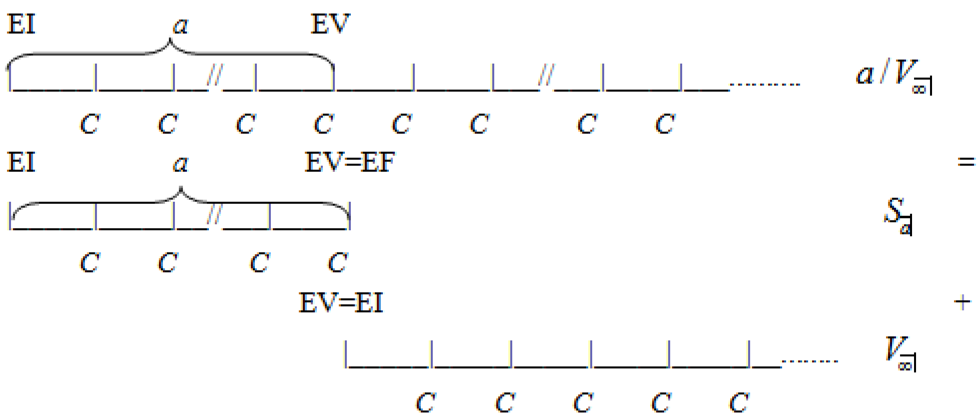
$$-d/V_{\overline{\infty}|} = \frac{C}{i}(1+i)^{-d} = \frac{10.000}{0,01}1,01^{-2} = \boxed{\$980.296,05}$$

$$V_{\overline{\infty}|} - V_{\overline{d}|} = \frac{C}{i} - C\frac{1-(1+i)^{-d}}{i} = \frac{10.000}{0,01} - 10.000\frac{1-1,01^{-2}}{0,01} = 1.000.000 - 19.703,95 = \boxed{\$980.296,05}$$

4.5.4.2. <u>Segunda Relación. Renta Perpetua Anticipada</u>

Se demostrará que una renta perpetua con "*a*" cuotas anticipadas es igual la suma de una imposición por "*a*" períodos más una renta perpetua inmediata.

Gráficamente se observa que la época de valuación (EV) coincide en las tres rentas:



$a/V_{\overline{\infty}|} = \frac{C}{i}\left[(1+i)^a\right]$ sumando y restando 1 dentro del corchete y agrupando convenientemente:

$$a/V_{\overline{\infty}|} = \frac{C}{i}\left\{\left[(1+i)^a - 1\right] + 1\right\} = C\,\frac{(1+i)^a - 1}{i} + \frac{C}{i} = Cs_{\overline{a}|i} + \frac{C}{i}$$

$$\boxed{a/V_{\overline{\infty}|} = S_{\overline{a}|} + V_{\overline{\infty}|}}$$

Ejemplo:

Considerando la cuota de $10.000.-, la tasa del 1% mensual y la anticipación de 4 meses verificar la relación:

$$a/V_{\overline{\infty}|} = \frac{C}{i}(1+i)^a = \frac{10.000}{0,01}1,01^4 = \boxed{\$1.040.604,01}$$

$$S_{\overline{a}|} + V_{\overline{\infty}|} = C\,\frac{(1+i)^a - 1}{i} + \frac{C}{i} = 10.000\,\frac{1,01^4 - 1}{0,01} + \frac{10.000}{0,01} = 40.604,01 + 1.000.000 = \boxed{\$1.040.604,01}$$

Aclaración:

Se aclara que no existen las imposiciones perpetuas ya que las rentas de ahorro se valúan en la época final y en las rentas perpetuas la época final es el infinito.

4.6. Cuadro Resumen de Rentas con Cuotas Constantes

	Temporarias		Perpetuas	
	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediatas	$V_{\overline{n}\rceil} = C a_{\overline{n}\rceil i}$ "Fórmula base"	$V'_{\overline{n}\rceil} = C'(1+i) a_{\overline{n}\rceil i}$	$V_{\overline{\infty}\rceil} = \frac{C}{i}$ "Fórm. base"	$V'_{\overline{\infty}\rceil} = \frac{C'}{i}(1+i)$
Diferidas	$_{d}/V_{\overline{n}\rceil} = C a_{\overline{n}\rceil i}(1+i)^{-d}$	$_{d}/V'_{\overline{n}\rceil} = C'(1+i) a_{\overline{n}\rceil i}(1+i)^{-d}$	$_{d}/V_{\overline{\infty}\rceil} = \frac{C}{i}(1+i)^{-d}$	$_{d}/V'_{\overline{\infty}\rceil} = \frac{C'}{i}(1+i)(1+i)^{-d}$
Anticipadas	$a/V_{\overline{n}\rceil} = C a_{\overline{n}\rceil i}(1+i)^{a}$	$a/V'_{\overline{n}\rceil} = C'(1+i) a_{\overline{n}\rceil i}(1+i)^{a}$	$a/V_{\overline{\infty}\rceil} = \frac{C}{i}(1+i)^{a}$	$a/V'_{\overline{\infty}\rceil} = \frac{C'}{i}(1+i)(1+i)^{a}$
Imposiciones (caso particular de una renta anticipada $a = n$)	$S_{\overline{n}\rceil} = C\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n .\, i}(1+i)^n = C s_{\overline{n}\rceil i}$	$S'_{\overline{n}\rceil} = C'(1+i) s_{\overline{n}\rceil i}$	No existen	No existen

Siendo

$$a_{\overline{n}\rceil i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^j} = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{-j} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$s_{\overline{n}\rceil i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^j = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1}{i}(1+i)^n - \frac{1}{i}$$

4.7. Aplicación

En este capítulo se presenta un ejemplo de leasing aplicado a la compra de un bien mueble o inmueble.

El leasing es un contrato de arrendamiento o alquiler (mediante el pago de una cuota o canon) que prevé la opción de compra (no la obligación) del bien en cuestión al final del plazo del contrato por parte del arrendatario, inquilino o tomador a un precio determinado llamado valor residual.

El leasing se presenta como una herramienta de gran relevancia a la hora de definir un plan de renovación de los bienes de una empresa posibilitando contar con la última tecnología a cambio del pago de una cuota o canon, sin verse obligado a desembolsar grandes sumas de dinero al principio de la operación.

El aspecto impositivo reviste gran importancia a la hora de determinar cómo incorporar un bien a la empresa, ya que el canon de los contratos de leasing es deducible en el impuesto a las ganancias en su totalidad.

Ejemplo: una empresa necesita para fabricar sus productos una maquinaria cuyo precio es de \$2.000.000.-. Para ello firma un contrato de leasing por 24 meses, momento en el cual la empresa puede optar por la compra de la maquinaria a un valor residual de \$1.200.000.-. La tasa de financiación es del 1% mensual. Calcular:

a) La cuota periódica o canon a abonar por parte del arrendatario.
b) El total de intereses abonados en caso de optar por la compra de la maquinaria
c) Construir el cuadro de evolución
d) Resolver el ejercicio aplicando Excel

EV 24 meses

a)

2.000.000 1.200.000

El valor de la maquinaria se abonará según la siguiente ecuación:

$$2.000.000 = Ca_{\overline{24}|0,01} + 1.200.000(1,01)^{-24}$$

$$2.000.000 = C\frac{1-1,01^{-24}}{0,01} + 945.079,53$$

$$\boxed{C = 49.658,78}$$

b)

$$\text{Intereses abonados} = Cx24 - 800.000 = 49.658,78x24 - 800.000$$

$$\text{Intereses abonados} = 1.191.810,72 - 800.000$$

$$\boxed{\text{Intereses abonados} = 391.810,72}$$

Este importe de intereses abonados es independiente del ejercicio de la opción de compra.

c).

	Deuda al inicio	Ints.	Pago	Amort.	Deuda Final
1	2.000.000,00	20.000,00	49.658,78	29.658,78	1.970.341,22
2	1.970.341,22	19.703,41	49.658,78	29.955,37	1.940.385,86
3	1.940.385,86	19.403,86	49.658,78	30.254,92	1.910.130,94
4	1.910.130,94	19.101,31	49.658,78	30.557,47	1.879.573,47
5	1.879.573,47	18.795,73	49.658,78	30.863,04	1.848.710,43
6	1.848.710,43	18.487,10	49.658,78	31.171,67	1.817.538,75
7	1.817.538,75	18.175,39	49.658,78	31.483,39	1.786.055,36
8	1.786.055,36	17.860,55	49.658,78	31.798,22	1.754.257,14
9	1.754.257,14	17.542,57	49.658,78	32.116,21	1.722.140,93
10	1.722.140,93	17.221,41	49.658,78	32.437,37	1.689.703,56
11	1.689.703,56	16.897,04	49.658,78	32.761,74	1.656.941,82
12	1.656.941,82	16.569,42	49.658,78	33.089,36	1.623.852,46
13	1.623.852,46	16.238,52	49.658,78	33.420,25	1.590.432,21
14	1.590.432,21	15.904,32	49.658,78	33.754,46	1.556.677,75
15	1.556.677,75	15.566,78	49.658,78	34.092,00	1.522.585,75
16	1.522.585,75	15.225,86	49.658,78	34.432,92	1.488.152,83
17	1.488.152,83	14.881,53	49.658,78	34.777,25	1.453.375,58
18	1.453.375,58	14.533,76	49.658,78	35.125,02	1.418.250,56
19	1.418.250,56	14.182,51	49.658,78	35.476,27	1.382.774,29
20	1.382.774,29	13.827,74	49.658,78	35.831,03	1.346.943,25
21	1.346.943,25	13.469,43	49.658,78	36.189,35	1.310.753,91
22	1.310.753,91	13.107,54	49.658,78	36.551,24	1.274.202,67
23	1.274.202,67	12.742,03	49.658,78	36.916,75	1.237.285,92
24	1.237.285,92	12.372,86	49.658,78	37.285,92	1.200.000,00
		391.810,72	1.191.810,72	800.000,00	

d). La función a utilizar es la función financiera PAGO (Cuota) donde:

Tasa = 1%
Nper= 24
Va= 2.000.000
Vf= -1.200.000 (negativo)
Tipo = 0 (u omitido)

4.8. EJERCITACIÓN CAPÍTULO IV

1.- Calcular la cuota mensual vencida para la compra de un bien de $12.000.- a la tasa del 7% mensual en un año y medio. ¿En cuánto se reduce dicha cuota si se hace una entrega inicial de $5.000.- y otra de $1.000.- a los 6 meses?

$$V_{\overline{n|}} = C a_{\overline{n|}:i} \qquad C = 12.000 \frac{0,07}{1-(1+0,07)^{-18}} \qquad \boxed{C = 1.192,95}$$

$$12.000 = 5.000 + 1.000 x 1,07^{-6} + C a_{\overline{18|}:i}$$

$$6.333,66 = C \frac{1-1,07^{-18}}{0,07}$$

$$C = 629,65 \qquad \boxed{\text{La cuota se reduce en \$563,30}}$$

2.- Una persona alquila un departamento comprometiéndose a abonar $12.000.- al comienzo de cada mes durante 2 años. ¿Cuál es el valor actual de ese contrato si se fija la tasa del 24% anual con actualizaciones mensuales?

$$V'_{\overline{n|}} = C'(1+i) a_{\overline{n|}:i} \qquad V'_{\overline{n|}} = 12.000 x 1,02 x \frac{1-1,02^{-24}}{0,02}$$

$$\boxed{V'_{\overline{n|}} = \$231.506,45}$$

$$I = nC' - V'_{\overline{n|}} = 24 x 12.000 - 231.506,45 = \$56.493,55$$

3.- ¿Qué cuota mensual adelantada deberá abonarse para amortizar un préstamo de $100.000.- si se establece una tasa efectiva del 26% semestral y la actualización es mensual durante un año y dos meses?

$$1+i = \left(1+i_{(m)}\right)^m \qquad i_{(6)} = \sqrt[6]{1,26} - 1 = 0,039270 \text{ mensual}$$

$$V'_{\overline{n|}} = C'(1+i) a_{\overline{n|}:i} \qquad C' = \frac{100.000}{1,039270} x \frac{0,039270}{1-1,039270^{-14}} \qquad \boxed{C' = 9.065,33}$$

4.- Se compra un bien en $970.000.- pagando en el momento inicial $450.000.- y financiando el resto al 48% anual con capitalizaciones mensuales. Si se fija una cuota mensual vencida de $30.070.-, ¿en cuántos meses se cancela la deuda?

$$V_{\overline{n|}} = 970.000 - 450.000 = 520.000.-$$

$$V_{\overline{n|}} = C a_{\overline{n|}:i} \qquad 520.000 = 30.070 x \frac{1-1,04^{-n}}{0,04}$$

$$1,04^{-n} = 1 - \frac{520.000}{30.070} x 0,04 \qquad \text{aplicando log}$$

$$\boxed{n = 30 \text{ meses}}$$

5.- ¿Qué ocurriría si la cuota del problema anterior se hubiera fijado en $20.800.- sin modificar los otros datos?

$V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i} \qquad 520.000 = 20.800x\dfrac{1-1,04^{-n}}{0,04}$

$25 = \dfrac{1-1,04^{-n}}{0,04} \qquad 1{=}1-1,04^{-n} \qquad 1,04^{-n}{=}0$

$-n\log(1,04) = \log(0) \qquad -\text{n}\log(1,04) \to -\infty \qquad \boxed{n \to \infty \quad \text{renta perpetua}}$

<u>Verificación</u>:

$\textit{Intereses}$ mensuales $= V_{\overline{n|}}xi = 520.000x0,04 = 20.800 = \textit{Cuota}$

Se observa que la cuota constante es igual a los intereses de la deuda. Ello implica que con cada cuota sólo se pagan los intereses de la deuda, no hay amortización de la deuda, y por ello la renta es perpetua.

6.- Para amortizar un préstamo de \$28.000.- se propone una cuota mensual adelantada de \$4.000.- al 1,50% mensual. Al comprobarse que el número de períodos no es exacto, se pide re calcular la cuota que corresponde al tiempo tomado por exceso.

$V'_{\overline{n|}} = C'(1+i)\,a_{\overline{n|}i} \qquad 28.000 = 4.000x1,015x\dfrac{1-1,015^{-n}}{0,015} \qquad n = 7,33$ meses

$28.000 = C'x1,015x\dfrac{1-1,015^{-8}}{0,015} \qquad \boxed{C' = 3.685,08}$

7.- Determinar la tasa mensual, la tasa nominal anual y la tasa efectiva anual que corresponde a un préstamo de \$13.298.- en 2 años y medio con cuotas mensuales vencidas de \$1.000.- cada una empleando tanteo financiero e interpolación lineal cuando el error es menor de 0,001.

$V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i} \qquad 13.298 = 1.000xa_{\overline{30|}i}$

$\dfrac{1.000}{13.298} = 0,075199 = a^{-1}_{\overline{30|}i} = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-30}} = f_{(i)}$ función creciente

Tanteo financiero. Se prueba con distintos valores de tasa:

$\textit{Para} \quad i = 0,05 \qquad f_{(i)} = 0,065051$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,075199$ subo la tasa

$\textit{Para} \quad i = 0,06 \qquad f_{(i)} = 0,072649$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,075199$ subo la tasa

$\textit{Para} \quad i = 0,063 \qquad f_{(i)} = 0,074996$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,075199$ subo la tasa

$\textit{Para} \quad i = 0,064 \qquad f_{(i)} = 0,075785$

Como $f_{(i)} = 0,075199$ y $0,074996 < f_{(i)} = 0,075199 < 0,075785$ entonces

$i_a = 0,063 \qquad f_{(i_a)} = 0,074996$

$i_p = 0,064 \qquad f_{(i_p)} = 0,075785$ se aplica interpolación lineal

$\textit{Interpolación lineal}$:

$\dfrac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \dfrac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}} \qquad \dfrac{i_I - 0,063}{0,064 - 0,063} = \dfrac{0,075199 - 0,074996}{0,075785 - 0,074996}$ y despejando

$i_I = 0,063 + \dfrac{0,075199 - 0,074996}{0,075785 - 0,074996}(0,064 - 0,063) = \boxed{0,063258 \text{ mensual}} \qquad i_a < i_I < i_p$

$$j_{(m)} = mxi_{(m)} = 12x0,063258 = \boxed{0,759096 \text{ anual nominal}}$$

$$1+i = \left(1+i_{(m)}\right)^m \qquad i = 1,063258^{12} - 1 = \boxed{1,087680 \text{ anual efectivo}}$$

8.- Se necesita disponer de \$120.000.- en 2 años. Para ello se realizan 24 depósitos mensuales vencidos que ganan el 3% mensual. Determinar el importe de cada depósito y los intereses ganados.

$$S_{\overline{n|}} = Cs_{\overline{n|}:i} = C\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad C = 120.000\frac{0,03}{1,03^{24}-1} \qquad \boxed{C = 3.485,69}$$

$$Intereses\ ganados = S_{\overline{n|}} - nC = 120.000 - 24x3.485,69 = 36.343,44$$

9.- ¿En cuántos meses se puede reunir un capital de \$51.566,76 si se depositan cuotas adelantadas de \$1.000 a la tasa del 14,40% anual con capitalizaciones mensuales?

$$S'_{\overline{n|}} = C'(1+i)s_{\overline{n|}:i} = C(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad 51.566,76 = 1.000\left(1+\frac{0,144}{12}\right)\frac{\left(1+\frac{0,144}{12}\right)^n - 1}{\frac{0,144}{12}}$$

$$1,012^n = 1,611464 \qquad \text{Aplicando logaritmo} \qquad \boxed{n = 40 \text{ meses}}$$

10.- Una persona desea reunir \$46.800.- en 50 meses. Con ese fin efectúa depósitos mensuales vencidos que ganan el 0,80% de interés mensual. Se desea saber:

a) El valor de cada depósito mensual vencido.

b) ¿En cuánto disminuye el valor de cada cuota si junto con la última cuota se agrega un refuerzo de \$1.000.-?

c) ¿A cuánto asciende el refuerzo que agrega el inversor a la última cuota si el depósito mensual adelantado es de \$700.-?

$$a)\ S_{\overline{n|}} = Cs_{\overline{n|}:i} = \mathrm{C}\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad C = 46.800\frac{0,008}{1,008^{50}-1} = \boxed{764,94}$$

$$\text{b) } 46.800 = S_{\overline{50|}} + 1.000 \qquad 45.800 = S_{\overline{50|}} \qquad C = 45.800\frac{0,008}{1,008^{50}-1} = 748,59$$

La cuota disminuye en $\boxed{\$16,35}$

$$\text{c) } 46.800 = S'_{\overline{50|}} + R(1+i) \qquad 46.800 = 700\text{x}1,008\text{x}\frac{1,008^{50}-1}{0,008} + Rx1,008$$

$$\boxed{R = 3.601,49}$$

11.- Hace 2 años y 2 meses, una persona adquirió un inmueble en \$1.500.000.-. A los 2 meses lo alquiló en \$9.900.-. Hoy desea venderlo considerando una tasa de interés del 2% mensual. ¿Cuál deberá ser el precio de venta?

Época de valuación: período 26

$$1.500.000x1,02^{26} = S'_{\overline{n}|i} + \text{Precio de Venta}$$

$$1.500.000x1,02^{26} = 9.900x1,02\frac{1,02^{24}-1}{0,02} + PV$$

$$2.510.127,17 - 307.199,97 = PV \qquad \boxed{PV = 2.202.927,20}$$

12.- Una persona tiene cuenta en dos bancos diferentes. En el 1ro efectúa depósitos bimestrales vencidos durante 6 años al 2% bimestral con capitalizaciones bimestrales. En la 2da entidad, la cuota equivale a la anterior incrementada en $500.- y se deposita trimestralmente al 2,50% trimestral. Si al cabo de los 6 años ambas cuentas registran el mismo saldo ¿cuál es el valor de la cuota que se deposita en cada institución?

$$S_{\overline{n_1}|} = S_{\overline{n2}|} \qquad C_1\frac{1,02^{36}-1}{0,02} = (C_1+500)\frac{1,025^{24}-1}{0,025}$$

$$C_1x51,994367 = C_1x32,349038 + 16.174,52 \quad ; \quad C_1(51,994367 - 32,349038) = 16.174,52$$

$$C_1 = \boxed{823,32} \qquad C_2 = (C_1+500) = \boxed{1.323,32}$$

13.- Determinar a qué tasa se debe concertar la formación de un capital para que en 10 trimestres, con cuotas trimestrales vencidas, los intereses ganados alcancen el 50% del capital formado. (Trabajar con un error menor al 0,001)

$$Intereses = 0,50xS_{\overline{n}|}$$

$$S_{\overline{n}|} - nC = 0,50xS_{\overline{n}|}$$

$$S_{\overline{n}|} - n\left(S_{\overline{n}|}s^{-1}_{\overline{n}|i}\right) = 0,50xS_{\overline{n}|}$$

$$S_{\overline{n}|}\left(1 - ns^{-1}_{\overline{n}|i}\right) = 0,50xS_{\overline{n}|}$$

simplificando $S_{\overline{n}|}$

$$1 - ns^{-1}_{\overline{n}|i} = 0,50$$

$$1 - 10xs^{-1}_{\overline{n}|i} = 0,50 \qquad 1\text{-}0,50=10xs^{-1}_{\overline{n}|i} \qquad 0,50=10xs^{-1}_{\overline{n}|i} \qquad s_{\overline{n}|i} = \frac{10}{0,50} = 20$$

$$20 = s_{\overline{10}|i} = \frac{(1+i)^{10}-1}{i} = f_{(i)} \quad \text{función creciente}$$

Tanteo financiero. Se prueba con distintos valores de tasa:

$Para \quad i = 0{,}10 \qquad f_{(i)} = 15{,}937425$ como mi dato es $f_{(i)} = 20$ subo la tasa

$Para \quad i = 0{,}14 \qquad f_{(i)} = 19{,}337295$ como mi dato es $f_{(i)} = 20$ subo la tasa

$Para \quad i = 0{,}146 \qquad f_{(i)} = 19{,}911129$ como mi dato es $f_{(i)} = 20$ subo la tasa

$Para \quad i = 0{,}147 \qquad f_{(i)} = 20{,}008515$ como mi dato es $f_{(i)} = 20$

Como $f_{(i)} = 20$ y $19{,}911129 < f_{(i)} = 20 < 20{,}008515$ entonces

$i_a = 0{,}146 \qquad f_{(i_a)} = 19{,}911129$

$i_p = 0{,}147 \qquad f_{(i_p)} = 20{,}008515$ se aplica interpolación lineal

Interpolación lineal:

$$\frac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}} \qquad \frac{i_I - 0{,}146}{0{,}147 - 0{,}146} = \frac{20 - 19{,}911129}{20{,}008515 - 19{,}911129} \quad \text{y despejando}$$

$$i_I = 0{,}146 + \frac{20 - 19{,}911129}{20{,}008515 - 19{,}911129}(0{,}147 - 0{,}146) = \boxed{0{,}146914 \text{ trimestral}} \qquad i_a < i_I < i_p$$

14.- Determinar a qué tasa mensual se colocaron 12 cuotas mensuales adelantadas de \$650.- cada una para formar un capital de \$10.000.-. (Trabajar con un error menor al 0,001).

$$S'_{\overline{n}|} = C'(1+i)s_{\overline{n}|i} \qquad 10.000 = 650x(1+i)s_{\overline{12}|i}$$

$$\frac{10.000}{650} = 15{,}384615 = (1+i)s_{\overline{12}|i} = (1+i)\frac{(1+i)^{12} - 1}{i} = f_{(i)} \quad \text{función creciente}$$

Tanteo financiero. Se prueba con distintos valores de tasa:

$Para \quad i = 0{,}01 \qquad f_{(i)} = 12{,}809328$ como mi dato es $f_{(i)} = 15{,}384615$ subo la tasa

$Para \quad i = 0{,}03 \qquad f_{(i)} = 14{,}617790$ como mi dato es $f_{(i)} = 15{,}384615$ subo la tasa

$Para \quad i = 0{,}037 \qquad f_{(i)} = 15{,}316286$ como mi dato es $f_{(i)} = 15{,}384615$ subo la tasa

$Para \quad i = 0{,}038 \qquad f_{(i)} = 15{,}419042$

Como $f_{(i)} = 15{,}384615$ y $15{,}316286 < f_{(i)} = 15{,}384615 < 15{,}419042$ entonces

$i_a = 0{,}037 \qquad f_{(i_a)} = 15{,}316286$

$i_p = 0{,}038 \qquad f_{(i_p)} = 15{,}419042$ se aplica interpolación lineal

Interpolación lineal:

$$\frac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}} \qquad \frac{i_I - 0{,}037}{0{,}038 - 0{,}037} = \frac{15{,}384615 - 15{,}316286}{15{,}419042 - 15{,}316286} \quad \text{y despejando}$$

$$i_I = 0{,}037 + \frac{15{,}384615 - 15{,}316286}{15{,}419042 - 15{,}316286}(0{,}038 - 0{,}037) = \boxed{0{,}037665 \text{ mensual}} \qquad i_a < i_I < i_p$$

15.- Determinar el valor financiero de una renta de $7.000.- mensuales al 3% mensual durante 15 meses con actualizaciones mensuales en los siguientes casos:
a) Renta inmediata de pagos vencidos.
b) Renta inmediata de pagos adelantados.
c) Renta diferida de pagos vencidos (diferimiento de 5 meses).
d) Renta diferida de pagos adelantados (diferimiento de 10 meses).
e) Renta anticipada en 3 meses de pagos vencidos.
f) Renta anticipada en 3 meses de pagos adelantados.
g) Renta de ahorro de pagos vencidos.
h) Renta de ahorro de pagos adelantados.

a) $V_{\lceil n} = C a_{\lceil n:i} = C\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 7.000\dfrac{1-1,03^{-15}}{0,03} = \boxed{83.565,55}$

b) $V'_{\lceil n} = C'(1+i)\,a_{\lceil n:i} = C'(1+i)\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 7.000\text{x}1,03\dfrac{1-1,03^{-15}}{0,03} = 83.565,55x1,03 = \boxed{86.072,51}$

c) $-d\,/V_{\lceil n} = C a_{\lceil n:i}(1+i)^{-d} = C\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-d} = 7.000\dfrac{1-1,03^{-15}}{0,03}1,03^{-5} = \boxed{72.084,38}$

d) $-d\,/V'_{\lceil n} = C'(1+i)\,a_{\lceil n:i}(1+i)^{-d} = C'(1+i)\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-d} = 7.000\text{x}1,03\dfrac{1-1,03^{-15}}{0,03}1,03^{-10} = \boxed{64.046,03}$

e) $a\,/V_{\lceil n} = C a_{\lceil n:i}(1+i)^{a} = C\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{a} = 7.000\dfrac{1-1,03^{-15}}{0,03}1,03^{3} = \boxed{91.314,33}$

f) $a\,/V'_{\lceil n} = C'(1+i)\,a_{\lceil n:i}(1+i)^{a} = C'(1+i)\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-a} = 7.000\text{x}1,03\dfrac{1-1,03^{-15}}{0,03}1,03^{3} = \boxed{94.053,76}$

g) $S_{\lceil n} = C a_{\lceil n:i}(1+i)^{n} = C\dfrac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{n}\,i}(1+i)^{n} = C\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i} = 7.000\dfrac{1,03^{15}-1}{0,03} = \boxed{130.192,40}$

h) $S'_{\lceil n} = C'(1+i)\,s_{\lceil n:i} = C'(1+i)\dfrac{(1+i)^{n}-1}{i} = 7.000\text{x}1,03\dfrac{1,03^{15}-1}{0,03} = \boxed{134.098,18}$

16.- Dado un modelo de renta bimestral vencida de 20 cuotas de $1.500.- cada una, siendo la tasa del 2,30% bimestral, determinar el valor de la misma en los siguientes momentos. Indicar frente a qué problema real se encuentra:
a) 6 meses antes de la época inicial.
b) en la época final.
c) en la época inicial.

a) Renta temporaria por 20 bimestres diferida por 3 bimestres

$$-d\,/V_{\lceil n} = C a_{\lceil n:i}(1+i)^{-d} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-d} = 1.500\frac{1-1,023^{-20}}{0,023}1,023^{-3} = \boxed{22.260,10}$$

b) Imposición o renta de ahorro por 20 bimestres

$$S_{\lceil n} = C s_{\lceil n:i} = C\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = 1.500\frac{1,023^{20}-1}{0,023} = \boxed{37.554,91} = 22.260,10x1,023^{23}$$

c) Renta inmediata o amortización temporaria por 20 bimestres

$$V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1.500\frac{1-1,023^{-20}}{0,023} = \boxed{23.831,65} = 37.554,91x1,023^{-20}$$

17.- Una empresa desea adquirir una máquina cuyo precio de contado es \$450.000.- o bien financiado en 10 cuotas mensuales a partir de la entrega de la misma que se realizará a los 3 meses de la fecha de compra. Trabajando con una tasa mensual del 1,10% y optando por la compra a plazo ¿cuál será el importe de la cuota?

$$-d/V'_{\overline{n|}} = C'(1+i)a_{\overline{n|}i}(1+i)^{-d}$$

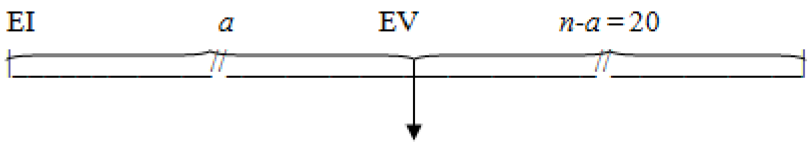
$$450.000 = C'x1,011\frac{1-(1,011)^{-10}}{0,011}1,011^{-3} \qquad \boxed{C' = 48.823,82} \qquad \text{o bien}$$

considerando cuotas vencidas $\quad 450.000 = C\dfrac{1-(1,011)^{-10}}{0,011}1,011^{-2}$

18.- Se contrae una operación de ahorro y préstamo para la adquisición de un rodado. El solicitante abona "*a*" cuotas mensuales vencidas reuniendo un capital de \$15.128,15 a la tasa de interés del 1,10% mensual. Transcurrido dicho lapso pactado se recibe el vehículo cuyo precio en ese momento es de \$38.376,15. El comprador cancela el saldo de la deuda en 20 meses con cuotas iguales a las abonadas en los primeros "*a*" períodos.

a) ¿Cuál es la cuota mensual vencida?

b) ¿Cuántos períodos se necesitan para formar \$15.128,15?



a) $a/V_{\overline{n|}} = S_{\overline{a|}} + V_{\overline{n-a|}} \qquad V_{\overline{n-a|}} = 38.376,15 - 15.128,15 = 23.248.-$

$$V_{\overline{n-a|}} = Ca_{\overline{n-a|}i} = C\frac{1-(1+i)^{-(n-a)}}{i} \qquad 23.248 = C\frac{1-1,011^{-20}}{0,011} \qquad \boxed{C = 1.301,30}$$

b) $S_{\overline{a|}} = Cs_{\overline{a|}i} = C\dfrac{(1+i)^{a}-1}{i} \qquad 15.128,15 = 1.301,30\dfrac{1,011^{a}-1}{0,011} \qquad \boxed{a = 11 \text{ meses}}$

19.- Se adquiere un inmueble en las siguientes condiciones: al efectuar la operación se pagan \$200.000.- y se recibe el bien. Se abonarán 15 cuotas mensuales vencidas:

a) las 4 primeras de \$50.000.- cada una.

b) las 7 siguientes de \$60.000.- cada una.

c) y las últimas de \$70.000.- cada una.

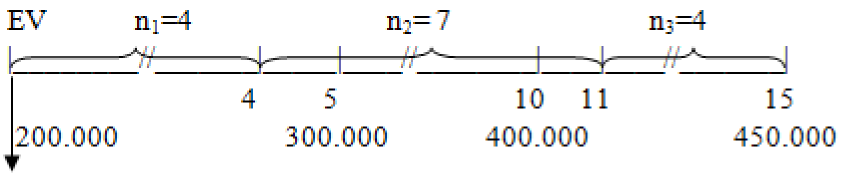
Además existen 3 pagos extraordinarios de:

\$300.000.- al final del 5to. mes

\$400.000.- al final del 10mo. mes

\$450.000.- al final del 15to. mes.

Si la tasa es del 3,60% trimestral capitalizando mensualmente ¿cuál es el precio de contado del bien? Calcular, además, el total de intereses abonados.



$$P.C.=200.000+V_{\overline{4}|}+\left(-4/V_{\overline{7}|}\right)+\left(-11/V_{\overline{4}|}\right)+300.000\left(1+i\right)^{-5}+400.000\left(1+i\right)^{-10}+450.000\left(1+i\right)^{-15}$$

$$P.C.=200.000+50.000\frac{1-1,012^{-4}}{0,012}+60.000\frac{1-1,012^{-7}}{0,012}x1,012^{-4}+70.000\frac{1-1,012^{-4}}{0,012}x1,012^{-11}+$$

$$+300.000x1,012^{-5}+400.000x1,012^{-10}+450.000x1,012^{-15}$$

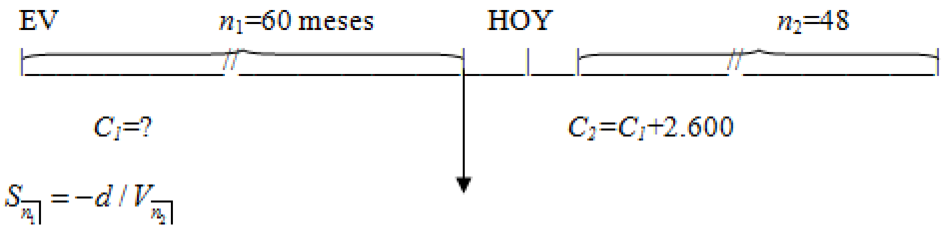
$$P.C.=200.000+194.141,03+381.881,64+238.374,47+282.630,28+355.021,67+376.274,53$$

$$\boxed{P.C.=2.028.323,62}$$

$$Ints.\ abon.=200.000+50.000x4+60.000x7+70.000x4+300.000+400.000+450.000-2.028.323,62$$

$$\boxed{Intereses\ abonados=221.676,38}$$

20.- Desde hace 5 años y hasta hoy he depositado cierta suma al fin de cada mes en una entidad que capitaliza mensualmente al 0,60% mensual. Dentro de 2 meses deseo comenzar a retirar al fin de cada mes una suma superior en $2.600.- a la que depositaba anteriormente, de manera que al cabo de 4 años termine con mi capital. Calcular el valor de cada uno de los depósitos y cada uno de los retiros. Determinar, además, la suma ahorrada en los 5 primeros años.



$$a)\ S_{\overline{n_1}|}=-d/V_{\overline{n2}|} \qquad C_1\frac{1,006^{60}-1}{0,006}=\left(C_1+2.600\right)\frac{1-1,006^{-48}}{0,006}1,006^{-2}$$

$$C_1x71,964735=C_1x41,104090+2.600x41,104090$$

$$C_1x30,860645=106.870,63$$

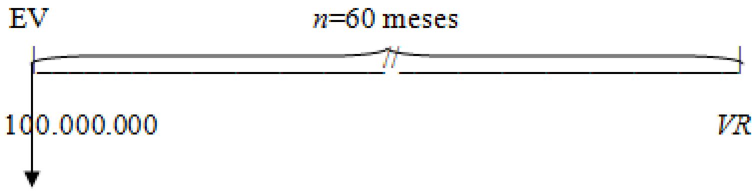
$$\boxed{C_1=3.463,01} \qquad \boxed{C_2}=C_1+2.600=\boxed{6.063,01}$$

$$b)\ S_{\overline{n_1}|}=3.463,01\frac{1,006^{60}-1}{0,006}=\boxed{249.214,60}$$

21.- Una empresa que fabrica electrodomésticos desea abrir una nueva sucursal en otra ciudad y para ello toma un contrato de leasing inmobiliario por el término de 5 años con opción de comprar el inmueble en caso que la nueva sucursal prospere. El valor total del inmueble es de $100.000.000.- y la cuota mensual o canon que debe abonar la empresa al dador del inmueble es de $2.350.718,63 a la tasa del 2% mensual. Determinar:

a) el valor residual pactado al final del contrato de leasing

b) el total de intereses abonados en el contrato



a) $100.000.000 = 2.350.718,63\, a_{\overline{60|}0,02} + VRx1,02^{-60}$

$$100.000.000 - 2.350.718,63\frac{1-1,02^{-60}}{0,02} = VRx1,02^{-60}$$

$$\frac{100.000.000 - 81.713.064,01}{1,02^{-60}} = VR$$

$$\boxed{VR = 60.000.000.-}$$

b) Intereses abonados $= Cx60 - 40.000.000$

Intereses abonados $= 2.350.718,63x60 - 40.000.000$

$\boxed{\text{Intereses abonados} = 101.043.117,98}$

22.- Para la construcción de un puente se requieren \$500.000.000.- iniciales y \$100.000.000.- cada 10 años de mantenimiento a perpetuidad. Considerando una tasa de interés del 10% anual, calcular el valor de contado de esta inversión.

$i = 1,10^{10} - 1 = 1,593742$ para 10 años

Valor de contado=Pago inicial + Renta perpetua=500.000.000+$V_{\overline{\infty|}}$=500.000.000+$\frac{C}{i}$

Valor de contado=500.000.000$+\frac{100.000.000}{1,593742} = \boxed{562.745.413.-}$

23.- ¿Cuál sería el alquiler teórico de un departamento cuyo valor es de \$12.000.000.- siendo la tasa de interés del 1% mensual?

$V'_{\overline{\infty|}} = \frac{C'}{i}(1+i)$ $\qquad$ $12.000.000 = \frac{C'}{0,01}1,01$ $\qquad$ $\boxed{C' = 118.811,88}$

24.- ¿Cuál es el tiempo de anticipación de una renta perpetua de \$742.545,59 con cuotas bimestrales vencidas de \$13.000.- si la tasa es del 2,30% bimestral?

$a/V_{\overline{\infty|}} = \frac{C}{i}(1+i)^a$ $\qquad$ $742.545,59 = \frac{13.000}{0,023}1,023^a$ $\qquad$ $\boxed{a = 12 \text{ bimestres}}$

CAPÍTULO V

Rentas con Cuotas Variables y Flujos Irregulares

5.1. Rentas con cuotas variables en progresión aritmética.
  5.1.1. Determinación del Valor Actual
  5.1.2. Observaciones
  5.1.3. Ejemplo
  5.1.4. Aplicación (Otras rentas y rentas perpetuas)

5.2. Rentas con cuotas variables en progresión geométrica.
  5.2.1. Determinación del Valor Actual
  5.2.2. Observaciones
  5.2.3. Ejemplo
  5.2.4. Aplicación (Otras rentas y rentas perpetuas)

5.3. Rentas con cuotas variables sin Ley. Teoría de las Inversiones.
  5.3.1. Definición.
  5.3.2. Clasificación.
  5.3.3. Criterios de evaluación.
    5.3.3.1. Criterio del Valor Actual Neto – V.A.N.
    5.3.3.2. Criterio de la Tasa Interna de Retorno – T.I.R.

5.4. Inversiones que presentan distintas vidas económicas

5.5. Flujos Irregulares.

5.6. Aplicaciones (Proyectos mutuamente excluyentes)

5.7. Ejercitación Capítulo V.

5.1. Rentas con Cuotas Variables en Progresión Aritmética

5.1.1. Determinación del Valor Actual

En estas rentas cada cuota se obtiene de la anterior sumándole una constante llamada razón que se simboliza "*r*".

EI=EV

```
0       1        2        3                                      n-1      n
|_______|________|________|_________//___________________________|________|
        C       C+r     C+2r                              C+(n-2)r  C+(n-1)r
```

Como la época de valuación está ubicada en el momento inicial se deben actualizar todas las cuotas

$$V_{n\rceil pa}=\frac{C}{1+i}+\frac{C+r}{(1+i)^2}+\frac{C+2r}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{C+(n-2)r}{(1+i)^{n-1}}+\frac{C+(n-1)r}{(1+i)^n} \qquad (1)$$

Multiplicando ambos miembros por (1+i)

$$V_{n\rceil pa}(1+i)=C+\frac{C+r}{(1+i)}+\frac{C+2r}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{C+(n-2)r}{(1+i)^{n-2}}+\frac{C+(n-1)r}{(1+i)^{n-1}} \qquad (2)$$

Restando (2) - (1), agrupando los términos con igual denominador y escribiendo primero el primer término de (2) y último el último término de (1):

$$V_{n\rceil pa}(1+i)-V_{n\rceil pa}=C+\frac{r}{(1+i)}+\frac{r}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{r}{(1+i)^{n-1}}-\frac{C+(n-1)r}{(1+i)^n}$$

$$V_{n\rceil pa}+V_{n\rceil pa}i-V_{n\rceil pa}=C+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{r}{(1+i)^j}-\frac{C}{(1+i)^n}-\frac{nr}{(1+i)^n}+\frac{r}{(1+i)^n}$$

$$V_{n\rceil pa}i=\left(C-\frac{C}{(1+i)^n}\right)+r\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^j}-\frac{nr}{(1+i)^n} \qquad \boxed{A}$$

pasando *i* dividiendo al segundo miembro y agrupando

$$V_{n\rceil pa}=C\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)+\frac{r}{i}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^j}-\frac{nr}{i(1+i)^n}=\left(C+\frac{r}{i}\right)a_{n\rceil i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_{n\rceil pa}=\left(C+\frac{r}{i}\right)a_{n\rceil i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}} \quad \text{Fórmula final}$$

Si en $\boxed{A}$ se suma y resta "*nr*" en el segundo miembro

$$V_{n\rceil pa}i=C\left[1-(1+i)^{-n}\right]+ra_{n\rceil i}+\left[nr-\frac{nr}{(1+i)^n}\right]-nr$$

$$V_{n\rceil pa}i=C\left[1-(1+i)^{-n}\right]+ra_{n\rceil i}+nr\left[1-(1+i)^{-n}\right]-nr$$

$$V_{n\rceil pa}=C\frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}+\frac{r}{i}a_{n\rceil i}+nr\frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}-\frac{nr}{i}$$

$$\boxed{V_{\overline{n|}pa} = \left[C + \frac{r}{i} + nr \right] a_{\overline{n|}i} - \frac{nr}{i}}$$ Fórmula final equivalente a la anterior

5.1.2. Observaciones:

a) Si $r>0$ las cuotas son crecientes

b) Si $r=0$ las cuotas son constantes y se obtiene la fórmula de una renta inmediata con cuotas constantes y vencidas.

$$V_{\overline{n|}pa} = \left[C + \frac{r}{i} + nr \right] a_{\overline{n|}i} - \frac{nr}{i} \text{ si r = 0} \qquad \boxed{V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i}}$$

Conclusión: Una amortización con cuotas constantes es un caso particular de una renta con cuotas variables en progresión aritmética donde la razón r=0.

c) ¿Puede ser negativa la razón de la progresión aritmética que vincula las cuotas?

Ej.: Suponiendo que C = 300 y r = -100 entonces C_2 =200, C_3 =100, C_4 = 0, C_5 = -100. Esto es un absurdo.

La razón de la progresión aritmética puede ser negativa con la condición que la última cuota sea positiva:

$$C+(n-1)r>0 \quad C+nr-r>0 \quad nr>-(C-r)$$

$$n<-\left(\frac{C-r}{r}\right)$$ (el sentido de la desigualdad cambia porque r es negativo)

En el ejemplo $n<-\left(\frac{300+100}{-100}\right)$ $\boxed{n<4}$

La cantidad de cuotas en que se puede pactar el pago de la deuda es menor o igual a 3.

5.1.3. Ejemplo:

Suponiendo una deuda que se cancela con cuotas variables en progresión aritmética al 4% mensual donde la primera cuota es de \$2.000.- la razón de \$20.- y a cancelar en 12 meses determinar la deuda a cancelar y construir el cuadro de amortización.

$$V_{\overline{n|}pa} = \left[C + \frac{r}{i} + nr \right] a_{\overline{n|}i} - \frac{nr}{i} = \left[2.000 + \frac{20}{0,04} + 12x20 \right] \frac{1-1,04^{-12}}{0,04} - \frac{12x20}{0,04} = \boxed{\$19.715,10}$$

k	Deuda (1) = $(6)_{k-1}$	Ints (2)=(1) x i	Cuota (3)=C_{k-1}+ r	Amort (4) = C_k-(2)	Total amort (5)=suma(4)	Saldo (6)=(1)-(4)
1	19.715,10	788,60	2.000,00	1.211,40	1.211,40	18.503,71
2	18.503,71	740,15	2.020,00	1.279,85	2.491,25	17.223,85
3	17.223,85	688,95	2.040,00	1.351,05	3.842,29	15.872,81
4	15.872,81	634,91	2.060,00	1.425,09	5.267,38	14.447,72
5	14.447,72	577,91	2.080,00	1.502,09	6.769,47	12.945,63
6	12.945,63	517,83	2.100,00	1.582,17	8.351,65	11.363,45
7	11.363,45	454,54	2.120,00	1.665,46	10.017,11	9.697,99
8	9.697,99	387,92	2.140,00	1.752,08	11.769,19	7.945,91
9	7.945,91	317,84	2.160,00	1.842,16	13.611,35	6.103,75
10	6.103,75	244,15	2.180,00	1.935,85	15.547,20	4.167,90
11	4.167,90	166,72	2.200,00	2.033,28	17.580,49	2.134,62
12	2.134,62	85,38	2.220,00	2.134,62	19.715,10	0,00

5.1.4. Aplicación de rentas con cuotas variables en progresión aritmética

Cuando se estudió el valor actual de una renta temporaria, inmediata, con cuotas constantes y vencidas se obtuvo la siguiente fórmula que se la llamó "fórmula base": $V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i}$

Se determinó, también, que a medida que se modificaba alguna condición de la renta se introducían distintos factores a saber:

a) Si la cuota es adelantada aparece el factor $(1+i)$

b) Si la renta es diferida aparece el factor $(1+i)^{-d}$

c) Si la renta es anticipada aparece el factor $(1+i)^{a}$

d) Si la renta se valúa al final (renta de ahorro) aparece el factor $(1+i)^{n}$

Recordando que el valor actual de una renta con cuotas vencidas variables en progresión aritmética y considerando como "fórmula base": $\boxed{V_{\overline{n|}pa} = \left(C + \frac{r}{i}\right)a_{\overline{n|}i} - \frac{nr}{\mathrm{i}}(1+i)^{-n}}$

Incorporando los mismos factores antes mencionados se obtendrán las distintas rentas temporarias con cuotas variables en progresión aritmética (cuadro I)

$$\left(\text{recordar que: } a_{\overline{n|}i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n\, i}(1+i)^n = s_{\overline{n|}i}\right)$$

Rentas perpetuas: Cuando se estudiaron las rentas perpetuas de cuotas constantes se aplicó el $\lim\limits_{n\to\infty}$ a las rentas temporarias. Siguiendo el mismo razonamiento:

$$V_{\overline{n|}pa} = \lim_{n\to\infty} V_{\overline{n|}pa} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[C + \frac{r}{i}\right]a_{\overline{n|}i} - \frac{nr}{i}(1+i)^{-n}\right\} \text{ y recordando que } \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i} = \frac{1}{i} \text{ entonces}$$

$$V_{\overline{n|}pa} = \lim_{n\to\infty} V_{\overline{n|}pa} = \left(C + \frac{r}{i}\right)\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i} - \lim_{n\to\infty}\left[\frac{nr}{i(1+i)^n}\right] = \left(C + \frac{r}{i}\right)\frac{1}{i} - 0 = \boxed{\frac{C}{i} + \frac{r}{i^2}}$$

Aplicando la regla de L' Hópital se demostrará que el límite del sustraendo es 0. Brevemente, la regla de L' Hópital dice que:

$$Si \ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0} \quad o \ \to \frac{\infty}{\infty} \ \text{ dicha indeterminación puede salvarse haciendo } \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Como r e i son constantes se sacan fuera de la demostración

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+i)^n} \to \frac{\infty}{\infty} \quad \text{y haciendo las derivadas}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n .\ln(1+i)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n .\delta} \to 0$$

Llamando a esta fórmula $\boxed{V_{\overline{n|}pa} = \frac{C}{i} + \frac{r}{i^2}}$ "fórmula base" e incorporando los distintos factores mencionados anteriormente se obtienen las demás rentas perpetuas con cuotas variables en progresión aritmética (cuadro II).

Cuadro I: Rentas Temporarias con Cuotas Variables en Progresión Aritmética

	Temporaria	
	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{n\rvert}pa}=\left(C+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}$ "fórmula base"	$V'_{\overline{n\rvert}pa}=\left[\left(C'+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}\right](1+i)$
Diferida	$-d/V_{\overline{n\rvert}pa}=\left[\left(C+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}\right](1+i)^{-d}$	$-d/V'_{\overline{n\rvert}pa}=\left[\left(C'+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}\right](1+i)(1+i)^{-d}$
Anticipada	$a/V_{\overline{n\rvert}pa}=\left[\left(C+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}\right](1+i)^{a}$	$a/V'_{\overline{n\rvert}pa}=\left[\left(C'+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}(1+i)^{-n}\right](1+i)(1+i)^{a}$
Imposición (caso particular renta anticipada *a* = *n*)	$S_{\overline{n\rvert}pa}=\left(C+\frac{r}{i}\right)s_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}$	$S'_{\overline{n\rvert}pa}=\left[\left(C'+\frac{r}{i}\right)s_{\overline{n\rvert}i}-\frac{nr}{i}\right](1+i)$

Ejemplo: si C=20.000.- ; r=200 ; n = 12 ; i = 0,04 se calcula la renta base y para las demás rentas temporarias con cuotas variables en progresión aritmética se multiplica por el factor que corresponda.

	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{n\rvert}pa}=\left(20.000+\frac{200}{0,04}\right)\frac{1-1,04^{-12}}{0,04}-\frac{12x200}{0,04}1,04^{12}=197.151,02$	$V'_{\overline{n\rvert}pa}=197.151,02x1,04=205.037,06$
Diferida d=6	$-d/V_{\overline{n\rvert}pa}=197.151,02x1,04^{-6}=155.811,32$	$-d/V'_{\overline{n\rvert}pa}=155.811,32x1,04=162.043,77$
Anticipada a=1	$a/V_{\overline{n\rvert}pa}=197.151,02x1,04^{1}=205.037,06$	$a/V'_{\overline{n\rvert}pa}=205.037,06x1,04=213.238,54$
Imposición (a=n=12)	$S_{\overline{n\rvert}pa}=197.151,02x1,04^{12}=315.645,14$	$S'_{\overline{n\rvert}pa}=315.645,14x1,04=328.270,94$

Observación: la renta temporaria inmediata con cuotas adelantadas es igual a la renta temporaria anticipada por 1 período con cuotas vencidas

Cuadro II: Rentas Perpetuas con Cuotas Variables en Progresión Aritmética

	Perpetua	
	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{\infty}\rceil pa}=\frac{C}{i}+\frac{r}{i^2}$ "fórmula base"	$V'_{\overline{\infty}\rceil pa}=\left(\frac{C'}{i}+\frac{r}{i^2}\right)(1+i)$
Diferida	$-d/V_{\overline{\infty}\rceil pa}=\left(\frac{C}{i}+\frac{r}{i^2}\right)(1+i)^{-d}$	$-d/V'_{\overline{\infty}\rceil pa}=\left(\frac{C'}{i}+\frac{r}{i^2}\right)(1+i)(1+i)^{-d}$
Anticipada	$a/V_{\overline{\infty}\rceil pa}=\left(\frac{C}{i}+\frac{r}{i^2}\right)(1+i)^{a}$	$a/V'_{\overline{\infty}\rceil pa}=\left(\frac{C'}{i}+\frac{r}{i^2}\right)(1+i)(1+i)^{a}$
Imposición (E.V.= E.F. infinito)	No existe	No existe

Ejemplo: si C=20.000.- ; r = 200.- ; i = 0,04 se calcula la renta base y para las demás rentas perpetuas con cuotas variables en progresión aritmética se multiplica por el factor que corresponda.

	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{\infty}\rceil pa}=\frac{20.000}{0,04}+\frac{200}{0,04^2}=625.000,00$	$V'_{\overline{\infty}\rceil pa}=\left(\frac{20.000}{0,04}+\frac{200}{0,04^2}\right)1,04=650.000,00$
Diferida d=6	$-d/V_{\overline{\infty}\rceil pa}=625.000,00x1,04^{-6}=493.946,58$	$-d/V'_{\overline{\infty}\rceil pa}=493.946,58x1,04=513.704,44$
Anticipada a=1	$a/V_{\overline{\infty}\rceil pa}=625.000,00x1,04^{1}=650.000,00$	$a/V'_{\overline{\infty}\rceil pa}=650.000,00x1,04=676.000,00$
Imposición (a=n=12)	----	----

Observación: la renta perpetua inmediata con cuotas adelantadas es igual a la renta perpetua anticipada por 1 período con cuotas vencidas.

5.2. Rentas con Cuotas Variables en Progresión Geométrica

5.2.1. Determinación del Valor Actual

En este caso cada cuota se obtiene de la cuota anterior multiplicándola por una constante llamada razón que se simboliza "*q*".

EI=EV

0	1	2	3	//	n-1	n
	C	Cq	Cq^2		Cq^{n-2}	Cq^{n-1}

Como la época de valuación está ubicada en el momento inicial se deben actualizar, nuevamente, todas las cuotas:

$$V_{\overline{n|}pg} = \frac{C}{1+i} + \frac{Cq}{(1+i)^2} + \frac{Cq^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{Cq^{n-1}}{(1+i)^n} \qquad (*)$$

El segundo miembro es la suma de términos de una progresión geométrica en la cual:
r = razón de la progresión = $q/(1+i)$
a_1 = primer término de la progresión = $C/(1+i)$
n = número de términos = n cuotas

siendo la suma de términos $S_g = a_1 \dfrac{r^n - 1}{r-1} \quad si \quad r > 1$

$$V_{\overline{n|}pg} = \frac{C}{1+i} \frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{q}{1+i} - 1} = \frac{C}{1+i} \left(\frac{\frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{1+i}} \right)$$

a) Si $q > 1+i$ $\quad \boxed{V_{\overline{n|}pg} = C \dfrac{q^n - (1+i)^n}{[q-(1+i)](1+i)^n}}$

b) Si $q < 1+i$ $\quad \boxed{V_{\overline{n|}pg} = C \dfrac{(1+i)^n - q^n}{[(1+i)-q](1+i)^n}}$ Fórmula final $\boxed{B}$

c) Si $q = 1+i$ queda una indeterminación igual a 0/0. Reemplazando en (*)

$$V_{\overline{n|}pg} = \frac{C}{1+i} + \frac{C}{1+i} + \frac{C}{1+i} + \ldots + \frac{C}{1+i}$$

$$\boxed{V_{\overline{n|}pg} = \frac{nC}{1+i} = \frac{nC}{q}}$$

<u>Aclaración:</u>

A la razón de la progresión geométrica "*q*" se la puede reemplazar por "1+*g*" donde "*g*" es la tasa de variación de las cuotas. Numéricamente, si

. las cuotas crecen un 5% entonces g=0,05 y q=1+g = 1,05
. las cuotas decrecen un 5% entonces g = -0,05 y q=1+g =1-0,05=0,95.

Reemplazando q por 1+g en $\boxed{B}$

$$V_{\overline{n|}pg} = C\frac{(1+i)^n - q^n}{\left[(1+i)-q\right](1+i)^n} = C\frac{(1+i)^n - (1+g)^n}{\left[(1+i)-(1+g)\right](1+i)^n}$$

escribiendo $(1+i)^n$ en el denominador del numerador

$$V_{\overline{n|}pg} = C\frac{\dfrac{(1+i)^n - (1+g)^n}{(1+i)^n}}{(1+i)-(1+g)}$$ distribuyendo $(1+i)^n$

$$\boxed{V_{\overline{n|}pg} = C\frac{1-\left(\dfrac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}}$$ otra fórmula final equivalente a $\boxed{B}$

5.2.2. Observaciones:

a) Si $q > 1$ implica que $g > 0$ y entonces las cuotas son crecientes.

b) Si $q = 1$ las cuotas son constantes ($g = 0$) y se obtiene la fórmula de una renta inmediata de cuotas constantes y vencidas. Reemplazando en $\boxed{B}$

$$\boxed{V_{\overline{n|}pg} = C\frac{(1+i)^n - 1}{\left[(1+i)-1\right](1+i)^n} = C\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ca_{\overline{n|}:i} = V_{\overline{n|}}}$$

Conclusión: Una amortización con cuotas constantes es un caso particular de una renta con cuotas variables en progresión geométrica donde la razón q=1 o tasa de variación g=0.

c) Si $0 < q < 1$ las cuotas son decrecientes. (La tasa de variación $-1 < g < 0$)

d) ¿Puede ser negativa la razón de la progresión geométrica (q<0) que vincula las cuotas? NO, porque se obtendrían, alternativamente, una cuota positiva y la siguiente negativa. (Esta condición implica que la tasa de variación g < -1)

e) Si $q = 0$ entonces g = -1 luego no existe renta (sólo la primera cuota)

5.2.3. Ejemplo:

Suponiendo una deuda que se cancela con cuotas variables en progresión geométrica al 4% mensual donde la primera cuota es de $2.000.- y aumentan acumulativamente un 1% y a cancelar en 12 meses determinar la deuda original y construir el cuadro de amortización.

$$V_{\overline{n|}pg} = C\frac{(1+i)^n - q^n}{\left[(1+i)-q\right](1+i)^n} = 2.000\frac{1{,}04^{12} - 1{,}01^{12}}{(1{,}04-1{,}01)1{,}04^{12}} = \boxed{\$19.745{,}89}$$

k	Deuda (1) = (6)$_{k-1}$	Ints (2)=(1) x i	Cuota (3)=C$_{k-1}$ x q	Amort (4)=(3)-(2)	Total amort (5)=suma(4)	Saldo (6)=(1)-(4)
1	19.745,89	789,84	2.000,00	1.210,16	1.210,16	18.535,73
2	18.535,73	741,43	2.020,00	1.278,57	2.488,74	17.257,16
3	17.257,16	690,29	2.040,20	1.349,91	3.838,65	15.907,25
4	15.907,25	636,29	2.060,60	1.424,31	5.262,96	14.482,93
5	14.482,93	579,32	2.081,21	1.501,89	6.764,85	12.981,04
6	12.981,04	519,24	2.102,02	1.582,78	8.347,63	11.398,26
7	11.398,26	455,93	2.123,04	1.667,11	10.014,74	9.731,15

8	9.731,15	389,25	2.144,27	1.755,02	11.769,76	7.976,13
9	7.976,13	319,05	2.165,71	1.846,67	13.616,43	6.129,46
10	6.129,46	245,18	2.187,37	1.942,19	15.558,62	4.187,27
11	4.187,27	167,49	2.209,24	2.041,75	17.600,38	2.145,52
12	2.145,52	85,82	2.231,34	2.145,52	19.745,89	0,00

5.2.4. Aplicación de Rentas con cuotas variables en progresión geométrica

Cuando se estudió el valor actual de una renta temporaria, inmediata, con cuotas constantes y vencidas se obtuvo la siguiente fórmula que se llamará fórmula "base": $\boxed{V_{\overline{n}|} = C a_{\overline{n}|i}}$

Se determinó, también, que a medida que se modificaba alguna condición de la renta se introducían distintos factores a saber:

a) Si la cuota es adelantada aparece el factor $(1+i)$

b) Si la renta es diferida aparece el factor $(1+i)^{-d}$

c) Si la renta es anticipada aparece el factor $(1+i)^{a}$

d) Si la renta se valúa al final (renta de ahorro) aparece el factor $(1+i)^{n}$

Entonces, si se considera como fórmula "base" de las rentas con cuotas variables en progresión geométrica a:

$$\boxed{V_{\overline{n}|pg} = C\,\frac{1-\left(\dfrac{1+g}{1+i}\right)^{n}}{i-g}}$$

Y considerando los distintos factores antes mencionados se obtienen todas las rentas temporarias con cuotas variables (cuadro III).

Rentas Perpetuas: Para hallar el valor financiero global de las rentas perpetuas con cuotas variables en progresión geométrica se aplicará el $\lim\limits_{n\to\infty}$ a las rentas temporarias.

Aquí debe hacerse una primera aclaración. Si la tasa de variación de las cuotas g>0 el valor de las cuotas tendería a ∞ . Por lo tanto existe una restricción: g<0 siendo las cuotas decrecientes.

$$V_{\overline{\infty}|pg} = \lim_{n\to\infty} V_{\overline{n}|pg} = \lim_{n\to\infty}\left\{C\,\frac{1-\left(\dfrac{1+g}{1+i}\right)^{n}}{i-g}\right\} = \frac{C}{i-g}\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n}\right\} \quad \text{siendo } 0<\left(\frac{1+g}{1+i}\right)<1 \text{ se obtiene}$$

$$\text{y siendo} \quad \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1-0\right]=1 \qquad \text{porque} \quad 0<\left(\frac{1+g}{1+i}\right)<1$$

$$\boxed{V_{\overline{\infty}|pg} = \frac{C}{i-g}} \quad \text{"fórmula base"}$$

Aquí debe hacerse una segunda aclaración. Para que el valor financiero global de esta renta sea positivo se exige que la tasa de variación de las cuotas “g” debe ser menor a la tasa de actualización “i” ($g<i$). Esta segunda aclaración está incluida en la primera donde $g<0$.

Para las rentas perpetuas con cuotas variables en progresión geométrica se incorporan los distintos factores mencionados anteriormente y se obtienen las distintas expresiones (cuadro IV)

Cuadro III: Resumen de Rentas Temporarias con Cuotas Variables en Progresión Geométrica con $q \neq (1+i)$

	Temporaria	
	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{n}\|pg} = C\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}$ "fórmula base"	$V'_{\overline{n}\|pg} = C'\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}(1+i)$
Diferida	$-d/V_{\overline{n}\|pg} = C\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}(1+i)^{-d}$	$-d/V'_{\overline{n}\|pg} = C'\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}(1+i)(1+i)^{-d}$
Anticipada	$a/V_{\overline{n}\|pg} = C\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}(1+i)^{a}$	$a/V'_{\overline{n}\|pg} = C'\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}(1+i)(1+i)^{a}$
Imposición (caso particular de una renta anticipada a = n)	$S_{\overline{n}\|pg} = C\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}(1+i)^{n}$	$S'_{\overline{n}\|pg} = C'\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}(1+i)(1+i)^{n}$

Ejemplo: si C=20.000.- ; g = 0,01 =>q = 1+g = 1,01 ; n = 12 ; i = 0,04 se calcula la renta base y para las demás rentas temporarias con cuotas variables en progresión geométrica se multiplica por el factor que corresponda.

Inmediata	$V_{\overline{n}\|pg} = 20.000\dfrac{1-(1,01/1,04)^{12}}{0,04-0,01} = 197.458,94$	$V'_{\overline{n}\|pg} = 20.000\dfrac{1-(1,01/1,04)^{12}}{0,04-0,01}1,04 = 205.357,30$
Diferida d=6	$-d/V_{\overline{n}\|pg} = 197.458,94 x 1,04^{-6} = 156.054,67$	$-d/V'_{\overline{n}\|pg} = 156.054,67 x 1,04 = 162.296,86$
Anticipada a=1	$a/V_{\overline{n}\|pg} = 197.458,94 x 1,04^{1} = 205.357,30$	$a/V'_{\overline{n}\|pg} = 205.357,30 x 1,04 = 213.571,59$
Imposición (a=n=12)	$S_{\overline{n}\|pg} = 197.458,94 x 1,04^{12} = 316.138,13$	$S'_{\overline{n}\|pg} = 316.138,13 x 1,04 = 328.783,65$

Cuadro IV: Resumen de Rentas Perpetuas con Cuotas Variables en Progresión Geométrica con $q \neq (1+i)$

	Perpetua	
	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{C}{i-g}$ "fórmula base"	$V'_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{C'}{i-g}(1+i)$
Diferida	$-d/V_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{C}{i-g}(1+i)^{-d}$	$-d/V'_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{C'}{i-g}(1+i)(1+i)^{-d}$
Anticipada	$a/V_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{C}{i-g}(1+i)^{a}$	$a/V'_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{C'}{i-g}(1+i)(1+i)^{a}$
Imposición	No existe	No existe

Ejemplo: si C=20.000.- ; g =0,01 ; i = 0,04 se calcula la renta base y para las demás rentas perpetuas con cuotas variables en progresión geométrica se multiplica por el factor que corresponda. Se aclara que el valor de las cuotas tendería a infinito pero la renta tiene un valor finito.

	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{20.000}{0,04-0,01} = 666.666,67$	$V'_{\overline{\infty}\rceil pg} = \frac{20.000}{0,04-0,01} x1,04 = 693.333,33$
Diferida d=6	$-d/V_{\overline{\infty}\rceil pg} = 666.666,67x1,04^{-6} = 526.876,35$	$-d/V'_{\overline{\infty}\rceil pg} = 526.876,35x1,04 = 547.951,40$
Anticipada a=1	$a/V_{\overline{\infty}\rceil pg} = 666.666,67x1,04^{1} = 693.333,33$	$a/V'_{\overline{\infty}\rceil pg} = 693.333,33x1,04 = 721.066,67$
Imposición (a=n=12)	----	----

Observación: la renta perpetua inmediata con cuotas adelantadas es igual a la renta perpetua anticipada por 1 período con cuotas vencidas

Caso Particular:

Si la tasa de interés coincide con la tasa de crecimiento de las cuotas (i = g) entonces $q = 1+i = 1+g$ y ya se determinó que la fórmula base es:

$$\boxed{V_{\overline{n|}pg} = \frac{nC}{1+i} = \frac{nC}{q} = \frac{nC}{1+g}}$$

A medida que se modificaba alguna condición de esta renta se introducen los distintos factores que la modifican, a saber:

	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{n\|}pg} = \frac{nC}{1+i}$ "fórmula base"	$V'_{\overline{n\|}pg} = \frac{nC'}{1+i}(1+i) = nC'$
Diferida	$-d/V_{\overline{n\|}pg} = \frac{nC}{1+i}(1+i)^{-d}$	$-d/V'_{\overline{n\|}pg} = nC'(1+i)^{-d}$
Anticipada	$a/V_{\overline{n\|}pg} = \frac{nC}{1+i}(1+i)^{a}$	$a/V'_{\overline{n\|}pg} = nC'(1+i)^{a}$
Imposición	$S_{\overline{n\|}pg} = \frac{nC}{1+i}(1+i)^{n}$	$S'_{\overline{n\|}pg} = nC'(1+i)^{n}$

Ejemplo: si C=20.000.- , n=12 e i=g = 0,04 calcular el valor financiero global de las distintas rentas.

	Con cuotas vencidas	Con cuotas adelantadas
Inmediata	$V_{\overline{n\|}pg} = \frac{12x20.000}{1,04} = \boxed{230.769,23}$	$V'_{\overline{n\|}pg} = 12x20.000 = \boxed{240.000.-}$
Diferida d = 6	$-d/V_{\overline{n\|}pg} = \frac{12x20.000}{1,04} 1,04^{-6} = \boxed{182.380,28}$	$-d/V'_{\overline{n\|}pg} = 12x20.000x1,04^{-6} = \boxed{189.675,49}$
Anticipada a = 1	$a/V_{\overline{n\|}pg} = \frac{12x20.000}{1,04} 1,04^{1} = \boxed{240.000.-}$	$a/V'_{\overline{n\|}pg} = 12x20.000x1,04^{1} = \boxed{249.600.-}$
Imposición	$S_{\overline{n\|}pg} = \frac{12x20.000}{1,04} 1,04^{12} = \boxed{369.468,97}$	$S'_{\overline{n\|}pg} = 12x20.000x1,04^{12} = \boxed{384,247,74}$

Aclaración:

Para $n \rightarrow \infty$ el valor de financiero global de la fórmula base tenderá $\rightarrow \infty$ y todas las demás variantes también. Por lo tanto ninguna de estas rentas tiene aplicación práctica.

5.3. Rentas con Cuotas Variables Sin Ley – Teoría de las Inversiones

En estas rentas las cuotas varían en forma arbitraria, sin existir una razón que las vincule. Para su estudio se aplica la “Teoría de las Inversiones”.

5.3.1. Definición

Una inversión es una asignación de recursos que se realiza con el propósito de recuperar los fondos invertidos y obtener, además, un cierto beneficio.

En la determinación de los flujos netos el criterio de lo devengado no tiene aplicación. Los cobros y los pagos se determinan sobre la base incremental de caja utilizando el criterio de lo percibido.

Si bien en la realidad financiera los ingresos y los egresos se realizan prácticamente en forma continua, para facilitar el análisis y los cálculos se considerará que los mismos se producen al final de cada período, a excepción del desembolso inicial que, por su gran magnitud, se lo analizará en el momento inicial (momento 0).

Si se simboliza con:

C_j al cobro en el período j

P_j al pago en el período j

F_j al flujo neto del período j

$F_j = C_j - P_j$

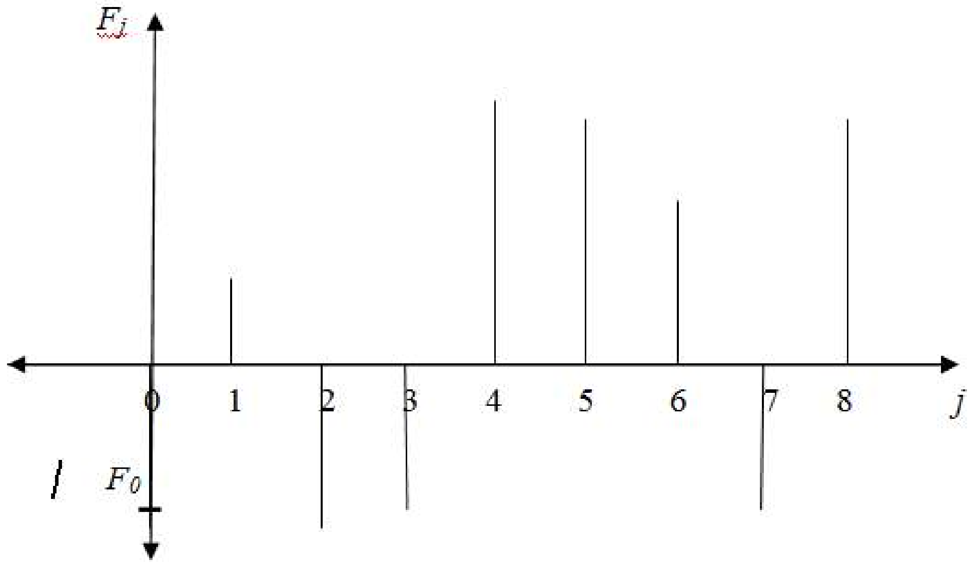
Al conjunto de ingresos y egresos generados por una inversión se lo denomina "fluir neto de fondos".

Considerando que la inversión tiene una duración de "n" períodos, al conjunto de los flujos se lo puede expresar como un vector:

$$F = (F_0; F_1; F_2; ...; F_n)$$

Normalmente, en el momento inicial, no existe ingreso es decir $C_0 = 0$ y entonces $F_0 < 0$. A este flujo se lo llama tamaño o base de la inversión.

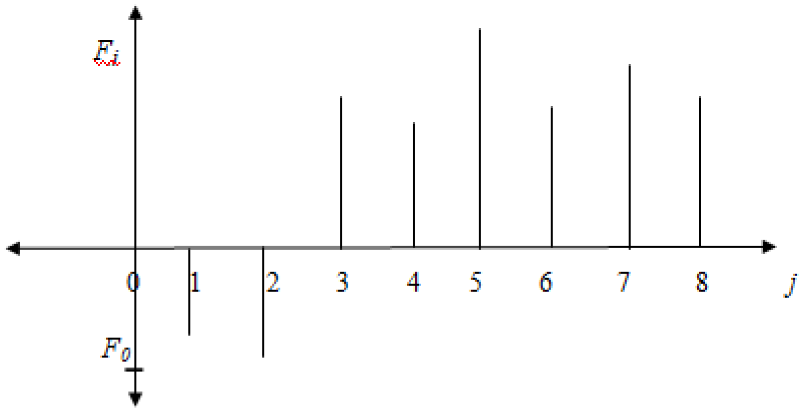
Gráficamente una inversión se representa en un sistema de coordenadas cartesianas: en el eje de abscisas o variable independiente se representa el tiempo y en el eje de ordenadas o variable dependiente, los flujos (gráfico (1)):



5.3.2. Clasificación

1- Según las Características de los Flujos Netos de Fondos

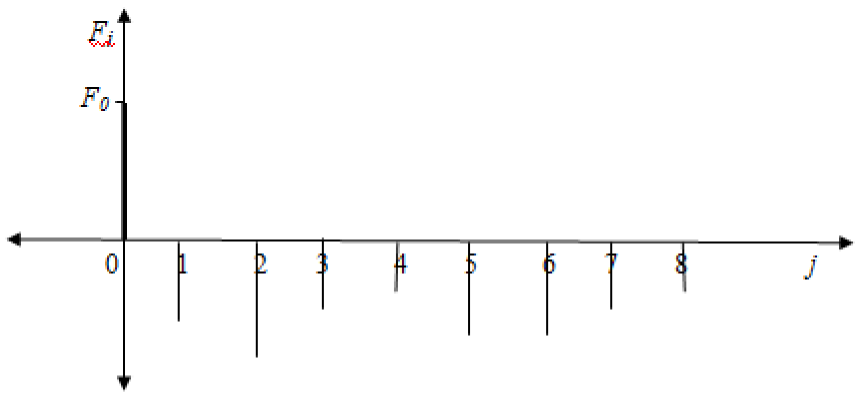
a) Proyectos ordinarios, simples o convencionales: Se caracterizan por la existencia de una serie de flujos negativos (puede ser un único flujo) seguido de una serie de flujos positivos. Se observa un solo "cambio de signo" entre los distintos flujos. Son los que se estudiarán en este libro.



b) Proyectos extraordinarios, no simples o no convencionales: Durante toda la vida del proyecto aparecen alternativamente flujos positivos y flujos negativos. Se dice que existe más de un (1) "cambio de signo" entre los distintos flujos. (Ver gráfico (1) de ésta página, presenta 5 cambios de signo).

c) Proyectos que generan sólo egresos: estos proyectos no generan ingresos. Como ejemplo, se menciona un proyecto de investigación (una nueva droga, fertilizante, herbicida, etc.) que después de determinado tiempo se abandona porque no se obtienen los resultados esperados.

d) Proyectos de generación de fondos: en este caso el flujo inicial es positivo y todos los demás son negativos. Es el caso de un préstamo considerado desde el punto de vista del tomador del mismo. Es el único caso en que, al evaluar el proyecto, se busca la menor tasa de interés ya que para el deudor es la tasa de costo del préstamo.



2- Según la Relación existente entre proyectos de inversión.

a) Proyectos Independientes: La independencia debe darse tanto desde el punto de vista técnico (las dos inversiones no deben relacionarse en cuanto a su uso técnico) como desde el punto de vista económico (los flujos netos de fondos de los proyectos deben ser independientes). El efecto sobre la rentabilidad de los dos proyectos juntos debe ser igual a la rentabilidad de los proyectos realizados separadamente.

R(A+B) = R(A) + R(B)

Donde R(A+B) rentabilidad de los dos proyectos realizados conjuntamente
R(A) rentabilidad del proyecto A
R(B) rentabilidad del proyecto B

b) Proyectos económicamente Dependientes

b1) Inversiones necesarias: para que un proyecto A se realice necesariamente debe realizarse un proyecto B. El proyecto A desaparece si B no se realiza.

b2) Inversiones complementarias: Un proyecto B es complementario de otro A si, de llevarse a cabo B, aumentan los beneficios esperados de A. En términos de rentabilidad:
R(A+B) > R(A) + R(B)

b3) Inversiones sustitutivas: Un proyecto B es sustitutivo de otro proyecto A cuando de llevarse a cabo B disminuyen los beneficios de A.
R(A+B) < R(A) + R(B)

b4) Inversiones incompatibles o mutuamente excluyentes: Un proyecto B es mutuamente excluyente de un proyecto A cuando de realizarse B no puede llevarse a cabo A. En este caso puede realizarse, solamente, uno de los dos proyectos.

5.3.3. Criterios de Evaluación

En toda inversión se presenta el problema fundamental de determinar su rentabilidad. Al disponer de una medida de rentabilidad el inversor está en condiciones de decidir la aceptación o el rechazo de la misma.

Se analizarán dos métodos, V.A.N. y T.I.R., que tienen en cuenta el "valor tiempo" del dinero (utilizan las funciones financieras de actualización y capitalización).

5.3.3.1. Criterio del Valor Actual Neto - VAN

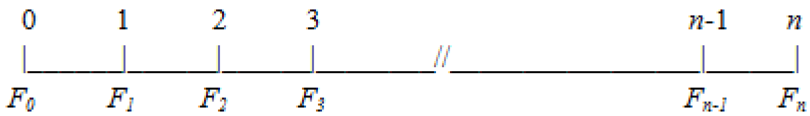
5.3.3.1.1. Definición

"El Valor Actual Neto de una inversión es la suma de todos los flujos netos generados por una inversión actualizados al momento inicial (momento 0)".

Se lo llama también "Valor de Capital" o "Criterio de la Tasa Externa de Retorno".

Gráficamente

EV=EI



$$VAN = F_0 + \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{F_n}{(1+i)^n} \qquad (*)$$

$$\boxed{VAN = \sum_{j=0}^{n} \frac{F_j}{(1+i)^j}} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{VAN = -F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+i)^j}}$$

Como normalmente F_0 representa el desembolso inicial se lo deja fuera de la sumatoria y con signo negativo.

El VAN mide la rentabilidad de un proyecto como una suma financiera de unidades monetarias (pesos, dólares, yenes, etc.), es decir, en términos absolutos.

5.3.3.1.2. Criterio de aceptación

Una inversión es rentable sí y sólo sí el valor actual neto es mayor o igual a cero. En símbolos: Si $VAN \geq 0 \Leftrightarrow$ la inversión es rentable

5.3.3.1.3. Casos particulares

1° Se supone que todos los flujos son iguales salvo el del momento inicial 0.

Si $F_1 = F_2 = F_3 = \ldots = F_n = F$ en (*)

$$VAN = -F_0 + \frac{F}{1+i} + \frac{F}{(1+i)^2} + \frac{F}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$VAN = -F_0 + F\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^j} \qquad \boxed{VAN = -F_0 + Fa_{\overline{n|}i}}$$

En el segundo miembro, el segundo término es una renta temporaria inmediata de cuotas constantes y vencidas *F*.

Se concluye que, en este caso particular, el *VAN* se obtiene sumando a la renta inmediata el flujo inicial negativo.

2° Se supone que todos los flujos son iguales y ellos son ilimitados ($n \to \infty$)

$$VAN_\infty = \lim_{n\to\infty} VAN = \lim_{n\to\infty}(-F_0 + Fa_{\overline{n|}i}) = -F_0 + F\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}i} = -F_0 + F\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = -F_0 + F\frac{1}{i}$$

$$\boxed{VAN_\infty = -F_0 + \frac{F}{i}}$$

En el segundo miembro, el término positivo es una renta perpetua inmediata de cuotas constantes y vencidas *F*.

5.3.3.1.4. Tasa de Actualización

Para determinar el *VAN* de un proyecto se actualizan todos los flujos netos al momento 0 con una tasa de interés o actualización. Dicha tasa permite lograr dos objetivos:

1° homogeneizar los flujos en relación al tiempo mediante la operación financiera de actualización y

2° evaluar la conveniencia económica de la inversión.

Si bien en la literatura financiera se ha discutido bastante sobre cómo determinar esta tasa de actualización existen tres posiciones principales:

Primera posición: Rendimiento Mínimo Requerido: establece que la tasa de actualización es la tasa mínima requerida por el inversor para que la inversión resulte provechosa. Es el rendimiento por debajo del cual el inversor no está dispuesto a arriesgar su capital. Se considera que esta tasa es la más subjetiva, dentro del contexto económico financiero vigente.

Segunda posición: Costo de Oportunidad: en este caso la tasa de actualización representa la ganancia que el inversor puede obtener de la mejor alternativa de inversión. Generalmente, el costo de oportunidad se mide como la tasa máxima que paga el mercado.

Tercera posición: Costo de Capital: esta tasa representa lo que a la empresa le cuesta obtener los recursos financieros para llevar a cabo el proyecto, ya sea de capital propio como ajeno. Bajo esta posición, la tasa de costo de capital es el costo promedio ponderado de las distintas fuentes de financiación de la empresa.

Ejemplo: Para realizar una inversión se necesita disponer de \$1.000.000.-. Se tienen \$400.000.- de capital propio que se podrían invertir a una tasa del 15% anual. Evidentemente, se debe obtener \$600.000.- de capital ajeno cuyo costo es de un 30% anual. Calcular la tasa de costo de capital resultante:

$$i = tasa\ pasiva \frac{Capital\ Propio}{Capital\ Total} + tasa\ activa \frac{Capital\ Ajeno}{Capital\ Total}$$

$$i = 0{,}15 \frac{400.000}{1.000.000} + 0{,}30 \frac{600.000}{1.000.000} = 0{,}15x0{,}40 + 0{,}30x0{,}60 = 0{,}24$$

El costo de capital es del 24% anual.
De estas tres posiciones esta última es la que más aceptación tiene.

5.3.3.1.5. Análisis Funcional del *V.A.N.* para proyectos convencionales

Recordando que el *VAN* es:

$$VAN_{(i)} = -F_0 + F_1(1+i)^{-1} + F_2(1+i)^{-2} + ... + F_n(1+i)^{-n}$$

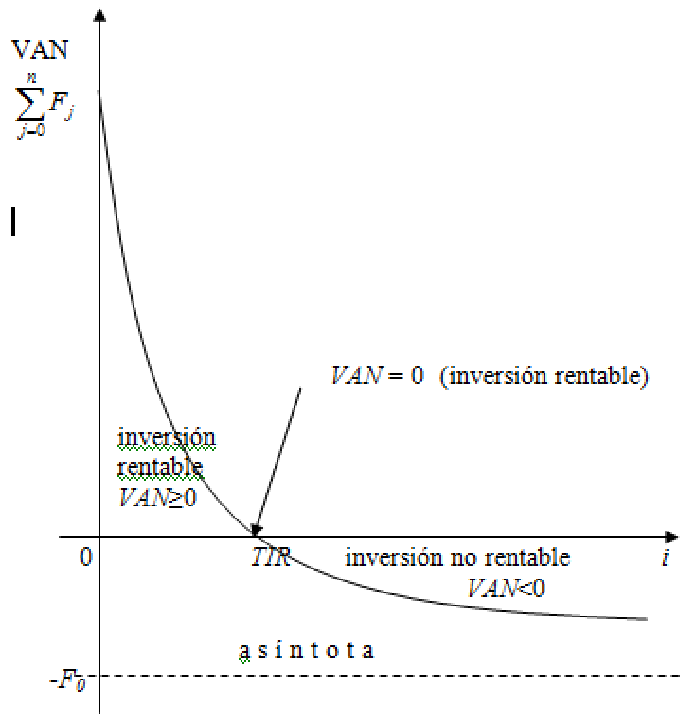
Valores extremos

i	$VAN_{(i)}$
0	$-F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_n = \sum_{j=0}^{n} F_j$
$\to \infty$	$-F_0 + \to 0 \quad \to -F_0$ asíntota

$$VAN_{(i)}' = 0 - F_1(1+i)^{-2} - 2F_2(1+i)^{-3} - ... - nF_n(1+i)^{-(n+1)} < 0$$ =>función decreciente

$$VAN_{(i)}'' = 2F_1(1+i)^{-3} + 6F_2(1+i)^{-4} + ... + n(n+1)F_n(1+i)^{-(n+2)} > 0$$ =>función cónca-va hacia arriba

5.3.3.1.6. Gráfico del V.A.N. para proyectos convencionales



Observando este gráfico queda en evidencia la dependencia del criterio *VAN* con respecto a la tasa de actualización utilizada: según el valor de la tasa un mismo proyecto puede ser aceptado o rechazado.

ACLARACIÓN: Cuando se busca el Valor Financiero Global de una "renta con cuotas variables sin ley" se calcula el Valor Actual (*V.A.*) de una inversión (no se tiene en cuenta el flujo del momento cero F_0).

Ejemplo:

Un proyecto implica una inversión inicial de $1.300.000.- y se estima que generará ingresos netos de $650.000.- y $1.000.000.- durante los dos períodos siguientes. Evaluar la conveniencia de efectuar la inversión si se pretende un rendimiento periódico del 14%.

	Fj	*Fj* actualizado	
0	-1.300.000	-1.300.000,00	
1	650.000	570.175,44	$= 650.000 / 1,14^1$
2	1.000.000	769.467,53	$= 1.000.000 / 1,14^2$
	VAN =	39.642,97	

VAN> 0 implica que la inversión es rentable

5.3.3.2. Criterio de la Tasa Interna de Retorno - *TIR*

5.3.3.2.1. Definición

"La Tasa Interna de Retorno es aquella tasa que iguala a cero (0) el Valor Actual Neto de una inversión".

También se suele definir como aquella tasa que iguala el valor presente de los cobros y de los pagos esperados de un proyecto de inversión. Gráficamente:

EI=EV

0 1 2 3 n-1 n

|______|______|______|________//________________|______|

F_0 F_1 F_2 F_3 F_{n-1} F_n

$$F_0 + \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = 0$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{F_j}{(1+r)^j} = 0} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{-F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+r)^j} = 0}$$

donde "*r*" es la Tasa Interna de Retorno.

Como normalmente F_0representa el desembolso inicial se lo deja fuera de la sumatoria y con signo negativo.

La *TIR* mide la rentabilidad de un proyecto en términos relativos, a través de una tasa de interés.

5.3.3.2.2. Criterio de Aceptación

Una inversión es rentable sí y sólo sí la tasa interna de retorno es mayor o igual a la tasa de costo de capital. En símbolos: Si $TIR \geq i \Leftrightarrow$ la inversión es rentable

5.3.3.2.3. Casos particulares

1° Se supone que todos los flujos son iguales salvo el del momento inicial 0.

Si $F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F_n = F$

$$-F_0 + \frac{F}{1+r} + \frac{F}{(1+r)^2} + \frac{F}{(1+r)^3} + \dots + \frac{F}{(1+r)^n} = 0$$

$$-F_0 + F\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^j} = 0 \qquad -F_0 + Fa_{\overline{n}|r} = 0$$

$$\boxed{a_{\overline{n}|r} = \frac{F_0}{F}}$$

Para calcular la "*r*" se debe aplicar tanteo financiero e interpolación lineal.

2° Se supone que todos los flujos son iguales y ellos son ilimitados ($n \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left(-F_0 + Fa_{\overline{n}|r}\right) = -F_0 + F\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|r} = -F_0 + F\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = -F_0 + F\frac{1}{r} = 0$$

$$F_0 = \frac{F}{r} \qquad \boxed{r = \frac{F}{F_0}}$$

Ejemplo:

Un proyecto implica una inversión inicial de $1.300.000.- y se estima que generará ingresos netos de $650.000.- y $1.000.000.- durante los dos períodos siguientes. Evaluar la conveniencia de efectuar la inversión aplicando el criterio *TIR* sabiendo que la tasa de costo de capital es del 14% periódico.

$$0 = -1.300.000 + \frac{650.000}{1+r} + \frac{1.000.000}{(1+r)^2} \quad \text{dividienco ambos miembros por 10.000}$$

$$0 = -130 + \frac{65}{1+r} + \frac{100}{(1+r)^2} \quad \text{y haciendo un cambio de variable } x = \frac{1}{1+r} \text{ nos queda}$$

$$0 = -130 + 65x + 100x^2 \quad \text{entonces} \quad 0 = 100x^2 + 65x - 130 \quad \text{donde } a = 100\ ;\ b = 65\ ;\ c = -130$$

$$\text{recordando que:} \quad x_{1,2} = \frac{-b + -\sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-65 + \sqrt[2]{65^2 + 4x100x130}}{2x100} = 0,860591$$

$$x = \frac{1}{1+r} = 0,860591 \quad \text{resolviendo} \quad \boxed{r = 0,161993 > i = 0,14} \Rightarrow \text{inversión rentable}$$

En los proyectos convencionales los métodos *VAN* y *TIR* conducen a la misma decisión, no se contradicen.

Aclaraciones

1- En el gráfico del *V.A.N.*, la *T.I.R.*, en proyectos convencionales, se representa sobre el eje horizontal en el punto en donde *V.A.N.* = 0 (ver gráfico 5.3.3.1.6.).
2- Cuando existe más de un cambio de signo entre los flujos (inversiones no convencionales) pueden existir tantas *T.I.R.* como cambios de signo.
3- Estos métodos de evaluación consideran la reinversión de los flujos netos de fondos a la tasa de actualización, en el criterio *VAN* a la tasa de costo de capital y en el criterio *TIR* a dicha tasa *TIR*.

5.4. Inversiones que presentan distintas vidas económicas

Cuando se analizan proyectos mutuamente excluyentes (sólo uno puede realizarse) que presentan distintas vidas económicas se deben homologar las vidas para poder compararlas.

Ejemplo: Se propone analizar las siguientes inversiones considerando una tasa de actualización del 18% anual:

Inversión	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
A	-180.000	85.000	100.000	70.000		
B	-180.000	60.000	60.000	60.000	60.000	60.000

En este ejemplo la inversión A tiene una vida de 3 años y la inversión B de 5 años. Para homologar sus vidas existen dos métodos:

1º repetir los flujos hasta que ambas inversiones tengan la misma vida (cadena de reemplazos). Considerando que el mínimo múltiplo común es 15 años para las vidas de ambos proyectos se debería repetir 5 veces la inversión A y 3 veces la inversión B. Luego calcular el *VAN* a 15 años y elegir la inversión que presenta el mayor *VAN*. Este método es poco práctico.

2º aplicar el "método de periodicidades equivalentes" o "cadena de reemplazos infinitos". En este método se calcula el *VAN* de las inversiones perpetuas. Para ello:

a- el $VAN_{(n)}$ de cada inversión con su respectiva vida $\left(VAN_{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{F_j}{(1+i)^j} \right)$ (1)

b- la periodicidad o cuota equivalente de los $VAN_{(n)}$ acorde con la vida de cada proyecto $\left(C = VAN_{(n)} . a^{-1}_{\overline{n}|i} \right)$ (2)

c- el VAN de la perpetuidad para cada inversión $\left(VAN_{(\infty)} = \frac{C}{i} \right)$ (3)

d- se toma la decisión de elegir la inversión que presenta mayor *VAN* perpetuo.

En nuestro ejemplo:

	VIDA (n)	$V.A.N._{(n)}$ (1)	CUOTA (2)	$VAN_{(\infty)}$ (3)
A	3	\$6.456,50	\$2.969,50	\$16.497,22
B	5	\$7.630,26	\$2.439,99	\$13.555,50

Decisión: se elige la inversión A que presenta el mayor *VAN* a perpetuidad.

Aclaración: En este ejemplo si se tomara la decisión respecto de los *VAN* temporarios (1) se elegiría el proyecto B porque presenta el mayor *VAN*. Sin embargo, ¿es conveniente esperar 2 años más para ganar \$1.173,76 más (\$7.630,26 - \$6.456,50)?

Cuando se busca la cuota periódica utilizando la vida de cada proyecto se observa que la mayor cuota corresponde al proyecto A, el mayor ingreso anual periódico equivalente lo proporciona este proyecto. Al calcular los *VAN* de las perpetuidades es evidente que la inversión A es la más rentable (todas las cuotas se dividen por una cantidad constante).

Se concluye que es preferible llevar a cabo el proyecto A que es el de menor plazo y luego realizar una nueva inversión y no esperar 2 años más para ganar la diferencia mencionada.

5.5. Flujos Irregulares

5.5.1. Definición

Los flujos irregulares son operaciones financieras compuestas en las cuales no existe la misma distancia temporal entre flujo y flujo (no son equi espaciados y por ello no son rentas) pudiendo ser los flujos constantes o variables. Para su análisis se utilizan los métodos desarrollados en Teoría de las Inversiones (*V.A.N.* y *T.I.R.*) y para determinar la tasa de actualización se debe aplicar tanteo financiero e interpolación lineal.

5.5.2. Ejemplo

Determinar el Valor Actual Neto de una inversión, al 14% anual, sabiendo que presenta un flujo inicial negativo de \$15.000.- e ingresos de \$4.800.- a 3 meses, \$6.500.- a 8 meses, \$2.900.- a 12 meses y \$800.- a 16 meses. ¿Es rentable la inversión?

$$VAN = -15.000 + \frac{4.800}{1{,}14^{3/12}} + \frac{6.500}{1{,}14^{8/12}} + \frac{2.900}{1{,}14^{12/12}} + \frac{800}{1{,}14^{16/12}}$$

$$VAN = -15.000 + 4.645{,}31 + 5.956{,}30 + 2.543{,}86 + 671{,}76 = \boxed{-\$1.182{,}76}$$

Siendo $V.A.N. < 0$ la inversión no es rentable.

5.6. Aplicación: Proyectos mutuamente excluyentes

Deseo mencionar que durante el cursado de la Maestría en Finanzas en la UNR tuve de profesor al Dr. Nassir Sapag Chain en la materia Proyectos de Inversión quien amplió mis conocimientos sobre este tema (ver bibliografía)

Cuando se trabaja con 2 o más proyectos mutuamente excluyentes puede suceder que los métodos VAN y TIR se contradigan en cuanto a qué inversión es más conveniente.

Ejemplo 1: Los proyectos presentan el flujo inicial negativo de distinta magnitud:

Inversión	F_0	F_1	VAN (20%)	TIR
A	-11.000	22.000	7.333,33	100,00%
B	-43.000	72.000	17.000,00	67,44%

Como las inversiones presentan solamente el egreso inicial y un flujo negativo las fórmulas de VAN y TIR son:

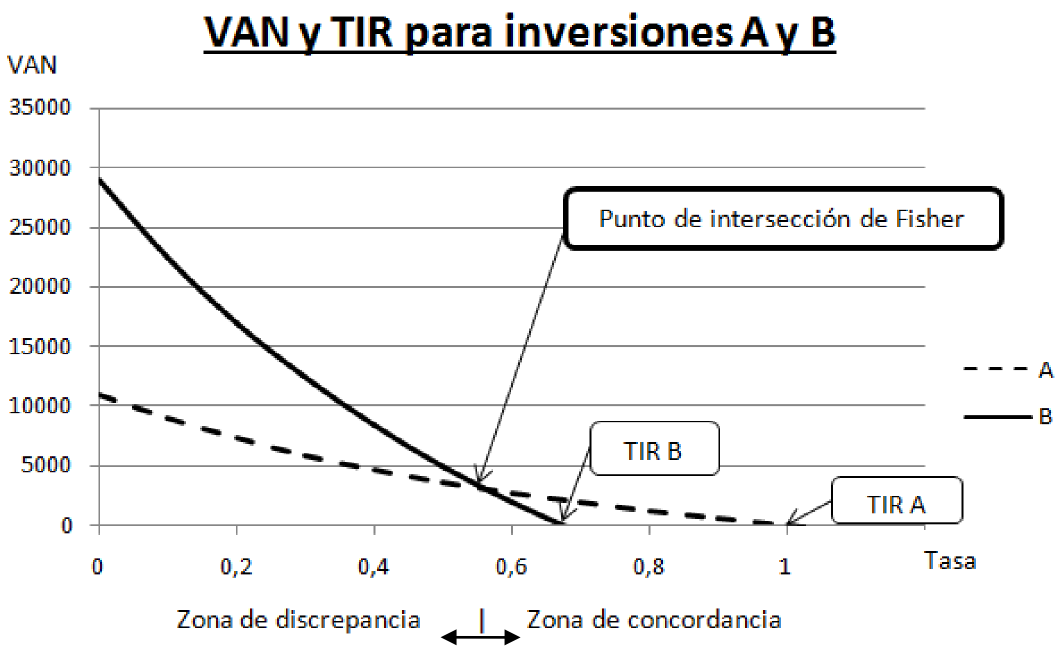
$$VAN = F_0 + \frac{F_1}{1+i} \qquad \text{y} \qquad 0 = F_0 + \frac{F_1}{1+TIR}$$

En el cuadro anterior se observa que los métodos se contradicen ya que por el método VAN conviene la inversión B y por el método TIR conviene la inversión A. Eso se debe a que las curvas del VAN se interceptan en la llamada “tasa de Fisher”.

En el siguiente gráfico se observan las curvas del VAN para ambas inversiones. Se ve que ellas se interceptan en un punto llamado “punto de intersección de Fisher” para la tasa de actualización de Fisher del 56,25%, Antes de ese valor de tasa conviene la inversión B y a partir de ese valor conviene la inversión A.

Sin embargo, por el criterio TIR siempre conviene la inversión A ya que el valor de la TIR es 100% contra la TIR del 64,77% de la inversión B.

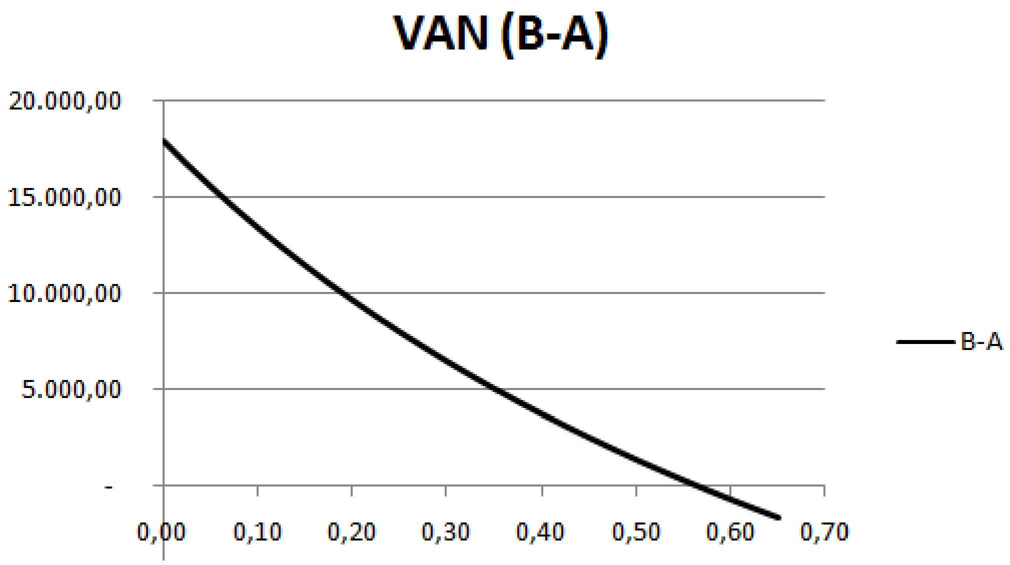
Evidentemente hasta el valor de la tasa de Fisher del 56,25% ambos métodos se contradicen (por VAN se elige B y por TIR se elige A) y a esta zona se la llama “zona de discrepancia”. A partir de la tasa de Fisher, ambos métodos coinciden en su decisión (tanto VAN como TIR eligen la inversión A) y se la llama “zona de concordancia”.



Para salvar esta contradicción se calcula el VAN y la TIR de la inversión incremental de ambos proyectos (teniendo en cuenta que el flujo inicial sea negativo). Luego

Inversión	F_0	F_1	VAN (20%)	TIR
B-A	-32.000	50.000	9.666,67	56,25%

Gráficamente se observa que la TIR del proyecto diferencia se presenta en el punto de Fisher:



Se concluye que conviene el proyecto B (VAN > 0 y TIR > i) por ambos métodos. Si el valor del VAN fuera negativo y TIR fuera menor que la tasa de actualización (20%) se elegiría la inversión A.

Ejemplo 2: Los proyectos presentan el mismo flujo inicial pero uno tiene flujos que decrecen en el tiempo y el otro, flujos que crecen en el tiempo:

Inversión	F_0	F_1	F_2	F_3
A	-40.000	26.000	23.000	18.000
B	-40.000	20.000	24.000	26.000

Como las inversiones presentan solamente el egreso inicial y 3 flujos positivos las fórmulas de VAN y TIR son:

$$VAN = F_0 + \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} \quad \text{y} \quad 0 = F_0 + \frac{F_1}{1+TIR} + \frac{F_2}{(1+TIR)^2} + \frac{F_3}{(1+TIR)^3}$$

Inversión	VAN (20%)	TIR
A	8.055,56	33,39%
B	8.379,63	32,40%

Se observa que por el método VAN conviene la inversión B y por el método TIR conviene la inversión A.

Para salvar esta contradicción se calcula el VAN y la TIR de la inversión incremental de ambos proyectos (el flujo inicial toma el valor 0). Luego

Inversión	F_0	F_1	F_2	F_3	VAN (20%)	TIR
B-A	0	-6.000	1.000	8.000	324,07	24,10%

Se concluye que conviene el proyecto B (VAN > 0 y TIR >i) por ambos métodos.

Ejemplo 3: Los proyectos presentan distintos flujos, inclusive el inicial:

Inversión	F_0	F_1	F_2	F_3
A	-50.000	22.000	24.000	32.000
B	-60.000	28.000	30.000	32.000

Como las inversiones presentan solamente el egreso inicial y distintas vidas las fórmulas de VAN y TIR son:

$$VAN = F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+i)^j} \quad \text{y} \quad 0 = F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+TIR)^j}$$

Inversión	VAN (10%)	TIR
A	13.876,78	24,17%
B	14.290,01	22,77%

Se observa que por el método VAN conviene la inversión B y por el método TIR conviene la inversión A.

Para salvar esta contradicción se calcula el VAN y la TIR de la inversión incremental de ambos proyectos (teniendo en cuenta que el flujo inicial sea negativo). Luego

Inversión	F_0	F_1	F_2	F_3	VAN (10%)	TIR
B-A	-10.0000	6.000	6.000	0	413,22	13,07%

Se concluye que conviene el proyecto B (VAN > 0 y TIR >i) por ambos métodos.

TIR Modificada

Al final del punto 5.3.3.2. de esta unidad se realizaron algunas aclaraciones. Particularmente, la tercera aclaración dice: "Estos criterios de evaluación (VAN y TIR) consideran la reinversión de los flujos netos de fondos a la tasa de costo de capital (i) en el criterio VAN y a la tasa TIR (r) en el criterio TIR."

El uso de las medidas del valor actual neto (VAN) y de la tasa interna de rentabilidad (TIR) para la evaluación de proyectos de inversión ha suscitado una controversia técnica acerca del denominado supuesto implícito de reinversión. Tal supuesto genera discusión acerca de si esos métodos tienen o no implícita esa reinversión de los flujos. La TIR Modificada considera dos tasas: una de financiación y otra de reinversión.

Cuando se tiene una inversión y los criterios VAN y TIR se contradicen, se calcula la TIR Modificada. Al comparar ahora el VAN y la TIRM se observa que la contradicción entre los dos métodos desaparece y que la TIRM termina tomando la misma decisión (de aceptación o rechazo de la inversión) que toma el criterio VAN.

A continuación se calcula la TIRM como la calcula Excel, considerando una tasa de financiación para los flujos negativos y una tasa de reinversión para los flujos positivos.

Simbolizando con:

TIRM: TIR modificada
$VF_{(n)}$: suma de los flujos positivos capitalizados al momento n y a la tasa de reinversión
$VA_{(0)}$: suma de los flujos negativos actualizados al momento 0 y a la tasa de financiación
n: plazo de la inversión

entonces:

$$\boxed{TIRM = \sqrt[n]{\frac{VF_{(n)}}{-VA_{(0)}}} - 1} \quad \text{que se obtiene de despejarla de} \quad VF_{(n)} = -VA_{(0)}.(1+TIRM)^n$$

observar que $VA_{(0)}$ está precedido por un signo $-$ porque por definición es negativo

Interpretando la fórmula se puede decir que esta tasa calcula el rendimiento anual (raíz de n) de la inversión considerando el "monto de los flujos positivos (ingresos) capitalizados a la tasa de reinversión dividido el capital invertido o flujos negativos (egresos) actualizados a la tasa de financiación".

Ejemplo 1: sólo F_0 negativo

Tasa de financiación =	0,10
Tasa de reinversión =	0,14

	Flujos	*VA* (-)	*VF*(+)	
0	-26.000,00	-26.000,00		
1	10.000,00		14.815,44	$=(10.000 \text{x} 1{,}14^3)$
2	10.000,00		12.996,00	$=(10.000 \text{x} 1{,}14^2)$
3	10.000,00		11.400,00	$=(10.000 \text{x} 1{,}14^1)$
4	10.000,00		10.000,00	$=(10.000 \text{x} 1{,}14^0)$
		-26.000,00	49.211,44	
		$VA_{(0)}$	$VF_{(n)}$	

$$TIRM = \sqrt[4]{\frac{49.211,44}{26.000,00}} -1=0,1729$$

Este resultado puede verificarse utilizando la función financiera de Excel TIRM.

Aclaración: en este ejemplo que sólo presenta un flujo negativo en el momento inicial (0) la tasa de financiación puede tomar cualquier valor, inclusive 0 porque no es utilizada en el cálculo de la TIRM. Es más, si se calculara la TIR de la inversión y se la utilizara como la tasa de reinversión (con cualquier valor de la tasa de financiación) la TIR = TIRM = 19,77%

Ejemplo 2: Cuando se presentan proyectos no convencionales donde los flujos negativos y positivos se alternan durante toda la vida del proyecto. Dicho de otra forma, proyectos que presentan más de un cambio de signo entre los sucesivos flujos.

Tasa de financiación =	0,18
Tasa de reinversión =	0,20

	Flujos	*VA* (-)	*VF*(+)	
0	-28.000,00	-28.000,00		
1	12.500,00		21.600,00	$12.500 \text{x} 1{,}20^3$
2	14.000,00		20.160,00	$14.000 \text{x} 1{,}20^2$
3	-7.000,00	-4.260,42		$-7.000 \text{x} 1{,}18^{-3}$
4	25.000,00		25.000,00	25.000
		-32.260,42	66.760,00	
		$VA_{(0)}$	$VF_{(n)}$	

$$TIRM = \sqrt[4]{\frac{66.760,00}{32.260,42}} -1=0,1994$$

5.7. EJERCITACIÓN CAPÍTULO V

1- Se otorga un préstamo de \$100.000.- a 5 bimestres con cuotas variables en progresión aritmética. La primera cuota es de \$17.329,11 y la tasa de interés del 10% bimestral. Calcular:
a) la razón de la progresión
b) construir el cuadro de amortización para los 3 primeros períodos.

$$a)\ V_{\overline{n}|pa}=\left(C+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n}|:i}-\frac{nr}{\mathrm{i}}(1+i)^{-n}$$

$$100.000=17.329{,}10\left(\frac{1-1{,}10^{-5}}{0{,}10}\right)+\frac{r}{0{,}10}\left(\frac{1-1{,}10^{-5}}{0{,}10}\right)-\frac{5r}{0{,}10}1{,}10^{-5}$$

$$despejando \quad \boxed{r=5.000.-}$$

b)

Per	Deuda inicio	Ints	Cuota	Amort.	Total amort.	Deuda Final
	1	*2=1x0,10*	*3=C 1 +5.000*	*4=3-2*	*5=suma 4*	*6=1-4*
1	100.000,00	10.000,00	17.329,11	7.329,11	7.329,11	92.670,89
2	92.670,89	9.267,09	22.329,11	13.062,03	20.391,14	79.608,86
3	79.608,86	7.960,89	27.329,11	19.368,23	39.759,37	60.240,63
4	60.240,63	6.024,06	32.329,11	26.305,05	66.064,42	33.935,58
5	33.935,58	3.393,56	37.329,11	33.935,56	99.999,98	0,02
		36.645,60				

2- Se contrajo una deuda de \$500.000.- que se cancelará en 5 cuotas mensuales variables en progresión aritmética creciente de \$2.500.- y tasa del 10% mensual. Construir el cuadro de amortización.

$$V_{\overline{n}|pa}=\left(C+\frac{r}{i}\right)a_{\overline{n}|:i}-\frac{nr}{\mathrm{i}}(1+i)^{-n}=Ca_{\overline{n}|:i}+\frac{r}{i}a_{\overline{n}|:i}-\frac{nr}{\mathrm{i}}(1+i)^{-n}$$

$$500.000=\mathrm{C}\left(\frac{1-1{,}10^{-5}}{0{,}10}\right)+\frac{2.500}{0{,}10}\left(\frac{1-1{,}10^{-5}}{0{,}10}\right)-\frac{5x2.500}{0{,}10}1{,}10^{-5}$$

$$despejando \qquad \mathrm{C}=127.373{,}43$$

Per	Deuda inicio	Ints	Cuota	Amort.	Total amort.	Deuda Final
	1	*2=1x0,10*	*3=C 1 +2.500*	*4=3-2*	*5=suma 4*	*6=1-4*
1	500.000,00	50.000,00	127.373,43	77.373,43	77.373,43	422.626,57
2	422.626,57	42.262,66	129.873,43	87.610,77	164.984,19	335.015,81
3	335.015,81	33.501,58	132.373,43	98.871,84	263.856,04	236.143,96
4	236.143,96	23.614,40	134.873,43	111.259,03	375.115,07	124.884,93
5	124.884,93	12.488,49	137.373,43	124.884,93	500.000,00	0,00
		161.867,13				

3- Calcular el valor financiero de una renta con 24 cuotas variables en progresión geométrica de razón igual a 1,05 a la tasa del 5% mensual sabiendo que la primera cuota es de $5.500.-

Como la tasa de interés coincide con la tasa de crecimineto de las cuotas (i=g=0,5) el valor de la deuda es:

$$V_{\overline{n}|pg} = \frac{nC}{1+i} = \frac{nC}{1+g} = \frac{nC}{q} = \frac{24x5.500}{1,05} = \boxed{125.714,29}$$

4- Se otorga un préstamo a abonar en 5 meses con cuotas variables en progresión geométrica. La primera cuota es de $1.800.- y la última de $2.187,91. Siendo la tasa de interés del 10% mensual calcular:

a) la razón de la progresión
b) construir el cuadro de evolución.

a) Recordando que:

$$C_n = C_1 q^{n-1} \qquad 2.187,91 = 1.800q^4 \qquad \boxed{q = 1,05} \qquad \text{g=0,05}$$

b) $$V_{\overline{n}|pg} = 1.800 \frac{1-\left(\frac{1,05}{1,10}\right)^5}{0.10-0,05} = 7.471,06$$

Per	Deuda inicio	Ints	Cuota	Amort.	Total amort.	Deuda Final
	1	*2=1x0,10*	*3=Ck-1x1,05*	*4=3-2*	*5=suma 4*	*6=1-4*
1	7.471,06	747,11	1.800,00	1.052,89	1.052,89	6.418,17
2	6.418,17	641,82	1.890,00	1.248,18	2.301,08	5.169,99
3	5.169,99	517,00	1.984,50	1.467,50	3.768,58	3.702,49
4	3.702,49	370,25	2.083,73	1.713,48	5.482,05	1.989,01
5	1.989,01	198,90	2.187,91	1.989,01	7.471,06	0,00
		2.475,07				

5- a) Construir el cuadro de marcha para los 3 primeros períodos de una deuda amortizable en 20 meses con cuotas variables en progresión geométrica de las cuales la primera es de $10.000.- y la razón es creciente del 5%. La tasa mensual es del 4. Deducir previamente el valor de la deuda.

$$V_{\overline{n}|pg} = 10.000 \frac{1-\left(\frac{1,05}{1,04}\right)^{20}}{0.04-0,05} = \boxed{210.930,44}$$

Per	Deuda inicio	Ints	Cuota	Amort.	Total amort.	Deuda Final
	1	*2=1x0,04*	*3=Ck-1x1,05*	*4=3-2*	*5=suma 4*	*6=1-4*
1	210.930,44	8.437,22	10.000,00	1.562,78	1.562,78	209.367,65
2	209.367,65	8.374,71	10.500,00	2.125,29	3.688,08	207.242,36
3	207.242,36	8.289,69	11.025,00	2.735,31	6.423,38	204.507,06

6- Un proyecto implica una inversión inicial de \$1.200.000.- y se estima que generará ingresos netos de \$400.000.- y \$1.000.000.- durante los dos períodos siguientes.
a) Evaluar la conveniencia de efectuar la inversión por el criterio VAN si se pretende un rendimiento periódico del 8%.
b) Determinar la T.I.R.

$F = (-1.200.000; 400.000; 1.000.000)$

a) $VAN = -1.200.000 + \dfrac{400.000}{1,08} + \dfrac{1.000.000}{1,08^2} = \boxed{27.709,19 \quad > 0 \Rightarrow \text{ inversión rentable}}$

$b)$ $0 = -1.200.000 + \dfrac{400.000}{1+r} + \dfrac{1.000.000}{(1+r)^2}$ dividienco ambos miembros por 100.000

$0 = -12 + \dfrac{4}{1+r} + \dfrac{10}{(1+r)^2}$ y haciendo un cambio de variable $x = \dfrac{1}{1+r}$ nos queda

$0 = -12 + 4x + 10x^2$ y ordenando $0 = 10x^2 + 4x - 12$ donde $a = 10$; $b = 4$; $c = -12$

recordando que: $x_{1,2} = \dfrac{-b +- \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-4 +- \sqrt[2]{4^2 + 4x10x12}}{2x10} = 0,913553$

$x = \dfrac{1}{1+r} = 0,913553$ resolviendo $\boxed{r = 0,094627 \ > i \ \Rightarrow \text{ inversión rentable}}$

7- Se abona al contado \$500.000.- de franquicia por la explotación de una marca que generará ingresos constantes de \$80.000.- durante 10 años. Determinar la T.I.R.

$F = (-500.000; 80.000; 80.000; 80.000; 80.000; 80.000; 80.000; 80.000; 80.000; 80.000; 80.000)$

$0 = -500.000 + 80.000 a_{\overline{n}|r} \Rightarrow \dfrac{80.000}{500.000} = 0,16 = a^{-1}_{\overline{n}|r} = \dfrac{r}{1-(1+r)^{-10}} = f(r)$ función creciente

Tanteo financiero. Obtenemos que

$Para \quad r_a = 0,096 \qquad f_{(r_a)} = 0,159959$ como mi dato es $f_{(r)} = 0,16$

$Para \quad r_p = 0,097 \qquad f_{(r_p)} = 0,160654$ como mi dato es $f_{(r)} = 0,16$

Ya que $f_{(r)} = 0,16$ está entre $0,159959 < f_{(r)} < 0,160654$

Interpolación lineal :

$$\frac{r_I - r_a}{r_p - r_a} = \frac{f_{(r)} - f_{(r_a)}}{f_{(r_p)} - f_{(r_a)}}$$

$$r_I = 0,096 + \frac{0,16 - 0,159959}{0,160654 - 0,159959}(0,097 - 0,096) = \boxed{0,096059 \text{ anual}}$$

8- Analizar la factibilidad económica de un proyecto de compra de un equipo cuyo costo es el siguiente:

- contado: \$30.000.-
- 3 cuotas anuales consecutivas de \$10.000.- cada una

- Se estima que la inversión generará ingresos anuales por $25.000.- durante los 2 primeros períodos y de $20.000.- durante los tres siguientes, siendo su vida útil de 5 años.

Evaluar según el criterio V.A.N. considerando una tasa de aceptación del 20% anual.

Per.	Egreso	Ingreso	Flujo	Flujo actualizado		
0	30.000,00		-30.000,00		-30.000,00	
1	10.000,00	25.000,00	15.000,00	15.000/1,20 =	12.500,00	
2	10.000,00	25.000,00	15.000,00	15.000/1,20^2 =	10.416,67	
3	10.000,00	20.000,00	10.000,00	10.000/1,20^3 =	5.787,04	
4		20.000,00	20.000,00	20.000/1,20^4 =	9.645,06	
5		20.000,00	20.000,00	20.000/1,20^5 =	8.037,55	
				VAN =	16.386,32	> 0 INVERSIÓN RENTABLE

9- Se desea elegir la mejor alternativa de inversión entre las siguientes dados los flujos de fondos de cada una de ellas:

a) F_A = (-9.000 ; 3.000 ; 4.000 ; 5.000)
b) F_B = (-3.000 ; 1.400 ; 1.400 ; 1.400 ; 1.400)
c) F_C = (-8.000 ; 0; -1.000 ; 6.000 ; 7.000 ; 1.000)

Para el análisis de factibilidad calcular el V.A.N.$_\infty$ con la tasa de aceptación del 4%

En este ejercicio las inversiones presentan distintas vidas (3, 4 y 5 períodos) y es necesario homologarlas para decidir cuál es más rentable, Existen 2 métodos.

a) repetir los flujos hasta que todos los proyectos tengan la misma vida. Considerando que las vidas tienen mínimo múltiplo común igual a 60 se debería repetir 20 veces la inversión A, 15 veces la B y 12 veces la C. Luego calcular el VAN y decidir. Este método es poco práctico.
b) método de periodicidades equivalentes. En este método se calcula el VAN de las inversiones perpetuas. Para ello:

1º se calcula el VAN para cada inversión

$$VAN_A = -9.000 + \frac{3.000}{1,04} + \frac{4.000}{1,04^2} + \frac{5.000}{1,04^3} = 2.027,82$$

$$VAN_B = -3.000 + 1.400 a_{\overline{4}|0,04} = -3.000 + 1.400 \frac{1-1,04^{-4}}{0,04} = 2.081,85$$

$$VAN_C = -8.000 + \frac{0}{1,04} - \frac{1.000}{1,04^2} + \frac{6.000}{1,04^3} + \frac{7.000}{1,04^4} + \frac{1.000}{1,04^5} = 3.214,98$$

Si se decidiera en este momento se elegiría la inversión C que posee mayor VAN

2º se calcula el ingreso periódico (cuota) equivalente para cada inversión

$$C_A = 2.027,82 a^{-1}_{\overline{3}|0,04} = 2.027,82 \frac{0,04}{1-1,04^{-3}} = 730,72$$

$$C_B = 2.081,85 a^{-1}_{\overline{4}|0,04} = 2.081,85 \frac{0,04}{1-1,04^{-4}} = 573,53$$

$$C_C = 3.214,98 a^{-1}_{\overline{5}|0,04} = 3.214,98 \frac{0,04}{1-1,04^{-5}} = 722,17$$

3º se calcula el VAN perpetuo de cada inversión y se decide cuál es más rentable.

$$VAN_{\infty A} = \frac{C_A}{i} = \frac{730,72}{0,04} = \boxed{18.268,07}$$

$$VAN_{\infty B} = \frac{C_B}{i} = \frac{573,53}{0,04} = 14.338,25$$

$$VAN_{\infty C} = \frac{C_C}{i} = \frac{722,17}{0,04} = 18.054,28$$

Decisión: se elige la inversión A que presenta el mayor VAN a perpetuidad. No conviene económicamente esperar 2 años más.

10- Se evalúa una inversión cuyo desembolso inicial es de \$500.000.-. Dicha inversión generará, en forma vencida, los siguientes ingresos:

a) 12 cuotas mensuales de \$46.150.-

b) a continuación ingresos mensuales perpetuos de \$2.500.-

Hallar el VAN sabiendo que la tasa de costo de capital es del 8,16% bimestral efectivo.

$$i_{(2)} = \sqrt{1,0816} - 1 = 0,04 \text{ mensual}$$

$$VAN = -500.000 + 46.150 a_{\overline{12}|0,04} + \frac{2.500}{0,04} 1,04^{-12} = -500.000 + 433.121,15 + 39.037,32$$

$$\boxed{VAN = -27.841,53}$$

INVERSIONES BURSÁTILES

11- Suponiendo que hoy es 01/08/20X1 calcular los flujos netos de fondo del siguiente título siendo las siguientes condiciones de emisión:

Valor nominal \$100.-

Duración: 4 años

Renta anual nominal: 10%. Fechas de pago: 01-Feb, 01-May, 01-Ago y 01-Nov.

Amortización: el 50% el 01-Nov-20X1 y el 50% el 01-nov-20X2.

Determinar los flujos netos de fondos y el V.A.N. del título si el mismo cotiza al 90% de su valor residual utilizando una tasa de costo de capital del 13% anual efectivo (T.I.R.E.A.).

Fecha	Interés		Amort.	Flujo	Flujo actualizado	
01/08/X1	Fecha de análisis			-90,00		-90,00
01/11/X1	100x0,025 =	2,50	50,00	52,50	52,50/1,031026 =	50,92
01/02/X2	50x0,025 =	1,25		1,25	2,50/1,031026^2 =	1,18
01/05/X2	50x0,025 =	1,25		1,25	2,50/1,031026^3 =	1,14
01/08/X2	50x0,025 =	1,25		1,25	2,50/1,031026^4 =	1,11
01/11/X2	50x0,025 =	1,25	50,00	51,25	51,25/1,031026^5 =	43,99
					VAN =	8,33
Tasa que paga el bono = 0,10/4 = 0,025 trimestral						
Tasa efectiva de costo 1,13^(1/4)-1 = 0,031026 trimestral						
Precio =	100x0,90 = 90					
Siendo VAN = 8,33 > 0 la inversión es rentable						

12- Siendo hoy 14/04/20X1 calcular los flujos netos de fondo de la siguiente obligación negociable siendo las condiciones de emisión las siguientes:

Valor Nominal $100
Renta anual nominal: 12%. Fechas de pago: 14-Abr y 14-Oct.
Amortización: 25% anual: Primera amortización: 14-Oct-20X0
Determinar los flujos netos de fondos y el V.A. del título (precio) utilizando la T.I.R.E.A. 14% anual efectivo.

Fecha	Interés		Amort.	Flujo	Flujo actualizado	
14/04/X1	Fecha de análisis					
14/10/X1	75x0,06 =	4,50	25,00	29,50	29,50/1,067708 =	27,63
14/04/X2	50x0,06 =	3,00	-	3,00	3,00/1,067708^2 =	2,63
14/10/X2	50x0,06 =	3,00	25,00	28,00	28,00/1,067708^3 =	23,00
14/04/X3	25x0,06 =	1,50	-	1,50	1,50/1,067708^4 =	1,15
14/10/X3	25x0,06 =	1,50	25,00	26,50	26,50/1,067708^5 =	19,10
					VA =	73,52
Tasa que paga el bono = 0,12/2 = 0,06 semestral						
Tasa efectiva de costo 1,14^(1/2)-1 = 0,067708 semestral						

13- Considerando un bono de $100.- de valor nominal según las condiciones de emisión:
Amortización: anual del 25% de su valor nominal el 15 de junio de cada año, siendo la primera el 15 de junio del año 20X1
Intereses: semestrales al 10% anual nominal el 15 de junio y el 15 de diciembre de cada año.
Considerando que hoy es 16 de diciembre del año 20X2, determinar:

a) Los flujos netos de fondo al día de hoy
b) El V.A.N. del título si el mismo cotiza al 99% de su valor residual y a la TIR del 12,36% efectiva anual.

La tasa semestral que abona el título es 5% sobre Valor Residual y la tasa semestral de actualización es del 6% ($i_{(m)}=1,1236^{½}-1=0,06$).

Fecha	Amortización	Intereses	Flujos	Flujo actualizado
16/12/20X2	0	0	0	-0,99x50= -49,50
15/06/20X3	25	0,05x50=2,50	27,50	$27{,}50/1{,}06^1$ =25,94
15/12/20X3	0	0,05x25=1,25	1,25	$1{,}25/1{,}06^2$ =1,11
15/06/20X4	25	0,05x25=1,25	26,25	$26{,}25/1{,}06^3$ =22,04
			V.A.N.=	-0,41

Siendo el V.A.N. < 0 la inversión no es rentable.

14- Siendo hoy 15/07/20X1 calcular los flujos netos de fondo de la obligación negociable de Alpargatas S.A. siendo las condiciones de emisión las siguientes:
Valor Nominal \$100.-
Duración: 4 años
Renta anual nominal: 10%. Fechas de pago: 15-Ene y 15-Jul.
Amortización: 33% el 15-Jul-X1, 33% el 15-Ene-X2 y 34% el 15-Jul-X2
Determinar los flujos netos de fondos y el V.A. del título (precio) utilizando la T.I.R.E.A. 12% anual efectivo.
Calcular, además, la T.I.R.E.A. si el título cotiza al 95% de su valor residual.

Fecha	Interés		Amort.	Flujo	Flujo actualizado	
15/07/X1	**Fecha de análisis**					
15/01/X2	**67x0,05 =**	**3,35**	**33,00**	**36,35**	**36,35/1,058301 =**	**34,35**
15/07/X2	**34x0,05 =**	**1,70**	**34,00**	**35,70**	**35,70/1,058301^2 =**	**31,88**
					VA =	**66,22**

Tasa que paga el bono = 0,10/2 = 0,05 semestral
Tasa efectiva de costo 1,12^(1/2)-1 = 0,058301 semestral

Precio = 67 x 0,95 = 63,65

$$0 = -63{,}65 + \frac{36{,}35}{1+r} + \frac{35{,}70}{(1+r)^2}$$ y haciendo un cambio de variable $x = \frac{1}{1+r}$ nos queda

$0 = 35{,}70x^2 + 36{,}35x - 63{,}65$ donde $a = 35{,}70$; $b = 36{,}35$; $c = -63{,}65$

recordando que: $x_{1,2} = \frac{-b+-\sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-36{,}35+-\sqrt[2]{36{,}35^2+4x35{,}70x63{,}65}}{2x35{,}70} = 0{,}919917$

$x = \frac{1}{1+r} = 0{,}919917$ resolviendo $r = TIR = 0{,}087055$ semestral

$T.I.R.E.A. = 1{,}087055^2 - 1 = \boxed{0{,}181688}$

FLUJOS IRREGULARES

15- Determinar el Valor Actual Neto de una inversión, al 10% anual, sabiendo que presenta un flujo inicial negativo de \$10.000.- e ingresos de \$4.600.- a los 6 meses, \$3.500.- a los 8 meses, \$4.100.- a los 14 meses y \$2.000.- a los 20 meses. (los importes se expresan en miles de \$)

$$VAN = -10.000 + \frac{4.600}{1{,}10^{6/12}} + \frac{3.500}{1{,}10^{8/12}} + \frac{4.100}{1{,}10^{14/12}} + \frac{2.000}{1{,}10^{20/12}} = \boxed{\$3.045{,}24}$$

CAPÍTULO VI
Sistemas de Amortización de Préstamos

6.1. Introducción.

6.2. Sistema Francés.

6.3. Sistema Alemán.

6.4. Sistema Americano.

6.5. Distorsiones del Sistema Francés.
- 6.5.1. Respecto de la tasa de interés.
- 6.5.2. Respecto de la partición de la cuota periódica.
- 6.5.3. Respecto del momento en que se abona la cuota.
- 6.5.4. Tasa Directa.
  - 6.5.4.1. Primera modalidad: Tasa directa Con Intereses Cargados a la suma solicitada.
  - 6.5.4.2. Segunda modalidad: Tasa directa Con Intereses Descontados de la suma solicitada.

6.6. Incidencia del I.V.A. en los cuadros de amortización de préstamos.

6.7. Préstamos con tasa variable o tasa Flotante.

6.8. Préstamos pactados con ajuste por inflación.

6.9. Aplicaciones (Valor de cesión o cancelación anticipada. Usufructo y Nuda Propiedad)

6.10. Ejercitación Capítulo VI.

SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS

6.1. Introducción

Un sistema de amortización de préstamos es un conjunto de condiciones pre establecidas en donde el prestatario o deudor se obliga a reembolsar el préstamo al prestamista o acreedor mediante el pago de cuotas periódicas y vencidas.

Las cuotas están compuestas por dos servicios: uno de intereses abonados por la financiación (I_k) y otro de amortización de deuda (t_k). Acorde a las características de cada servicio (que conforman la cuota periódica C_k) quedan definidos distintos sistemas de amortización.

$$\boxed{C_k = I_k + t_k}$$

Se estudiarán los siguientes sistemas:
1º Sistema Francés
2º Sistema Alemán
3º Sistema Americano

También, se analizarán algunas distorsiones del sistema Francés entre las cuales se encuentra:

4° Tasa Directa en sus dos modalidades:

a) con intereses cargados a la suma solicitada.
b) con intereses descontados de la suma solicitada.

6.2. Sistema Francés

En el Sistema Francés, el deudor se obliga a reembolsar el préstamo mediante el pago de n cuotas constantes y vencidas. La fórmula para el cálculo de la cuota vencida es la de una renta temporaria e inmediata:

$\boxed{V_{\overline{n|}} = C\ a_{\overline{n|}i}}$ de donde $\boxed{C = V_{\overline{n|}}\ a^{-1}_{\overline{n|}i}}$

Recordando que cada cuota está compuesta por dos componentes:

1- los intereses periódicos (I_k) que se calculan en cada período sobre el saldo impago de la deuda (deuda al inicio del período) y, por lo tanto, son variables y decrecientes y
2- la amortización periódica de deuda (t_k) que es la parte de la cuota que se destina a cancelar deuda. Dado que la cuota es constante y los intereses decrecientes, la amortización periódica es variable y creciente.

$$\boxed{C_{(constante)} = I_{k(decreciente)} + t_{k(creciente)}}$$

6.2.1. Amortización Real. Fondo Amortizante

Definición 1: La parte de la cuota que se destina a amortizar deuda se denomina "amortización real".

Por consiguiente, se presenta la amortización real del primer período, la del segundo, etc. hasta llegar a la amortización real del n-ésimo período. Se simboliza t_k y se cumple que:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k < \ldots < t_n$$

Definición 2: El "fondo amortizante" es la amortización real del primer período.

En su simbología se obvia el subíndice 1 y se lo simboliza t.

Recordando que la cuota es la suma de los intereses más amortización y escribiéndola en función del primer período donde los intereses se calculan sobre la deuda original:

$$C = I_1 + t = V_{\overline{n|}} \cdot i + t \quad \text{y despejando} \quad \boxed{t = C - V_{\overline{n|}} \cdot i}$$

Ejemplo:

Suponiendo un préstamo de \$20.000.- a cancelar en 24 meses y al 4% mensual, determinar el fondo amortizante.

$$C = V_{\overline{n|}} \cdot a^{-1}_{\overline{n|}i} = V_{\overline{n|}} \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 20.000 \frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-24}} = \$1.311{,}74$$

$$t = C - V_{\overline{n|}} * i = 1.311{,}74 - 20.000 x 0{,}04 = 1.311{,}74 - 800 = \boxed{\$511{,}74}$$

Con la primera cuota se cancelan \$511,74 de la deuda original.

a) Fórmula de t en función de C

$$t = C - V_{\overline{n|}}.i = C - \underbrace{C a_{\overline{n|}\,:\,i}}_{V_{\overline{n|}}} * i = C - C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot i \qquad \text{simplificando } i$$

$$t = C - C + C(1+i)^{-n} \qquad \text{simplificando } C$$

$$\boxed{t = \frac{C}{(1+i)^n}} \quad \text{y} \quad \boxed{C = t(1+i)^n}$$

Conclusiones:

1- El fondo amortizante es igual a la cuota actualizada por "n" períodos.
2- La cuota es el fondo amortizante capitalizado por "n" períodos.

En nuestro ejemplo: $t = C.(1+i)^{-n} = 1.311{,}74 x 1{,}04^{-24} = \boxed{\$511{,}74}$

b) Fondo Amortizante en función de la deuda

$$t = C - V_{\overline{n}|} \cdot i = V_{\overline{n}|} . a^{-1}_{\overline{n}|i} - V_{\overline{n}|} \cdot i$$

$t = V_{\overline{n}|} \cdot \underbrace{\left(a^{-1}_{\overline{n}|i} - i\right)}_{s^{-1}_{\overline{n}|i}}$ recordando que $a^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i} = i$ (Capítulo IV pto 4.4.4.2) y despejando $\boxed{a^{-1}_{\overline{n}|i} - i = s^{-1}_{\overline{n}|i}}$

$$\boxed{t = V_{\overline{n}|} \cdot s^{-1}_{\overline{n}|i}} \qquad \boxed{V_{\overline{n}|} = t \cdot s_{\overline{n}|i}}$$

<u>Conclusión</u>: La deuda es una imposición en la cual la cuota constante y vencida es el fondo amortizante.

En nuestro ejemplo: $t = V_{\overline{n}|} s^{-1}_{\overline{n}|i} = 20.000 \dfrac{0,04}{1,04^{24} - 1} = \boxed{\$511,74}$

6.2.2. <u>Amortización Real de un período cualquiera k</u>

$$t = C - I_1 = C - V_{\overline{n}|} \cdot i$$

$$t_2 = C - I_2 = C - \left(V_{\overline{n}|} - t\right) \cdot i = \underbrace{C - V_{\overline{n}|} \cdot i}_{t} + t \cdot i = t + t.i = \underline{t\left(1+i\right)}$$

$$t_3 = C - I_3 = C - \left(V_{\overline{n}|} - t - t_2\right) \cdot i = \underbrace{C - V_{\overline{n}|} \cdot i + t \cdot i}_{t_2} + t_2 \cdot i = t_2 + t_2 \cdot i = t_2\left(1+i\right) = t(1+i)(1+i) = \underline{t\left(1+i\right)^2}$$

Generalizando:

a) <u>t_k en función de t_{k-1}</u>

De $\qquad \boxed{t_k = t_{k-1}\left(1+i\right)}$

Conclusión: Las amortizaciones reales siguen la ley de una progresión geométrica de razón $\boxed{q = 1+i}$

b) <u>t_k en función de t</u>

De $\qquad \boxed{t_k = t\left(1+i\right)^{k-1}}$

c) <u>t_k en función de C</u>

$$\boxed{t_k = \frac{C}{\left(1+i\right)^n}\left(1+i\right)^{k-1} \rightarrow t_k = C\left(1+i\right)^{-n+k-1} = C\left(1+i\right)^{-(n-k+1)}}$$

<u>Ejemplo</u>:

En el ejemplo, calcular la amortización real del 10º período.

$$t_k = t\left(1+i\right)^{k-1} = 511,74x1,04^9 = \boxed{\$728,36}$$

Con la décima cuota se cancelan \$728,36 de la deuda original (amortizaciones crecientes)

6.2.3. Total Amortizado en los primeros k períodos. $T_{\overline{k|}}$

Definición: El total amortizado en los primeros k períodos es la suma de las amortizaciones periódicas de los primeros k períodos.

$$T_{\overline{k|}} = t + t_2 + t_3 + \ldots + t_k = \sum_{j=1}^{k} t_j \qquad \text{reemplazando } t_j \text{ en función de } t$$

$$T_{\overline{k|}} = t + t(1+i) + t(1+i)^2 + \ldots + t(1+i)^{k-1} = t\underbrace{\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{k-1}\right]}_{\text{Factor plural de capitalización}}$$

$$\boxed{T_{\overline{k|}} = t \cdot s_{\overline{k|}i} = t\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, calcular el total amortizado de la deuda en los primeros 10 períodos.

$$T_{\overline{k|}} = t \cdot s_{\overline{10|}i} = t \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i} = 511{,}74\left(\frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04}\right) = \boxed{\$6.143{,}96}$$

Con las diez primeras cuotas se abonan \$6.143,96 de la deuda original.

Caso particular (total amortizado en los "n" períodos)

Si $k = n$

$$\boxed{T_{\overline{n|}} = t \cdot s_{\overline{n|}i} = V_{\overline{n|}}}$$

Conclusión: La deuda original es una imposición temporaria por n períodos donde la cuota vencida es el fondo amortizante.

Ejemplo:

En el ejemplo, calcular el total amortizado en los 24 períodos.

$$T_{\overline{n|}} = t \cdot s_{\overline{24|}i} = t \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 511{,}74\left(\frac{1{,}04^{24} - 1}{0{,}04}\right) = \boxed{\$20.000.-} = V_{\overline{n|}}$$

a) $T_{\overline{k|}}$ en función de la C

$$T_{\overline{k|}} = \frac{C}{(1+i)^n}\,\frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

$$\boxed{T_{\overline{k|}} = C(1+i)^{-n} s_{\overline{k|}i}}$$

b) $T_{\overline{k|}}$ en función de $V_{\overline{n|}}$

$$T_{\overline{k|}} = \underbrace{V_{\overline{n|}} \cdot a^{-1}_{\overline{n|}i}}_{C}\,\frac{(1+i)^k - 1}{i(1+i)^n} \Rightarrow T_{\overline{k|}} = V_{\overline{n|}}\,\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i(1+i)^n}$$

Simplificando:

$$\boxed{T_{\overline{k|}} = V_{\overline{n|}} \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^n - 1}}$$

6.2.4. Deuda Subsistente después de transcurridos *k* períodos $\left(V_{\overline{n-k|}}\right)$

Definición: la Deuda Subsistente después de *k* períodos es la deuda impaga luego de transcurridos los primeros *k* períodos.

Sabiendo que la deuda original es la suma de lo que ya se amortizó más lo que aún resta pagar:

$\boxed{V_{\overline{n|}} = T_{\overline{k|}} + V_{\overline{n-k|}}}$ y por lo tanto $\boxed{V_{\overline{n-k|}} = V_{\overline{n|}} - T_{\overline{k|}}}$

a) En función de *t*

$$V_{\overline{n-k|}} = t \cdot s_{\overline{n|}i} - t \cdot s_{\overline{k|}i} = t\left(s_{\overline{n|}i} - s_{\overline{k|}i}\right)$$

$$V_{\overline{n-k|}} = t\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{(1+i)^k - 1}{i}\right] \Rightarrow V_{\overline{n-k|}} = t\left[\frac{(1+i)^n - 1 - (1+i)^k + 1}{i}\right]$$

$$\boxed{V_{\overline{n-k|}} = t\left(\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{i}\right)} \quad (*)$$

b) En función de *C*

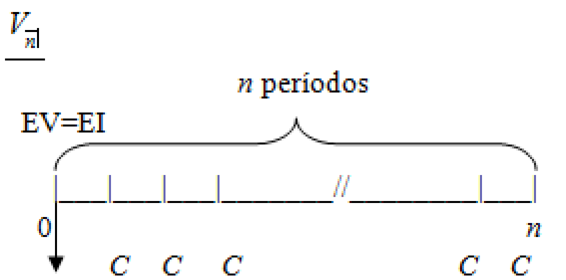
En (*) se reemplaza *t* en función de *C*

$V_{\overline{n-k|}} = \dfrac{C}{(1+i)^n}\left[\dfrac{(1+i)^n - (1+i)^k}{i}\right]$ y distribuyendo el $(1+i)^n$ del denominador con respecto a la diferencia dentro del corchete en el numerador

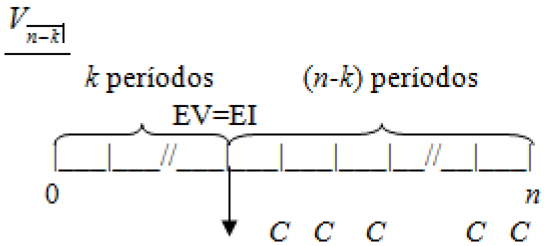
$V_{\overline{n-k|}} = C \cdot \underbrace{\left[\dfrac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}\right]}_{a_{\overline{n-k|}i}}$ es decir $\boxed{V_{\overline{n-k|}} = C \cdot a_{\overline{n-k|}i}}$

Conclusión: la deuda subsistente es la suma de las (*n*-*k*) cuotas que aún restan abonar actualizadas al momento *k*.

Se representa gráficamente $V_{\overline{n|}}$ y $V_{\overline{n-k|}}$:



$$\boxed{V_{\overline{n}|} = C \cdot a_{\overline{n}|i} = C.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$



$$\boxed{V_{\overline{n-k}|} = C \cdot a_{\overline{n-k}|i} = C.\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}}$$

c) <u>En función de $V_{\overline{n}|}$</u>

En (*)

$$V_{\overline{n-k}|} = V_{\overline{n}|} \cdot s^{-1}_{\overline{n}|i} \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{i}$$

$$V_{\overline{n-k}|} = V_{\overline{n}|} \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{i} \quad \text{simplificando } i$$

$$\boxed{V_{\overline{n-k}|} = V_{\overline{n}|} \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1}}$$

<u>Ejemplo</u>:

En el ejemplo, calcular la deuda subsistente después de abonadas 10 cuotas.

$$V_{\overline{n-k}|} = C \cdot a_{\overline{24-10}|i} = 1.311,74\frac{1-1,04^{-14}}{0,04} = \boxed{\$13.856,04}$$

Después de abonados las diez primeras cuotas la deuda subsistente es de \$13.856,04

$$V_{\overline{24}|} = T_{\overline{10}|} + V_{\overline{24-10}|} = 6.143,96 + 13.856,04 = \boxed{20.000.-}$$

6.2.5. <u>Intereses abonados en un período cualquiera k</u> (I_k)

Siendo la cuota la suma del servicio de interés más el servicio de amortización de cada período se deduce que:

$$\boxed{I_k = C - t_k} \quad (*)$$

También se obtiene el interés periódico de multiplicar la deuda subsistente del período anterior por la tasa de interés:

$$\boxed{I_k = V_{\overline{n-(k-1)}|}.i}$$

a) <u>En función de *t*</u>

Recordando que: $C = t(1+i)^n$ y $t_k = t(1+i)^{k-1}$ y reemplazando en (*)

$$I_k = C - t_k = t(1+i)^n - t(1+i)^{k-1}$$

$$\boxed{I_k = t\left[(1+i)^n - (1+i)^{k-1}\right]}$$

b) <u>En función de *C*</u>

Reemplazando *t* en la fórmula anterior:

$$I_k = \frac{C}{(1+i)^n}\left[(1+i)^n - (1+i)^{k-1}\right]$$

$$\boxed{I_k = C\left[1-(1+i)^{-[n-(k-1)]}\right]}$$

c) <u>En función de $V_{\overline{n}|}$</u>

Reemplazando la C en la fórmula anterior:

$$\boxed{I_k = V_{\overline{n}|} \cdot a^{-1}_{\overline{n}|;i}\left[1-(1+i)^{-[n-(k-1)]}\right]}$$

<u>Ejemplo</u>:

En el ejemplo, calcular el interés abonado con la décima cuota.

$$I_k = C - t_k = 1.311,74 - 728,36 = \boxed{\$583,38}$$

En la décima cuota se abonan $583,38 en concepto de intereses.

6.2.6. <u>Suma de Intereses Abonados</u>

6.2.6.1. <u>Parciales</u> $H_{\overline{k}|}$

<u>Definición:</u> La Suma Parcial de Intereses Abonados en los primeros *k* períodos es la suma de los intereses periódicos de los primeros *k* períodos.

$$H_{\overline{k}|} = \sum_{j=1}^{k} I_j = \sum_{j=1}^{k}(C - t_j) = \sum_{j=1}^{k} C - \sum_{j=1}^{k} t_j = C\sum_{j=1}^{k} 1 - T_{\overline{k}|}$$

$$\boxed{H_{\overline{k}|} = \sum_{j=1}^{k} I_j = kC - T_{\overline{k}|}} \quad (**)$$

<u>Conclusión:</u> el total de intereses abonados en las primeras *k* cuotas es la diferencia entre las *k* cuotas abonadas y el total amortizado de la deuda hasta ese período *k*.

a) En función de *t*:

$$H_{\overline{k|}}=\sum_{j=1}^{k} I_j = k\cdot t\cdot(1+i)^n - t\cdot s_{\overline{k|}:i}$$

$$\boxed{H_{\overline{k|}}=\sum_{j=1}^{k} I_j = t\left[k(1+i)^n - s_{\overline{k|}:i}\right]}$$

b) En función de *C*:

En (**)

$$H_{\overline{k|}}=\sum_{j=1}^{k} I_j = kC-\frac{C}{(1+i)^n}\cdot s_{\overline{k|}:i}$$

$$\boxed{H_{\overline{k|}}=\sum_{j=1}^{k} I_j = C\cdot\left[k-(1+i)^{-n}\cdot s_{\overline{k|}:i}\right]}$$

c) En función de $V_{\overline{n|}}$

$$\boxed{H_{\overline{k|}}=\sum_{j=1}^{k} I_j = V_{\overline{n|}}\cdot a^{-1}_{\overline{n|}:i}\left[k-(1+i)^{-n} s_{\overline{k|}:i}\right]}$$

Ejemplo:
En el ejemplo calcular la suma de intereses abonados en las primeras 10 cuotas.

$$H_{\overline{k|}}=\sum_{j=1}^{k} I_j = kC-T_{\overline{k|}}=10x1.311,74-511,74\frac{1,04^{10}-1}{0,04}=13.117,40-6.143,96=\boxed{\$6.973,44}$$

En las diez primeras cuotas se abonan $6.973,44 en concepto de intereses.

6.2.6.2. Totales $H_{\overline{n|}}$

Definición: El Total de Intereses Abonados es la suma de los intereses periódicos pagados en el préstamo.

Caso particular

Si $k = n$

$$H_{\overline{n|}}=\sum_{j=1}^{n} I_j = \overbrace{n\cdot C}^{Total\ desembolsado} - \underbrace{T_{\overline{n|}}}_{Total\ abonado\ V_{\overline{n|}}} \qquad \text{es decir}$$

$$\boxed{H_{\overline{n|}}=\sum_{j=1}^{n} I_j = nC-V_{\overline{n|}}}$$

Conclusión: El total de intereses abonados en el sistema Francés ($H_{\overline{n|}}$) es la suma de intereses abonados en una renta temporaria, inmediata y de cuota vencida (amortización).

Ejemplo:

En el ejemplo, calcular el total de intereses abonados.

$$H_{\overline{n|}} = \sum_{j=1}^{n} I_j = nC - V_{\overline{n|}} = 24x1.311,74 - 20.000 = \boxed{\$11.481,76}$$

6.2.7. Período en el cual se amortiza una fracción de la deuda original

En este punto la incógnita es el período "*k*" en el cual se amortiza una cierta fracción "*p/q*" de la deuda original.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p}{q}\cdot V_{\overline{n|}} = \text{fracción de deuda} \\ T_{\overline{k|}} = \dfrac{p}{q}\cdot V_{\overline{n|}} \end{array}\right\} \quad \text{Siendo } 0<p/q<1 \quad \text{entonces} \quad p<q$$

En esta ecuación la incógnita es "*k*". Despejándola:

$$t\cdot s_{\overline{k|}:i} = \frac{p}{q}\cdot t\cdot s_{\overline{n|}:i} \qquad \text{simplificando } t$$

$$s_{\overline{k|}:i} = \frac{p}{q}\cdot s_{\overline{n|}:i}$$

$$\frac{(1+i)^k - 1}{i} = \frac{p}{q}\cdot\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \text{simplificando } i \text{ y despejando}$$

$$(1+i)^k = \frac{p}{q}\cdot\left[(1+i)^n - 1\right] + 1 = \frac{p(1+i)^n - p + q}{q}$$

Aplicando logaritmo:

$$k.\log(1+i) = \log\left[p(1+i)^n - p + q\right] - \log q$$

Y despejando: $$\boxed{k = \frac{\log[p(1+i)^n - p + q] - \log q}{\log(1+i)}}$$

6.2.8. Período Medio del Reembolso *pm*

Definición: El Período Medio de Reembolso es el número de períodos que debe transcurrir para que la deuda se reduzca a la mitad.

Es un caso particular del punto anterior donde $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ entonces *p*=1 y *q*=2. Reemplazando:

$$\boxed{pm = \frac{\log[(1+i)^n + 1] - \log 2}{\log(1+i)}}$$

Aclaración: En el Sistema Francés el Período Medio de Reembolso es mayor a la mitad del plazo de cancelación de la deuda original porque las amortizaciones son progresivas.

$$\boxed{pm > \frac{n}{2}}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, calcular el período en el cual se abona la mitad de la deuda.

$$T_{\overline{pm|}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\overline{n|}} \quad \rightarrow \quad t \cdot s_{\overline{pm|}:i} = \frac{p}{q} \cdot t \cdot s_{\overline{n|}:i} \quad \rightarrow \quad \frac{1{,}04^{pm} - 1}{0{,}04} = \frac{1}{2} x \frac{1{,}04^{24} - 1}{0{,}04}$$

$$1{,}04^{pm} = \frac{1}{2} x \left[1{,}04^{24} - 1\right] + 1 = \frac{\left(1{,}04^{24} - 1\right) + 2}{2} \quad \text{y aplicando log}$$

$$pm = \frac{\log[1{,}04^{24} + 1] - \log 2}{\log 1{,}04} \quad \boxed{pm = 14{,}73} \quad \Rightarrow \quad \boxed{14 < pm < 15}$$

La mitad de la deuda se cancela entre el período 14 y el período 15. $\left(pm > \frac{n}{2} = 12\right)$

Evidentemente el período medio de reembolso depende de dos variables: el plazo y la tasa de interés. A medida que aumenta el plazo de cancelación (siendo i constante) aumenta el período medio. También, a medida que aumenta la tasa de interés (siendo n constante) también aumenta el pm ya que más intereses se tendrán que abonar en las primeras cuotas "demorando" la amortización de deuda. En este mismo ejemplo si i = 0,10 entonces pm = 17,74.

6.2.9. Tasa de Amortización (τ)

Definición 1: La Tasa de Amortización es el fondo amortizante correspondiente a una deuda de \$100 (se expresa en porcentaje).

Si $V_{\overline{n|}} = 100.-$ entonces $t = \tau$

$$V_{\overline{n|}} = t.s_{\overline{n|}:i}$$

$$100 = \tau.s_{\overline{n|}:i} \quad => \boxed{\tau = 100 \cdot s^{-1}_{\overline{n|}:i}}$$

Definición 2: la tasa de amortización es el porcentaje de la deuda que se amortiza con la primera cuota.

$V_{\overline{n|}}$ ________ t

1.- ______ $\dfrac{t}{V_{\overline{n|}}}$

100.- ______ $\boxed{\dfrac{t}{V_{\overline{n|}}}.100 = \tau}$

Reemplazando la deuda se demuestra que esta fórmula de τ es equivalente a la anterior

$$\tau = \frac{t}{V_{\overline{n|}}}.100 = \frac{t}{t.s_{\overline{n|}:i}}.100 \qquad \text{simplificando } t$$

$$\boxed{\tau = 100 \cdot s^{-1}_{\overline{n|}i}}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, calcular la tasa de amortización o el porcentaje de la deuda que se abona con la primera cuota.

$$\tau = \frac{t}{V_{\overline{n|}}}.100 = \frac{511,74}{20.000}x100 = \boxed{2,5687\%\ \text{mensual}}$$

6.2.10. Ejemplo: Cuadro de Amortización por Sistema Francés

A continuación se confecciona el cuadro de amortización del préstamo de nuestro ejemplo.

Préstamo = V_n = 20.000,00
Plazo: 24 meses
Tasa de interés = 0,04 mensual
Cuota = C = 20000x0,04/(1 - 1,04^(-24))= 1.311,74 mensual

Período k	Deuda Inicio (1) = (5)$_{k-1}$	Interés periódico (2) =(1) x 0,04	Amort.Periódica (3) = C - (2)	Total Amort. (4)=Suma (3)	Deuda Subsist. (5) = (1) - (3)
1	20.000,00	800,00	511,74	511,74	19.488,26
2	19.488,26	779,53	532,21	1.043,94	18.956,06
3	18.956,06	758,24	553,49	1.597,44	18.402,56
4	18.402,56	736,10	575,63	2.173,07	17.826,93
5	17.826,93	713,08	598,66	2.771,73	17.228,27
6	17.228,27	689,13	622,61	3.394,34	16.605,66
7	16.605,66	664,23	647,51	4.041,85	15.958,15
8	15.958,15	638,33	673,41	4.715,26	15.284,74
9	15.284,74	611,39	700,35	5.415,60	14.584,40
10	14.584,40	583,38	728,36	6.143,96	13.856,04
11	13.856,04	554,24	757,50	6.901,46	13.098,54
12	13.098,54	523,94	787,80	7.689,26	12.310,74
13	12.310,74	492,43	819,31	8.508,56	11.491,44
14	11.491,44	459,66	852,08	9.360,64	10.639,36
15	10.639,36	425,57	886,16	10.246,80	9.753,20
16	9.753,20	390,13	921,61	11.168,41	8.831,59
17	8.831,59	353,26	958,47	12.126,89	7.873,11
18	7.873,11	314,92	996,81	13.123,70	6.876,30
19	6.876,30	275,05	1.036,68	14.160,38	5.839,62
20	5.839,62	233,58	1.078,15	15.238,53	4.761,47
21	4.761,47	190,46	1.121,28	16.359,81	3.640,19
22	3.640,19	145,61	1.166,13	17.525,94	2.474,06
23	2.474,06	98,96	1.212,77	18.738,71	1.261,29
24	1.261,29	50,45	1.261,29	20.000,00	0,00
		11.481,76			

Verificar los valores obtenidos en cada apartado anterior.

6.3. Sistemas Alemán

Este sistema se caracteriza por tener amortización periódica constante. Los intereses son variables y decrecientes ya que se calculan sobre saldo de deuda. Por lo tanto, la cuota será variable y decreciente, siguiendo el comportamiento de los intereses.

$$\boxed{C_{k(decreciente)} = t_{(constante)} + I_{k(decreciente)}}$$

6.3.1. Amortización Periódica

La amortización periódica es constante y se calcula de la siguiente manera:

Si en *n períodos* ___________ *se amortiza* $V_{\overline{n|}}$

en 1 *período* ___________ *se amortiza* $\dfrac{V_{\overline{n|}}}{n} = t$

$$\boxed{t = \frac{V_{\overline{n|}}}{n}} \quad \text{y} \quad \boxed{V_{\overline{n|}} = nt}$$

Ejemplo:

Suponiendo un préstamo de $20.000.- a cancelar en 24 meses y al 4% mensual, determinar la amortización periódica constante.

$$t = \frac{V_{\overline{n|}}}{n} = \frac{20.000}{24} = \boxed{\$833,33}$$

En cada período se amortizan $833,33 de la deuda original.

6.3.2. Cuota de un período cualquiera *k*

La cuota periódica vencida que abona el deudor es la suma de la amortización más los intereses periódicos.

$$C_1 = t + I_1$$

$$C_1 = t + V_{\overline{n|}}i = t + nti$$

$$\boxed{C_1 = t(1+ni)} \qquad \text{(A)}$$

$$C_2 = t + I_2$$

$$C_2 = t + (V_{\overline{n|}} - t)i = \underbrace{t + V_{\overline{n|}}i}_{C_1} - ti \qquad (*_1)$$

$$\boxed{C_2 = C_1 - ti} \qquad (1)$$

de $(*_1)$ $C_2 = t + nti - ti$

$\boxed{C_2 = t[1+(n-1)i]}$ (B)

$C_3 = t + I_3$

$C_3 = t + (V_{\overline{n}|} - 2t)i$ (*₂)

$C_3 = t + V_{\overline{n}|}i - 2ti = \underbrace{t + V_{\overline{n}|}i - ti}_{C_2} - ti$

$\boxed{C_3 = C_2 - ti}$ (2)

de (*₂) , $C_3 = t + nti - 2ti$

$\boxed{C_3 = t[1+(n-2)\cdot i]}$ (C)

Generalizando:

De (1) y (2) $\boxed{C_k = C_{k-1} - ti}$ (**)

De (A), (B) y (C) $\boxed{C_k = t\left\{1+\left[n-(k-1)\right]i\right\} = t\left[1+(n-k+1)i\right]}$ (***)

Aclaración: La cuota está compuesta por la amortización t y el interés sobre la deuda subsistente en el período inmediato anterior (k-1): $C_k = t + [n-(k-1)]ti$

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar la cuota del período 10.

$C_k = t[1+(n-k+1)i] = 833{,}33(1+15x0{,}04) = 833{,}33x1{,}60 = \boxed{\$1.333{,}33}$

En el 10º período, la cuota que abona el deudor es de $1.333,33

6.3.3. Interés de un período cualquiera k

$C_k = t + I_k$

de (***), $C_k = t + \underbrace{(n-k+1)ti}_{I_k}$ entonces:

$\boxed{I_k = (n-k+1)ti}$

Recordando que los intereses del período k se calculan sobre la deuda al inicio de ese período:

$\boxed{I_k = V_{\overline{n-(k-1)}|}.i = (n-k+1)ti}$

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar el interés abonado en el período 10.

$$I_k = (n-k+1)ti = \left(24-10+1\right)x833,33x0,04 = \boxed{\$500.-}$$

En el 10º período, el deudor abona \$500.- de interés.

6.3.4. Ley de Cuotas

El interés se calcula sobre la deuda subsistente, por lo cual, es variable y decreciente. Las cuotas son también variables y decrecientes.

$$\underset{\text{variable decreciente}}{C_k} = \underset{\text{constante}}{t} + \underset{\text{variable decreciente}}{I_k}$$

De (**) cada cuota es igual a la anterior más una constante negativa, llamada razón *r*, "*-ti*", es decir:

$$\boxed{r = -ti}$$

Conclusión: las cuotas siguen la ley de una progresión aritmética de razón negativa: *–ti*.

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar la razón que vincula las cuotas.

$$r = -ti = -833,33x0,04 = \boxed{-\$33,33}$$

Las cuotas (y los intereses) decrecen en \$33,33 período a período.

6.3.5. Total Amortizado en los primeros *k* períodos $T_{\overline{k|}}$

En los primeros *k* períodos se abonaron *k* amortizaciones constantes, luego:

$$\boxed{T_{\overline{k|}} = t + t + t + ... + t = k.t} \quad \text{o} \quad \boxed{T_{\overline{k|}} = k\frac{V_{\overline{n|}}}{n}}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar el total amortizado de la deuda en los primeros 10 períodos.

$$T_{\overline{k|}} = k \cdot t = 10x833,33 = \boxed{\$8.333,33}$$

Caso particular (total amortizado en los "*n*" períodos)

Si *k* = *n*

$$\boxed{T_{\overline{n|}} = nt = n\frac{V_{\overline{n|}}}{n} = V_{\overline{n|}}}$$

6.3.6. Deuda subsistente después de transcurridos *k* períodos $V_{\overline{n-k|}}$

$$V_{\overline{n|}} = V_{\overline{n-k|}} + T_{\overline{k|}}$$

$$V_{\overline{n-k|}} = V_{\overline{n|}} - T_{\overline{k|}}$$

$$V_{\overline{n-k|}} = nt - kt$$

$$\boxed{V_{\overline{n-k|}} = (n-k)t}$$

Conclusión: siendo la amortización constante, la deuda subsistente después de *k* períodos es igual a las *n-k* amortizaciones que aún no fueron abonadas.

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar la deuda subsistente después de transcurridos los primeros 10 períodos.

$$V_{\overline{n-k|}} = (n-k)t = 14x833,33 = \boxed{\$11.666,66}$$

6.3.7. Suma de Intereses Abonados

6.3.7.1. Parciales $H_{\overline{k|}}$

$$H_{\overline{k|}} = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_k = \sum_{j=1}^{k} I_j \qquad \text{siendo} \qquad I_k = (n-k+1)ti$$

$$H_{\overline{k|}} = \sum_{j=1}^{k}(n-j+1)ti = ti\sum_{j=1}^{k}(n-j+1)$$

$$H_{\overline{k|}} = ti\left[n + (n-1) + (n-2) + ... + (n-k+1)\right]$$

Dentro del corchete se observa una suma de términos de una progresión aritmética en la cual:

a_1= primer término = n

a_n = último término = n-k+1

n = número de términos = k

r = razón de la progresión = -1

Siendo la suma de términos de una progresión aritmética: $S_a = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n$ y reemplazando:

$$H_{\overline{k|}} = ti\left[\frac{n+(n-k+1)}{2}\right]k$$

$$\boxed{H_{\overline{k|}} = tik\left(\frac{2n-k+1}{2}\right)}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar la suma de intereses abonados en los primeros 10 períodos.

$$H_{\overline{k|}} = t \cdot i \cdot k\left(\frac{2n-k+1}{2}\right) = 833,33x0,04x10\left(\frac{2x24-10+1}{2}\right) = \boxed{\$6.500.-}$$

6.3.7.2. Totales $H_{\overline{n|}}$

Siendo: $k = n$

$$H_{\overline{n}|} = t.i.n\left(\frac{2n-n+1}{2}\right)$$

$$\boxed{H_{\overline{n}|} = \underbrace{tn}_{V_{\overline{n}|}}\,i\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\boxed{H_{\overline{n}|} = \underbrace{V_{\overline{n}|}i}_{I_1}\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$\boxed{H_{\overline{n}|} = I_1\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar la suma de intereses abonados en el préstamo.

$$H_{\overline{n}|} = t\cdot i\cdot n\left(\frac{n+1}{2}\right) = 833{,}33x0{,}04x24\left(\frac{24+1}{2}\right) = \boxed{\$10.000.-}$$

6.3.8. Período en el cual se amortiza una fracción f de la deuda original

$$T_{\overline{k}|}\left.\begin{matrix} f.V_{\overline{n}|} \\ k.t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f.V_{\overline{n}|} = k.t \\ f.n.t = k.t \quad \text{simplificando } t \end{matrix}$$

$$\boxed{k = f.n}$$

Conclusión: una cierta fracción de la deuda se cancela en esa misma fracción del plazo de cancelación del préstamo.

6.3.9. Período Medio de Reembolso *pm*

Definición: El Período Medio de Reembolso es el momento en el cual se amortiza la mitad de la deuda.

$$Si \quad f = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{pm = \frac{n}{2}}$$

Conclusión: la mitad de la deuda se cancela en la mitad del tiempo de cancelación del préstamo.

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar el período en el que se abona la mitad de la deuda.

$$pm = \frac{n}{2} = \frac{24}{2} = \boxed{12} \qquad \text{verificación} \quad T_{\overline{12}|} = \frac{1}{2}V_{\overline{n}|} = \frac{20.000}{2} = 10.000 = 12x833{,}33$$

La mitad de la deuda se cancela, exactamente, en la mitad del plazo de cancelación de la deuda.

6.3.10. Tasa de Amortización τ

Definición 1: La Tasa de Amortización es la amortización correspondiente a una deuda de $100 (se expresa en porcentaje).

Si $V_{\overline{n|}} = 100 \Rightarrow t = \tau$ y siendo $t = \dfrac{V_{\overline{n|}}}{n}$ entonces $\boxed{\tau = \dfrac{100}{n}}$

Definición 2: La Tasa de Amortización es el porcentaje de la deuda original que se amortiza con la primera cuota.

$\boxed{\tau = \dfrac{t}{V_{\overline{n|}}}.100 = \dfrac{t}{nt}.100}$ entonces, simplificando t : $\boxed{\tau = \dfrac{100}{n}}$

Aclaración: en el sistema Alemán la tasa de amortización es constante para todos los períodos porque la amortización es constante.

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar la tasa de amortización o el porcentaje de la deuda que se abona en cada período. $\tau = \dfrac{100}{n} = \dfrac{100}{24} = \boxed{4{,}1667\%\ \text{mensual}}$

6.3.11. Ejemplo

Préstamo = V_n = 20.000,00
Plazo: 24 Meses
Tasa de interés = 0,04 mensual
Amortización periódica = t = 20.000/24 = 833,33 mensual

Per. k	Deuda a Inicio (1) = $(5)_{k-1}$	Interés periódico (2) =(1) x 0,04	Cuota periódica (3)=(2)+833,33	Total Amort. (4)= k . 833,33	Deuda Subsist. (5)=(1)-833,33
1	20.000,00	800,00	1.633,33	833,33	19.166,67
2	19.166,67	766,67	1.600,00	1.666,67	18.333,33
3	18.333,33	733,33	1.566,67	2.500,00	17.500,00
4	17.500,00	700,00	1.533,33	3.333,33	16.666,67
5	16.666,67	666,67	1.500,00	4.166,67	15.833,33
6	15.833,33	633,33	1.466,67	5.000,00	15.000,00
7	15.000,00	600,00	1.433,33	5.833,33	14.166,67
8	14.166,67	566,67	1.400,00	6.666,67	13.333,33
9	13.333,33	533,33	1.366,67	7.500,00	12.500,00
10	12.500,00	500,00	1.333,33	8.333,33	11.666,67
11	11.666,67	466,67	1.300,00	9.166,67	10.833,33
12	10.833,33	433,33	1.266,67	10.000,00	10.000,00
13	10.000,00	400,00	1.233,33	10.833,33	9.166,67
14	9.166,67	366,67	1.200,00	11.666,67	8.333,33
15	8.333,33	333,33	1.166,67	12.500,00	7.500,00
16	7.500,00	300,00	1.133,33	13.333,33	6.666,67
17	6.666,67	266,67	1.100,00	14.166,67	5.833,33
18	5.833,33	233,33	1.066,67	15.000,00	5.000,00
19	5.000,00	200,00	1.033,33	15.833,33	4.166,67
20	4.166,67	166,67	1.000,00	16.666,67	3.333,33
21	3.333,33	133,33	966,67	17.500,00	2.500,00
22	2.500,00	100,00	933,33	18.333,33	1.666,67

23	1.666,67	66,67	900,00	19.166,67	833,33
24	833,33	33,33	866,67	20.000,00	0,00
		10.000,00			

Verificar los valores obtenidos en cada apartado anterior.

Aclaración:

Si se compara la suma de todas las cuotas de ambos sistemas, en el Sistema Francés el resultado es mayor, lo que implica que la suma de intereses también es mayor (ya que el préstamo es el mismo). Esto es porque en el Sistema Alemán desde el principio se amortiza más deuda y por lo tanto se abonan menos intereses que en el Sistema Francés (se recuerda que en este sistema las amortizaciones son crecientes). Sin embargo ¿por qué la tasa efectiva del préstamo es el 4% mensual en ambos sistemas? Es así porque se debe considerar la reinversión de las cuotas que el acreedor va cobrando.

En los cuadros que se presentan a continuación el acreedor cobra las cuotas periódicas y las reinvierte al 4% mensual hasta el final del plazo pactado (como ejemplo se escribe la fórmula para las dos primeras cuotas del sistema Francés). Luego se suman y, allí sí, se obtiene el mismo resultado. Por ello, la tasa efectiva es el 4% para ambos sistemas.

	Sistema Francés		Sistema Alemán	
	Cuotas	Cuotas Capitalizadas	Cuotas	Cuotas Capit.
1	1.311,74	$3.233,06 = 1.311,74 \times 1,04^{23}$	1.633,33	4.025,70
2	1.311,74	$3.108,71 = 1.311,74 \times 1,04^{22}$	1.600,00	3.791,87
3	1.311,74	2.989,15	1.566,67	3.570,07
4	1.311,74	2.874,18	1.533,33	3.359,72
5	1.311,74	2.763,63	1.500,00	3.160,27
6	1.311,74	2.657,34	1.466,67	2.971,20
7	1.311,74	2.555,13	1.433,33	2.791,99
8	1.311,74	2.456,86	1.400,00	2.622,17
9	1.311,74	2.362,36	1.366,67	2.461,29
10	1.311,74	2.271,50	1.333,33	2.308,90
11	1.311,74	2.184,14	1.300,00	2.164,60
12	1.311,74	2.100,13	1.266,67	2.027,97
13	1.311,74	2.019,36	1.233,33	1.898,66
14	1.311,74	1.941,69	1.200,00	1.776,29
15	1.311,74	1.867,01	1.166,67	1.660,53
16	1.311,74	1.795,20	1.133,33	1.551,04
17	1.311,74	1.726,16	1.100,00	1.447,52
18	1.311,74	1.659,77	1.066,67	1.349,67
19	1.311,74	1.595,93	1.033,33	1.257,21
20	1.311,74	1.534,55	1.000,00	1.169,86
21	1.311,74	1.475,53	966,67	1.087,37
22	1.311,74	1.418,77	933,33	1.009,49
23	1.311,74	1.364,21	900,00	936,00
24	1.311,74	1.311,74	866,67	866,67
	31.481,76	51.266,08	30.000,00	51.266,08

6.4. Sistema Americano

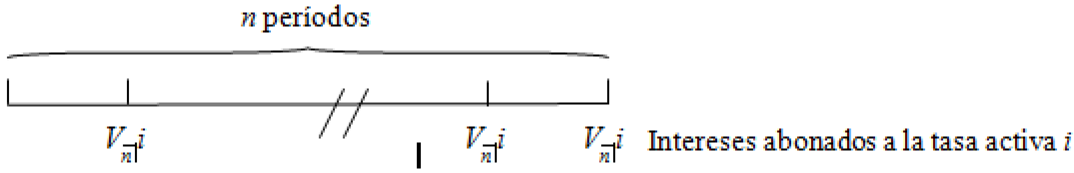
Este sistema no es un sistema de amortización propiamente dicho sino un sistema de acumulación de fondos a los efectos de cancelar un préstamo, con reembolso total al final del período pactado.

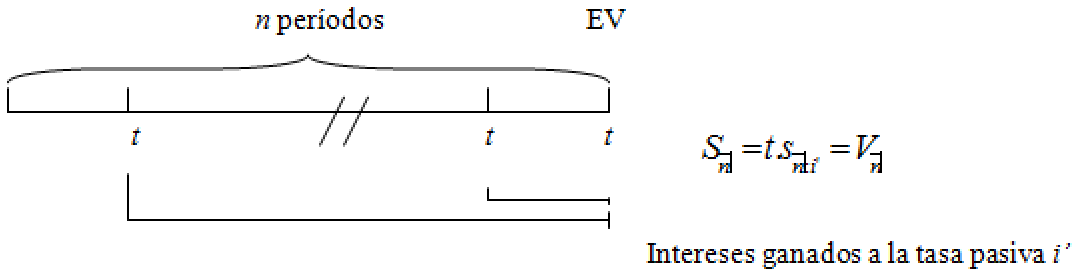
El deudor toma el préstamo en una entidad y se compromete a abonarle el servicio de intereses, en todos los períodos, en forma vencida y a una cierta tasa activa para la entidad financiera i o tasa de intereses pagados por el deudor.

Por otro lado, el deudor realiza depósitos llamados "fondos de acumulación" t en otra institución (puede ser la misma), a los efectos de formar, al final de los n períodos, una suma igual al préstamo para reembolsarla a su acreedor. Dichos depósitos se realizan bajo la forma de una imposición con cuotas vencidas que ganan intereses a una tasa pasiva para la entidad financiera i' o tasa de intereses ganados por el deudor.

Al Sistema Americano se lo conoce también como el "Sistema de las dos tasas".

Gráficamente:





6.4.1. Fondo de acumulación

El fondo de acumulación (cuota de la imposición) es igual a la suma periódica, constante y vencida que debe depositar el deudor para lograr al final del plazo pactado un valor final (ahorro) igual al valor de la deuda original $(S_{\overline{n}|} = V_{\overline{n}|})$, ganando intereses a la tasa pasiva $i´$:

$$\boxed{t = V_{\overline{n}|}\, s^{-1}_{\overline{n}|i'}}$$

Ejemplo:

Suponiendo un préstamo de \$20.000.- a cancelar en 24 meses y al 4% mensual y con los fondos de acumulación depositados al 1% mensual, determinar el fondo de acumulación.

$$t = V_{\overline{n}|}\, s^{-1}_{\overline{n}|i'} = 20.000\frac{0,01}{1,01^{24}-1} = \boxed{\$741,47}$$

6.4.2. Cuota Periódica Constante

En los gráficos anteriores se observa que el deudor debe afrontar dos desembolsos:

1- Los intereses constantes que paga al acreedor a la tasa activa i y
2- Los fondos de acumulación que deposita en otra institución, a la tasa pasiva i' y que formarán el valor del préstamo al final del plazo pactado.

La cuota en el Sistema Americano es:

$$C_a = \underbrace{V_{\overline{n|}} i}_{\text{Interés}} + \underbrace{t}_{\text{fondo de acumulación}}$$

$$C_a = V_{\overline{n|}} i + V_{\overline{n|}} s^{-1}_{\overline{n|}i'}$$

$$\boxed{C_a = V_{\overline{n|}} \left(i + s^{-1}_{\overline{n|}i'} \right)} \quad \text{siendo} \quad \boxed{C_a = V_{\overline{n|}} \left[i + \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \right]}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar la cuota periódica que abona el deudor.

$$C = V_{\overline{n|}} \left(i + s^{-1}_{\overline{n|}i'} \right) = 20.000 \left(0,04 + \frac{0,01}{1,01^{24} - 1} \right) = \boxed{\$1.541,47}$$

6.4.3. Total de Intereses Abonados *T.I.A.*

En cada uno de los *n* períodos el deudor abona $V_{\overline{n|}} i$, luego en los *n* períodos pagará

$$\boxed{T.I.A. = V_{\overline{n|}}\ i\ n}$$

6.4.4. Total de Intereses Ganados *T.I.G.*

Son los intereses ganados por el depósito de los fondos de acumulación. Siendo una imposición:

$$\boxed{T.I.G. = V_{\overline{n|}} - n\ t}$$

6.4.5. Total de Intereses Netos *T.I.N.*

$$\boxed{T.I.N. = T.I.A. - T.I.G = V_{\overline{n|}}\ i\ n \text{ - } (V_{\overline{n|}} \text{ - } n\ t)}$$

Ejemplo:

En el ejemplo, determinar el total de intereses abonados por el deudor, el total de intereses ganados y el total de intereses netos.

$$T.I.A. = V_{\overline{n|}}\ i\ n = 20.000 x 0,04 x 24 = \boxed{\$19.200.-}$$

$$T.I.G. = V_{\overline{n|}} \text{ - } n\ t = 20.000 - 24 x 741,47 = \boxed{\$2.204,72}$$

$$T.I.N. = T.I.A. - T.I.G = 19.200 - 2.204,72 = \boxed{\$16.995,28}$$

6.4.6. Comparación del Sistema Americano y Sistema Francés

Para determinar en qué casos conviene el Sistema Francés y en qué casos conviene el Sistema Americano se compararán las cuotas (constantes) de ambos sistemas.

La cuota del Sistema Francés es: $C = V_{\overline{n|}} \cdot a^{-1}_{\overline{n|}i}$ (a la tasa activa *i*)

Y recordando que (Capítulo IV) $a^{-1}_{\overline{n|}i} - s^{-1}_{\overline{n|}i} = i$ y $a^{-1}_{\overline{n|}i} = i + s^{-1}_{\overline{n|}i}$ entonces:

$C_f = V_{\overline{n|}}(i + s^{-1}_{\overline{n|}i})$ cuota Sistema Francés (*)

$C_a = V_{\overline{n|}}(i + s^{-1}_{\overline{n|}i'})$ cuota Sistema Americano

restando miembro a miembro

$$\boxed{C_f - C_a = V_{\overline{n}|}\underbrace{(s^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i'})}_{\Delta}}$$

Aclaración en (*): la cuota del Sistema Francés es un caso particular de la cuota del Sistema Americano cuando coinciden la tasa pasiva y la tasa activa.

En la comparación se presentan tres casos:

1er. Caso:

$$Si \quad i' = i \Rightarrow \Delta = 0 \quad => C_f - C_a = 0 \Rightarrow \boxed{C_f = C_a}$$

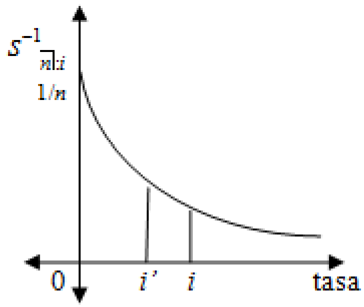
Si la tasa activa y la tasa pasiva son iguales las cuotas también lo son y resulta indistinto tomar el préstamo por uno u otro sistema.

2do. Caso

$$Si \quad i' < i \qquad \text{(caso más común)}$$

Recordando que la función $s^{-1}_{\overline{n}|i}$ a tasa variable es decreciente y cóncava, presenta a mayor tasa menor valor de la función. (La demostración se realiza utilizando el gráfico de la función $s^{-1}_{\overline{n}|i}$ para i variable)

Gráficamente:



$$s^{-1}_{\overline{n}|i} < s^{-1}_{\overline{n}|i'} \;=>\; \Delta = s^{-1}_{\overline{n}|i} - s^{-1}_{\overline{n}|i'} < 0 \;=>\; C_f - C_a < 0 => \boxed{C_f < C_a}$$

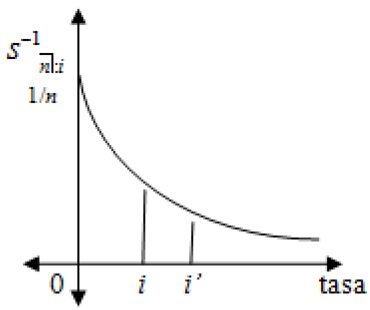
En este caso, conviene el Sistema Francés ya que la cuota periódica vencida a abonar es menor.

3er. Caso:

$$Si \quad i' > i$$

Recordando que la función $s^{-1}_{\overline{n}|i}$ a tasa variable es decreciente y cóncava, presenta a mayor tasa menor valor de la función.

Gráficamente:



$$s^{-1}_{\overline{n|}:i} > s^{-1}_{\overline{n|}:i'} \Rightarrow \Delta = s^{-1}_{\overline{n|}:i} - s^{-1}_{\overline{n|}:i'} > 0 \Rightarrow C_f - C_a > 0 \Rightarrow \boxed{C_f > C_a}$$

En consecuencia, el único caso en que el sistema Americano conviene al sistema Francés es cuando la tasa pasiva *i'* que ganan los fondos de acumulación es mayor que la tasa activa *i* que cobra el prestamista. En este caso la cuota del Sistema Americano es menor.

6.4.7. Ejemplos:

Ejemplo 1: Suponiendo un préstamo a cancelar por el sistema Americano de \$20.000.- en 2 años a la tasa de interés del 4% mensual y con fondos de acumulación a la tasa del 1% mensual, calcular la cuota, el fondo de acumulación y construir el cuadro de evolución de los intereses ganados.

$$C_a = V_{\overline{n|}}\left[i + \frac{i'}{(1+i')^n - 1}\right] = 20.000\left[0,04 + \frac{0,01}{1,01^{24} - 1}\right] = \$1.541,47$$

$$t = C - V_{\overline{n|}}i = 1.541,47 - 20.000x0,04 = 1.541,47 - 800 = \$741,47$$ o bien

$$t = V_{\overline{n|}}s^{-1}_{\overline{n|}:i'} = 20.000\frac{0,01}{1,01^{24} - 1} = \$741,47$$

k	Suma al Inicio (1) = $(4)_{k-1}$	Intereses (2) = (1) x *i'*	Depósito (3) = *t*	Ahorro (4)=(1)+(2)+(3)
1	-	-	-	741,47
2	741,47	7,41	741,47	1.490,35
3	1.490,35	14,90	741,47	2.246,73
4	2.246,73	22,47	741,47	3.010,66
5	3.010,66	30,11	741,47	3.782,24
6	3.782,24	37,82	741,47	4.561,53
7	4.561,53	45,62	741,47	5.348,62
8	5.348,62	53,49	741,47	6.143,57
9	6.143,57	61,44	741,47	6.946,48
10	6.946,48	69,46	741,47	7.757,41
11	7.757,41	77,57	741,47	8.576,45
12	8.576,45	85,76	741,47	9.403,69
13	9.403,69	94,04	741,47	10.239,19
14	10.239,19	102,39	741,47	11.083,06
15	11.083,06	110,83	741,47	11.935,36
16	11.935,36	119,35	741,47	12.796,18
17	12.796,18	127,96	741,47	13.665,61
18	13.665,61	136,66	741,47	14.543,74
19	14.543,74	145,44	741,47	15.430,64
20	15.430,64	154,31	741,47	16.326,42
21	16.326,42	163,26	741,47	17.231,15
22	17.231,15	172,31	741,47	18.144,93
23	18.144,93	181,45	741,47	19.067,85

24	19.067,85	190,68	741,47	20.000,00
	Total de ints….	2.204,73		

En este ejemplo se observa cómo se obtiene el ahorro total igual al valor del préstamo y los intereses ganados período a período.

Verificar los valores obtenidos en los apartados anteriores.

Ejemplo 2: El objetivo de este ejemplo es mostrar la diferencia porcentual que debería existir entre la tasa activa y la tasa pasiva para "compensar" los intereses pagados al acreedor con los intereses ganados en la imposición.

Suponiendo una deuda de \$1.000.000.- a devolver por el sistema Americano en 2 años con cuotas mensuales a la tasa activa del 2% mensual, calcular la tasa a la que deben colocarse los fondos de acumulación para que el inversor no pague ni gane intereses.

Se debe cumplir que: *T.I.A. = T.I.G.* entonces:

$$V_{\overline{n}|} in = V_{\overline{n}|} - nt$$

$$V_{\overline{n}|} in = V_{\overline{n}|} - nV_{\overline{n}|} s^{-1}_{\overline{n}|i'}$$

Simplificando: $in = 1 - ns^{-1}_{\overline{n}|i'}$ y reemplazando $0,02x24 = 1 - 24s^{-1}_{\overline{24}|i'}$

$s^{-1}_{\overline{24}|i'} = 0,021667$ aplicando tanteo financiero e interpolación lineal *i'*=0,052767 mensual (5,2767%)

Conclusión: Para que el inversor compense los intereses pagados con los intereses ganados debe obtener una tasa pasiva *i'* mucho mayor a la tasa activa *i*, en este caso, casi un 164% mayor. Esto se debe a que los intereses que abona el deudor se calculan sobre el valor de la deuda (\$1.000.000.-) y los intereses que gana se calculan, acumulativamente, sobre los fondos de acumulación (*t* = \$21.666,66).

Ejemplo 3: El objetivo de este tercer ejemplo es mostrar que, si bien *i'*>*i* el deudor paga intereses, sólo que paga menos intereses que en el sistema Francés. La comparación se realiza primero a través de la cuota, segundo a través del total de intereses netos abonados y tercero a través de la tasa efectiva de costo del Sistema Americano.

Suponiendo una deuda de \$150.000.- a 20 meses a la tasa del 1,50% mensual y que el deudor coloca los fondos de acumulación en otra institución que abona el 2% mensual, determinar:

a) la cuota periódica que abona el deudor en el sistema Americano y la cuota que abonaría en el sistema Francés.

b) el Total de Intereses Netos abonados en el Sistema Americano y el total de Intereses que abonaría en el sistema Francés

c) la tasa efectiva de costo del sistema Americano.

a) Cálculo de las cuotas

$$C_a = V_{\overline{n}|}(i + s^{-1}_{\overline{n}|i'}) = \boxed{\$8.423,51} \quad \text{(ya calculada)}$$

$$C_f = V_{\overline{n}|} a^{-1}_{\overline{n}|i} = 150.000 \frac{0,015}{1-1,015^{-20}} = \boxed{\$8.736,86}$$

Siendo $i' > i$ conviene el Sistema Americano (menor cuota)

b) Total de intereses netos abonados en el sistema Americano

$$T.I.A. = V_{\overline{n}|}\ i\ n = 150.000x0,015x20 = \$45.000.-$$

$$T.I.G. = V_{\overline{n}|} - nt = V_{\overline{n}|} - nV_{\overline{n}|} s^{-1}_{\overline{n}|i'} = 150.000 - 20x150.000x\frac{0,02}{1,02^{20}-1} = \$26.529,85.-$$

$$T.I.N. = T.I.A. - T.I.G. = 45.000 - 26.529,85 = \boxed{\$18.470,15}$$

En este ejemplo se observa que, aún cuando la tasa activa es menor a la pasiva, el deudor abona \$18.470,15 de intereses por el préstamo.

Total de intereses abonados en el sistema Francés

$H_{\overline{n}|} = nC - V_{\overline{n}|} = 20x8.736,86 - 150.000 = \boxed{\$24.737,20}$ Como el total de intereses abonados en el Sistema Francés es mayor al total de intereses netos abonados por el Sistema Americano también se concluye que conviene este último.

c) Otra forma de determinar qué sistema conviene es calculando la tasa efectiva de costo del Sistema Americano (en el Sistema Francés es 1,50% mensual)

6.4.8. Determinación de la tasa efectiva de costo del Sistema Americano

En el sistema Americano intervienen dos tasas de interés: la activa i y la pasiva $i´$. Es de interés determinar la tasa de costo implícita. Esta tasa es la tasa de interés sobre saldos del Sistema Francés que se calcula tomando la deuda y la cuota del Sistema Americano o, lo que es lo mismo, igualando las cuotas de ambos sistemas.

Ejemplo:

En el ejemplo visto en el punto anterior (i=0,015 mensual e $i´$=0,02 mensual):

$C_a = V_{\overline{n}|} a^{-1}_{\overline{n}|i*} \Rightarrow \quad \frac{8.423,51}{150.000} = 0,056157 = a^{-1}_{\overline{n}|i*} = \frac{i^*}{1-(1+i^*)^{-20}}$ aplicando tanteo financiero e interpolación lineal se llega a que $i^* = 0,011324$ mensual (menor a la tasa activa enunciada del 1,50% mensual). Nuevamente se concluye que conviene el sistema Americano, ya que la tasa de costo implícita es del 1,1324% mensual mientras que en el sistema Francés la tasa es del 1,50% mensual.

Conclusiones: Respecto de la tasa efectiva de costo del sistema Americano se concluye:

Si $i < i'$ entonces $i^* < i$ Los intereses ganados en el sistema Americano "compensan" parte de los intereses abonados en el sistema Francés (como en este ejemplo). Luego: $i^* < i < i'$

Si $i > i'$ entonces $i^* > i$ La tasa activa es mayor a la tasa pasiva y la tasa de costo implícita es aún mayor. Luego: $i' < i < i^*$

Si $i = i'$ entonces $i^* = i = i'$ porque opero en Sistema Francés.

6.5. Distorsiones del Sistema Francés

Con la finalidad de ocultar la verdadera tasa que cobra el prestamista se han ideado distintos procedimientos que se aplican sobre el Sistema Francés, distorsionándolo.

6.5.1. Respecto de la tasa de interés

En algunos casos, se enuncia una tasa periódica efectiva de interés (por ejemplo anual) pero luego se exige al deudor el pago de cuotas subperiódicas (por ejemplo mensuales). Si la tasa periódica enunciada es efectiva, lo que correspondería hacer sería calcular la tasa subperiódica equivalente a la enunciada, pero en la práctica, se opera con una tasa proporcional. Esto incrementa la tasa de costo efectiva que abona el deudor.

Ej. Tasa enunciada = 0,48 anual efectiva pero se aplica la $i(m)$ = 0,48/12=0,04 mensual.

$$i = (1+i_{(m)})^m - 1 > 0,48$$

$$1,04^{12} - 1 = 0,601032 > 0,48 \quad \text{La tasa anual efectiva es del } 60,1032\%$$

6.5.2. Respecto de la partición de la cuota periódica

En este caso, se pacta el préstamo para ser cancelado mediante el pago de cuotas periódicas y vencidas de $\$C$ (por ejemplo mensuales). So pretexto de dar una mayor flexibilidad al deudor, se propone fraccionar esas cuotas periódicas en "m" cuotas subperiódicas de $\$C/m$ cada una (por ejemplo semanales). El efecto que se produce es que el prestamista recibe las fracciones de cada cuota anticipadamente y en consecuencia la tasa efectiva que abona el deudor es mayor.

6.5.3. Respecto del momento en que se abona la cuota periódica

En un préstamo que debería ser reembolsado con cuotas vencidas se modifican las cláusulas pactadas exigiéndole al deudor el pago de cuotas adelantadas. El efecto es el mismo que en los casos anteriores.

6.5.4. Tasa Directa (cuarta distorsión del sistema Francés)

La única semejanza del procedimiento de Tasa Directa con el Sistema Francés es que el reembolso del préstamo se realiza mediante el pago de cuotas constantes y vencidas.

El cálculo del total de intereses que debe pagar el deudor se efectúa de la siguiente manera:

Total de intereses = (Préstamo solicitado) x (tasa directa) x (número de períodos).

$$H_{\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} I_j = \text{Suma solicitada} \cdot r \cdot n$$

donde "r" es la tasa directa y "n" es el número de cuotas

6.5.4.1. Primera modalidad: Tasa Directa con intereses Cargados a la suma solicitada

Esta modalidad se utiliza tanto para tomar un préstamo como para la compra de bienes (es muy común).

En este caso, el deudor recibe como préstamo la suma que ha solicitado. Los intereses se cargan al importe recibido y la suma total se reembolsa en "n" cuotas iguales y vencidas:

Suma solicitada y recibida en préstamo $V_{\overline{n|}}$

$+$

Intereses (régimen de interés simple) $\underline{V_{\overline{n|}}.r_c.n}$

Suma a devolver $\boxed{K = V_{\overline{n|}}(1 + r_c n)}$

donde r_c es la tasa directa con intereses cargados a la suma solicitada.

Despejando $V_{\overline{n|}}$ (préstamo): $\boxed{V_{\overline{n|}} = \dfrac{K}{1 + r_c n}}$

6.5.4.1.1. Cuota periódica constante

$$C = \frac{\text{Suma a devolver}}{\text{n° de cuotas}} = \frac{K}{n} = \frac{V_{\overline{n|}}(1 + r_c n)}{n} \text{ entonces: } \boxed{C = V_{\overline{n|}}\left(\frac{1}{n} + r_c\right) = \frac{V_{\overline{n|}}}{n} + V_{\overline{n|}}.r_c}$$

donde el primer término representa la amortización y el segundo, el interés periódico.

6.5.4.1.2. Críticas a esta modalidad

1 – Los intereses se calculan y el tiempo no ha transcurrido.

2 – La base para el cálculo de intereses, en todos los períodos, es la suma solicitada cuando debería ser el saldo de deuda de cada período.

6.5.4.1.3. Cálculo de la tasa de interés sobre saldos o tasa efectiva de costo implícita

Para calcular la tasa efectiva de interés (tasa de interés sobre saldos) se iguala la cuota de esta modalidad con la del sistema Francés (ambas son constantes)

$$\left.\begin{array}{l} C = V_{\overline{n|}}\left(\dfrac{1}{n} + r_c\right) \\ C = V_{\overline{n|}}\, a^{-1}_{\overline{n|}i} \end{array}\right\} = a^{-1}_{\overline{n|}i} = \frac{1}{n} + r_c$$

. Para calcular la tasa efectiva de costo "*i*" conociendo la tasa directa:

$\boxed{a^{-1}_{\overline{n|}i} = \dfrac{1}{n} + r_c}$ aplicar tanteo financiero e interpolación lineal.

. Para calcular la tasa directa conociendo la tasa real de costo implícita "*i*":

$$\boxed{r_c = a^{-1}_{\overline{n|}i} - \frac{1}{n}}$$

Ejemplo:

Suponiendo que se compra un bien que cuesta $100.000.- en 20 cuotas mensuales y al 3% mensual directo, calcular la suma a devolver, la cuota y la tasa efectiva sobre saldos que resulta.

$$K = V_{\overline{n|}}(1 + r_c n) = 100.000(1 + 0{,}03x20) = \boxed{\$160.000.-}$$

$$C = V_{\overline{n}|}\left(\frac{1}{n} + r_c\right) = \frac{K}{n} = 100.000\left(\frac{1}{20} + 0,03\right) = \boxed{\$8.000.-}$$

$$C = V_{\overline{n}|}\, a^{-1}_{\overline{n}|i} \qquad \Rightarrow \qquad a^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{8.000}{100.000} = 0,08 \quad \text{aplicando tanteo financiero}$$

$$\boxed{i = 0,049643\ mensual} \qquad\qquad i > r_c$$

6.5.4.2. Segunda modalidad: Tasa directa con intereses Descontados de la suma solicitada

Esta modalidad se utiliza solamente para tomar préstamos, ya que para comprar bienes carece de sentido el descuento anticipado de intereses. Por lo tanto, si para comprar un bien se utiliza "tasa directa" se sabe que es la modalidad de intereses cargados.

Préstamo solicitado pero no recibido y a devolver:	K
Intereses (régimen de interés simple):	$-\ K.r_d.n$
Préstamo recibido:	$V_{\overline{n}|} = K - Kr_d n$

$$\boxed{V_{\overline{n}|} = K.(1 - r_d n)} \quad \text{y} \quad \boxed{K = \frac{V_{\overline{n}|}}{1 - r_d n}}$$

donde r_d es la tasa directa con intereses descontados de la suma solicitada.

6.5.4.2.1. Cuota periódica constante

$$C = \frac{Suma\ a\ \text{devolver}}{n°\ de\ cuotas} = \frac{K}{n} \qquad \text{entonces:} \quad \boxed{C = \frac{V_{\overline{n}|}}{(1 - r_d n)n}}$$

6.5.4.2.2. Críticas a esta modalidad

1 – Los intereses se calculan y el tiempo no ha transcurrido.

2 – La base para el cálculo de intereses, en todos los períodos, es la suma solicitada cuando debería ser sobre el saldo de deuda.

3 – Los intereses se calculan sobre una suma mayor K que el deudor efectivamente NO recibe en préstamo. Por esta razón esta modalidad es más onerosa que la anterior.

6.5.4.2.3. Cálculo de la tasa de interés sobre saldos o tasa efectiva de costo implícita

Nuevamente se igualan ambas cuotas:

$$\text{Cuotas iguales} \begin{cases} C = V_{\overline{n}|}\dfrac{1}{n(1 - r_d.n)} & \text{Sistema Directo} \\ C = V_{\overline{n}|}\, a^{-1}_{\overline{n}|i} & \text{Sistema Francés} \end{cases}$$

$$\text{Igualando y simplificando} \quad \boxed{a^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{n(1 - r_d.n)}}$$

. Para calcular la tasa efectiva de costo:

$a_{\overline{n}|i} = n(1 - r_d\ n)$ aplicar tanteo financiero e interpolación lineal

. Para despejar la tasa directa con descuento anticipado de intereses conociendo "i":

$$a^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{n(1 - r_d\ n)}$$

$$a_{\overline{n}|i} = n(1 - r_d\ n)$$

$$\frac{a_{\overline{n}|i}}{n} = 1 - r_d\ n \Rightarrow r_d\ n = 1 - \frac{a_{\overline{n}|i}}{n}$$

$$\boxed{r_d = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a_{\overline{n}|i}}{n}\right)}$$

6.5.4.2.4. Número máximo de cuotas a abonar en esta modalidad

Sabiendo que: $V_{\overline{n}|} = K(1 - r_d\ n)$ y para que efectivamente se reciba dinero en préstamo se debe cumplir que $1 - r_d\ n > 0$ (*) de donde $1 > r_d n \rightarrow \boxed{n < \frac{1}{r_d}}$

Conclusión: el número máximo de cuotas que se puede concertar por este procedimiento es menor a la inversa de la tasa directa (redondeado siempre por defecto). Se recuerda que es la misma restricción que existe en el número máximo de períodos que se puede aplicar el Descuento Comercial Simple (Capítulo II. Condición de Aplicabilidad de D_1).

También, de la desigualdad (*) $1 - r_d\ n > 0$ se puede encontrar la restricción de r_d dado el plazo del préstamo $1 > r_d n \rightarrow \boxed{r_d < \frac{1}{n}}$

Conclusión: la tasa directa por este procedimiento debe menor a la inversa del número de períodos en que se cancela el préstamo.

Ejemplo:

Suponiendo que se contrae un préstamo de $100.000.- en 20 cuotas mensuales y al 3% mensual directo con intereses descontados de la suma solicitada, calcular la suma efectivamente recibida, la cuota, la tasa efectiva sobre saldos que resulta y el número máximo de cuotas a abonar en este procedimiento.

$$V_{\overline{n}|} = K.(1 - r_d\ n) = 100.000(1 - 0,03x20) = \boxed{\$40.000.-}$$

Se solicitan $100.000.- pero efectivamente se reciben $40.000.-

$$C = \frac{K}{n} = \frac{100.000}{20} = \boxed{\$5.000.-}$$

$$C = V_{\overline{n}|}\, a^{-1}_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad a^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{5.000}{40.000} = 0,125$$ aplicando tanteo financiero

$$\boxed{i = 0,109298 \text{ mensual}}$$

Observando la tasa efectiva de costo se concluye que este procedimiento es mucho más costoso que el anterior.

Calcular el número máximo de cuotas a abonar en la financiación:

$n < \frac{1}{r_d} = \frac{1}{0,03} = 33,33$ $\boxed{\text{33 cuotas como máximo}}$ (se redonda por defecto)

6.5.4.2.5. Relación y Comparación entre ambas Tasas Directas

Considerando $V_{\overline{n|}} = \$1.-$ e igualando las cuotas de ambas modalidades:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{n(1-r_d \cdot n)} \\ C &= \frac{1}{n} + r_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n(1-r_d n)} = \frac{1}{n} + r_c \qquad (*)$$

+ Despejando r_c de (*)

$$r_c = \frac{1}{n(1-r_d n)} - \frac{1}{n} = \frac{1-(1-nr_d)}{n(1-r_d n)} \Rightarrow r_c = \frac{nr_d}{n(1-r_d n)} \text{ simplificando } n$$

$$\boxed{r_c = \frac{r_d}{1-r_d n}}$$

Comparación entre r_c y r_d

$$\begin{array}{l} r_d = r_d \\ 1 > 1 - r_d \cdot n \quad \text{dividiendo miembro a miembro} \\ \hline r_d < \dfrac{r_d}{1-r_d \cdot n} \end{array}$$

$$\boxed{r_d < r_c}$$

+ Despejando r_d de (*)

$$\frac{1}{n(1-r_d n)} = \frac{1+nr_c}{n}$$

$$(1-r_d n) = \frac{1}{1+nr_c}$$

$$1 - \frac{1}{1+nr_c} = r_d n$$

$$\frac{1+nr_c-1}{1+nr_c} = r_d n \quad \text{simplificando el 1 y luego la } n \text{ de los numeradores}$$

$$\boxed{r_d = \frac{r_c}{1+nr_c}}$$

Comparación entre r_c y r_d

$$\frac{\begin{array}{l} r_c = r_c \\ 1 < 1 + r_c \cdot n \end{array}}{r_c > \dfrac{r_c}{1 + r_c \cdot n}} \quad \text{dividiendo miembro a miembro}$$

$$\boxed{r_c > r_d}$$

Nuevamente se observa que r_d "miente más" y, por lo tanto, es más onerosa.

Aclaración:

Las relaciones y comparaciones entre r_c y r_d son las mismas a las vistas en el Capítulo II en el punto 2.4.4.7.1. cuando se relacionaron las tasas de interés y de descuento en régimen de interés simple. Se puede considerar que r_c es i_s (tasa de interés en régimen de interés simple) y r_d es d_s (tasa de descuento en régimen de interés simple).

Ejemplo: Si la tasa de interés sobre saldos es del 3% mensual y la deuda se cancela en 20 meses, determinar:

a) la tasa directa con intereses cargados.

$$r_c = a_{\overline{n}|i}^{-1} - \frac{1}{n} = \frac{0{,}03}{1 - 1{,}03^{-20}} - \frac{1}{20} = \boxed{0{,}017216 \text{ mensual}}$$

b) la tasa directa con intereses descontados

$$r_d = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a_{\overline{n}|i}}{n}\right) = \frac{1}{20}\left(1 - \frac{1 - 1{,}03^{-20}}{0{,}03x20}\right) = \boxed{0{,}012806 \text{ mensual}}$$

Se concluye que: $i > r_c > r_d$

Ambas tasas directas son menores a la tasa efectiva de interés. Ambas "mienten".

La tasa directa con intereses descontados es menor a la tasa directa con intereses cargados, por lo tanto, "miente más". Es más onerosa.

6.6. Incidencia del I.V.A. en los cuadros de amortización de préstamos

En los cuadros de amortización de préstamos se analizará cómo influye el Impuesto al Valor Agregado. Para ello, se agregará una nueva columna, separada de los intereses, para poder discriminar el IVA de los mismos. Se considerará el caso más general, aplicando la alícuota del 21% sobre los intereses.

6.6.1. Sistema Francés

Las entidades financieras aplican dos procedimientos distintos para calcular el I.V.A. en los préstamos otorgados por este sistema:

6.6.1.1. Con I.V.A. incluido en la cuota

En este caso, la cuota se calcula con la tasa activa del préstamo (i) cargándole la alícuota del 21% (i_{IVA}= 1,21. i). De esta forma se mantiene la característica de cuota constante del Sistema Francés aunque se paga más intereses y más I.V.A.

Ejemplo:

Préstamo = *Vn* = 20.000,00
Plazo: 12 Meses
Tasa de interés = 0,04 mensual
I.V.A. = 21% alícuota

Tasa de interés con IVA = 0,0484 mensual

C = 20.000x0,0484/(1-1,0484^(-12)) 2.236,19 mensual

Período k	D. Inicio (1)=(6)k-1	Interés (2)=(1)x0,04	I.V.A. (3)=(2)x0,21	Amort. (4)=C-(2)-(3)	Total Amort. (5)=Suma(4)	D.Subsist. (6) =(1)- (4)
1	20.000,00	800,00	168,00	1.268,19	1.268,19	18.731,81
2	18.731,81	749,27	157,35	1.329,57	2.597,76	17.402,24
3	17.402,24	696,09	146,18	1.393,92	3.991,69	16.008,31
4	16.008,31	640,33	134,47	1.461,39	5.453,08	14.546,92
5	14.546,92	581,88	122,19	1.532,12	6.985,20	13.014,80
6	13.014,80	520,59	109,32	1.606,28	8.591,47	11.408,53
7	11.408,53	456,34	95,83	1.684,02	10.275,49	9.724,51
8	9.724,51	388,98	81,69	1.765,53	12.041,02	7.958,98
9	7.958,98	318,36	66,86	1.850,98	13.891,99	6.108,01
10	6.108,01	244,32	51,31	1.940,56	15.832,56	4.167,44
11	4.167,44	166,70	35,01	2.034,49	17.867,04	2.132,96
12	2.132,96	85,32	17,92	2.132,96	20.000,00	0,00
		5.648,18	1.186,12			

6.6.1.2. Con I.V.A. excluido en la cuota

En este caso, la cuota se determina con la tasa activa (*i*) únicamente. El I.V.A. se calcula, a la alícuota del 21%, pero directamente sobre los intereses. De esta forma, la cuota periódica total es variable y decreciente, se pierde la característica del sistema. En los cuadros de amortización se observa que los totales de las columnas de intereses e I.V.A. son menores a los de la modalidad anterior.

Ejemplo:
Préstamo = 20.000,00
Plazo= 12 Meses
Tasa de interés = 0,04 mensual
I.V.A. 21% alícuota

C =20.000x0,04/(1-1,04^(-12))= 2.131,04 mensual

Período k	D. Inicio (1) = (6)k-1	Interés (2)=(1)0,04	I.V.A. (3)=(2)x0,21	Amort. (4)=C-(2)	Tot.Amort. (5)=Suma(4)	D.Subsist. (6) = (1)-(4)	C c/IVA (7)=C+(3)
1	20.000,00	800,00	168,00	1.331,04	1.331,04	18.668,96	2.299,04
2	18.668,96	746,76	156,82	1.384,29	2.715,33	17.284,67	2.287,86
3	17.284,67	691,39	145,19	1.439,66	4.154,99	15.845,01	2.276,23
4	15.845,01	633,80	133,10	1.497,24	5.652,23	14.347,77	2.264,14

5	14.347,77	573,91	120,52	1.557,13	7.209,36	12.790,64	2.251,56
6	12.790,64	511,63	107,44	1.619,42	8.828,78	11.171,22	2.238,48
7	11.171,22	446,85	93,84	1.684,19	10.512,97	9.487,03	2.224,88
8	9.487,03	379,48	79,69	1.751,56	12.264,54	7.735,46	2.210,73
9	7.735,46	309,42	64,98	1.821,62	14.086,16	5.913,84	2.196,02
10	5.913,84	236,55	49,68	1.894,49	15.980,65	4.019,35	2.180,72
11	4.019,35	160,77	33,76	1.970,27	17.950,92	2.049,08	2.164,81
12	2.049,08	81,96	17,21	2.049,08	20.000,00	0,00	2.148,26
		5.572,52	1.170,23				

6.6.2. Sistema Alemán

En los cuadros de amortización de este sistema se verá que el I.V.A. se calcula directamente sobre los intereses (única modalidad). La cuota total surge como suma de amortización, intereses e I.V.A.

Ejemplo:

Préstamo = V_n = 20.000,00
Plazo: 12 meses
Tasa de interés = 0,04 mensual
I.V.A. = 21% alícuota
Tasa interés con IVA = 0,0484 mensual
Amortización = t = 20.000 / 12 = 1.666,67 mensual

Per. k	D. Inicio (1) = $(6)_{k-1}$	Interés (2)=(1)x0,04	I.V.A. (3)=(2)x0,21	Cuota (4)=t+(2)+(3)	T.Amort. (5)=k x t	D.Subsist. (6)=(1)-t
1	20.000,00	800,00	168,00	2.634,67	1.666,67	18.333,33
2	18.333,33	733,33	154,00	2.554,00	3.333,33	16.666,67
3	16.666,67	666,67	140,00	2.473,33	5.000,00	15.000,00
4	15.000,00	600,00	126,00	2.392,67	6.666,67	13.333,33
5	13.333,33	533,33	112,00	2.312,00	8.333,33	11.666,67
6	11.666,67	466,67	98,00	2.231,33	10.000,00	10.000,00
7	10.000,00	400,00	84,00	2.150,67	11.666,67	8.333,33
8	8.333,33	333,33	70,00	2.070,00	13.333,33	6.666,67
9	6.666,67	266,67	56,00	1.989,33	15.000,00	5.000,00
10	5.000,00	200,00	42,00	1.908,67	16.666,67	3.333,33
11	3.333,33	133,33	28,00	1.828,00	18.333,33	1.666,67
12	1.666,67	66,67	14,00	1.747,33	20.000,00	0,00
		5.200,00	1.092,00			

6.7. Préstamos con tasa Variable o tasa Flotante

6.7.1. Sistema Francés

En este sistema, se debe re calcular la cuota en cada período en que la tasa varía (y la misma rige hasta el próximo cambio de tasa). Para su cálculo, se toma la deuda subsistente al momento del cambio de tasa, por los períodos que quedan para cancelar la deuda y a la nueva tasa.

Ejemplo:

Préstamo = 20.000,00

Plazo: 12 Meses

Período	Tasa
1 al 3	0,04
4 al 9	0,045
10 al 12	0,05

$C_1 = 20000\, a^{-1}_{\overline{12}|0{,}04} =$ 2.131,04

$C_2 = 15845{,}01\, a^{-1}_{\overline{9}|0{,}045} =$ 2.179,87

$C_3 = 5992{,}38\, a^{-1}_{\overline{3}|0{,}05} =$ 2.200,45

k	D. Inicio (1) = $(7)_{k-1}$	Tasa .(2)	Interés (3) =(1)x(2)	Cuota (4) (aparte)	Amort. (5)=(4)-(3)	Tot.Amort. (6)=Suma(5)	D.Subsist. (7) =(1)-(5)
1	20.000,00	0,040	800,00	2.131,04	1.331,04	1.331,04	18.668,96
2	18.668,96	0,040	746,76	2.131,04	1.384,29	2.715,33	17.284,67
3	17.284,67	0,040	691,39	2.131,04	1.439,66	4.154,99	15.845,01
4	15.845,01	0,045	713,03	2.179,87	1.466,84	5.621,83	14.378,17
5	14.378,17	0,045	647,02	2.179,87	1.532,85	7.154,68	12.845,32
6	12.845,32	0,045	578,04	2.179,87	1.601,83	8.756,51	11.243,49
7	11.243,49	0,045	505,96	2.179,87	1.673,91	10.430,42	9.569,58
8	9.569,58	0,045	430,63	2.179,87	1.749,24	12.179,66	7.820,34
9	7.820,34	0,045	351,92	2.179,87	1.827,95	14.007,62	5.992,38
10	5.992,38	0,050	299,62	2.200,45	1.900,84	15.908,45	4.091,55
11	4.091,55	0,050	204,58	2.200,45	1.995,88	17.904,33	2.095,67
12	2.095,67	0,050	104,78	2.200,45	2.095,67	20.000,00	0,00
			6.073,71				

6.7.2. Sistema Alemán

En este sistema, el cambio de tasa opera directamente sobre la deuda subsistente al momento de dicho cambio.

Préstamo = 20.000,00

Plazo: 12 meses

Período	Tasa
1 al 3	0,04
4 al 9	0,045
10 al 12	0,05

t = 1.666,67

Per. k	D. Inicio (1) = $(6)_{k-1}$	Tasa .(2)	Interés (3)=(1) x (2)	Cuota (4)=*t*+(2)+(3)	T.Amort. (5)=*k* x *t*	D.Subsist. (6)=(1)-*t*
1	20.000,00	0,040	800,00	2.466,67	1.666,67	18.333,33

2	18.333,33	0,040	733,33	2.400,00	3.333,33	16.666,67
3	16.666,67	0,040	666,67	2.333,33	5.000,00	15.000,00
4	15.000,00	0,045	675,00	2.341,67	6.666,67	13.333,33
5	13.333,33	0,045	600,00	2.266,67	8.333,33	11.666,67
6	11.666,67	0,045	525,00	2.191,67	10.000,00	10.000,00
7	10.000,00	0,045	450,00	2.116,67	11.666,67	8.333,33
8	8.333,33	0,045	375,00	2.041,67	13.333,33	6.666,67
9	6.666,67	0,045	300,00	1.966,67	15.000,00	5.000,00
10	5.000,00	0,050	250,00	1.916,67	16.666,67	3.333,33
11	3.333,33	0,050	166,67	1.833,33	18.333,33	1.666,67
12	1.666,67	0,050	83,33	1.750,00	20.000,00	0,00
			5.625,00			

6.8. Préstamos pactados con ajuste por Inflación

En períodos inflacionarios, las entidades financieras otorgan préstamos a tasa fija, donde los saldos de deuda se actualizan, periódicamente, por inflación.

Condiciones especiales

1° En estos cuadros se debe actualizar la deuda subsistente por la inflación periódica. Se recuerda que, en el Capítulo I, cuando se estudió la tasa de inflación φ_k, éste se calculó a partir de los índices inflacionarios considerando que:

$\boxed{I_k = I_{k-1}(1+\varphi_k)}$ donde

I_k es el índice inflacionario en el período k e

$I_{k\text{-}1}$ es el índice inflacionario en el período k-1

Por lo tanto el "coeficiente de ajuste inflacionario para el período k puede calcularse a través del cociente de los índices inflacionarios, o bien, considerando la tasa inflacionaria φ_k a saber:

$$\boxed{\textit{Coeficiente}\text{ de ajuste}_k = \frac{I_k}{I_{k-1}} = (1+\varphi_k)}$$

2° En los cuadros de amortización pactados con ajuste inflacionario no debe aparecer la columna del Total Amortizado ya que los saldos de deuda se ajustan por inflación y la suma de estos importes extemporáneos no tiene significado financiero.

6.8.1. Sistema Francés

3° En este sistema, se debe ajustar periódicamente por inflación tanto la deuda subsistente al final de cada período como la cuota periódica.

Préstamo = V_n =	20.000,00	
Plazo = n =	12	meses
Tasa de interés =	0,04	mensual
Cuota = 20000x0,04/(1 - 1,04^(-12))=	2.131,04	

Período	Tasa Inflac.
1 al 4	0,01
5 al 9	0,015
10 al 12	0,02

k	D. Inicio (1) = $(7)_{k-1}$	Coef. Infl. (2)	D Ajust. (3) =(1)x(2)	Interés (4)=(3)x0,04	Cuota Aj. (5)=C_{k-1}x(2)	Amort. (6)=(5)-(4)	D.Subsist. (7) =(3)-(6)
1	20.000,00	1,0100	20.200,00	808,00	2.152,35	1.344,35	18.855,65
2	18.855,65	1,0100	19.044,20	761,77	2.173,88	1.412,11	17.632,09
3	17.632,09	1,0100	17.808,41	712,34	2.195,62	1.483,28	16.325,13
4	16.325,13	1,0100	16.488,39	659,54	2.217,57	1.558,04	14.930,35
5	14.930,35	1,0150	15.154,30	606,17	2.250,84	1.644,66	13.509,64
6	13.509,64	1,0150	13.712,29	548,49	2.284,60	1.736,11	11.976,18
7	11.976,18	1,0150	12.155,82	486,23	2.318,87	1.832,63	10.323,19
8	10.323,19	1,0150	10.478,03	419,12	2.353,65	1.934,53	8.543,50
9	8.543,50	1,0150	8.671,66	346,87	2.388,96	2.042,09	6.629,57
10	6.629,57	1,0200	6.762,16	270,49	2.436,73	2.166,25	4.595,91
11	4.595,91	1,0200	4.687,83	187,51	2.485,47	2.297,96	2.389,87
12	2.389,87	1,0200	2.437,67	97,51	2.535,18	2.437,67	0,00
				5.904,03			

6.8.2. Sistema Alemán

4° En este sistema, se debe ajustar periódicamente por inflación tanto la deuda subsistente al final de cada período como la amortización periódica.

Préstamo = V_n =	20.000,00		
Plazo:	12	meses	
Tasa de interés =	0,04	0,04	mensual
Amort. inicial = t = 20.000 / 12 =		1.666,67	mensual

Período	Tasa Inflac.
1 al 4	0,01
5 al 9	0,015
10 al 12	0,02

Per. K	D. Inicio (1) = $(7)_{k-1}$	Coef. Infl. (2)	D. Ajust. (3)=(1)x (2)	Interés (4)=(3)x0,04	Amort.Ajust (5)=t_{k-1} x(2)	Cuota (6)=(4)+(5)	D.Subsist. (7) =(3)-(5)
1	20.000,00	1,0100	20.200,00	808,00	1.683,33	2.491,33	18.516,67
2	18.516,67	1,0100	18.701,83	748,07	1.700,17	2.448,24	17.001,67
3	17.001,67	1,0100	17.171,68	686,87	1.717,17	2.404,04	15.454,52
4	15.454,52	1,0100	15.609,06	624,36	1.734,34	2.358,70	13.874,72
5	13.874,72	1,0150	14.082,84	563,31	1.760,36	2.323,67	12.322,49
6	12.322,49	1,0150	12.507,32	500,29	1.786,76	2.287,05	10.720,56
7	10.720,56	1,0150	10.881,37	435,25	1.813,56	2.248,82	9.067,81
8	9.067,81	1,0150	9.203,83	368,15	1.840,77	2.208,92	7.363,06
9	7.363,06	1,0150	7.473,51	298,94	1.868,38	2.167,32	5.605,13
10	5.605,13	1,0200	5.717,23	228,69	1.905,74	2.134,43	3.811,49
11	3.811,49	1,0200	3.887,72	155,51	1.943,86	2.099,37	1.943,86
12	1.943,86	1,0200	1.982,74	79,31	1.982,74	2.062,05	0,00
				5.496,77			

6.9. Aplicaciones

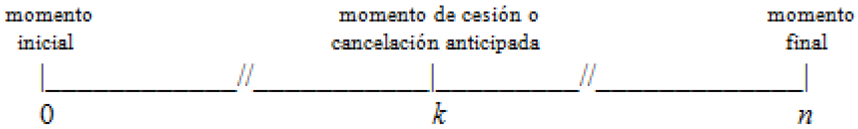
A continuación se presentan tres aplicaciones.

1) Como caso particular, la devolución de un préstamo y sus intereses se puede realizar con un único pago al final del plazo pactado, ya sea en régimen de interés simple o interés compuesto (una única prestación contra una única contraprestación). Las fórmulas son:

Régimen	Al final del período *n*
Interés Simple	$V_{n\rceil} = V_{0\rceil}(1+i_s n)$
Interés Compuesto	$V_{n\rceil} = V_{0\rceil}(1+i)^n$

2) A continuación se presenta el valor de cesión de un préstamo (donde cambia la titularidad del acreedor) al momento *k*, también llamado valor de cancelación anticipada del préstamo al momento k (donde el préstamo se salda íntegramente antes del plazo pactado), para los distintos sistemas de amortización de deudas estudiados en este curso (Cuadro I).

Considerando el siguiente gráfico temporal:



Se deben tener en cuenta dos aclaraciones:

a) en las fórmulas aparece una tasa de mercado (*i'*) con la que se actualiza la deuda al momento de cesión o cancelación anticipada *k*. Esta tasa, normalmente, es distinta a la tasa activa *i* a la que el préstamo ha sido pactado originalmente.

b) cuando la devolución del préstamo se realiza en cuotas (a partir del cuarto renglón del Cuadro I) el valor de las cuotas es el inicialmente pactado. Sin embargo, las cuotas aún no abonadas se deben actualizar a la tasa de mercado *i'* y por el plazo correspondiente.

Cuadro I: Valor de cesión de un préstamo al momento *k*

Sistema de amortización	Valor de cesión o cancelación anticipada al momento *k* (D_k)
Pago total único (amort. + ints) en régimen de interés simple	$D_k = \dfrac{V_{0\rceil}(1+i_s n)}{1+i_s'(n-k)}$
Pago total único (amort. + ints) en régimen de interés compuesto	$D_k = \dfrac{V_{0\rceil}(1+i)^n}{(1+i')^{n-k}}$
Pago periódico de intereses y pago único de amortización al final en R.I. Compuesto (*)	$D_k = V_{0\rceil}.i.a_{\overline{n-k}\rceil i'} + \dfrac{V_{0\rceil}}{(1+i')^{(n-k)}}$
Sistema Francés (cuotas constantes)	$D_k = C a_{\overline{n-k}\rceil i'}$

Sistema Alemán (cuotas decrecientes)	$D_k = \frac{C_{k+1}}{1+i'} + \frac{C_{k+2}}{\left(1+i'\right)^2} + \ldots + \frac{C_n}{\left(1+i'\right)^{n-k}}$
Sistema Americano Ídem (*)	$D_k = V_{\overline{n}\rceil}.i.a_{\overline{n-k}\rceil:i'} + \frac{V_{\overline{n}\rceil}}{(1+i')^{(n-k)}}$
Tasa Directa Con intereses cargados	$D_k = Ca_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \frac{K}{n} a_{\overline{n-k}\rceil:i'} = V_{\overline{n}\rceil}\left(\frac{1}{n}+r_c\right)a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$
Tasa Directa Con intereses descontados	$D_k = Ca_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \frac{K}{n} a_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \left(\frac{V_{\overline{n}\rceil}}{(1-nr_d)n}\right)a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$

Ejemplo:

Se tiene un préstamo de \$100.000.- a cancelar en un plazo de 12 meses al 3% mensual. Si inmediatamente después del período 8 se cancela anticipadamente la deuda subsistente en ese momento, calcular el valor de cancelación considerando una tasa del mercado del 4% mensual.

Sistema de amortización	Valor de cesión o cancelación anticipada al momento *k* (D_k)
Pago total único en régimen de interés simple	$D_8 = \frac{V_{\overline{0}\rceil}(1+i_s n)}{1+i_s'(n-k)} = \frac{100.000\left(1+0,03x12\right)}{1+0,04\left(12-8\right)} = \frac{136.000}{1,16} = \boxed{117.241,38}$
Pago total único en régimen de interés compuesto	$D_8 = \frac{V_{\overline{0}\rceil}\left(1+i\right)^n}{\left(1+i'\right)^{n-k}} = \frac{100.000x1,03^{12}}{1,04^{(12-8)}} = \frac{142.576,09}{1,04^4} = \boxed{121.874,64}$
Ints. Periódico + amort. al final en R.I. Compuesto (*)	$D_8 = V_{\overline{0}\rceil}.i.a_{\overline{n-k}\rceil:i'} + \frac{V_{\overline{0}\rceil}}{(1+i')^{(n-k)}} = 100.000x0,03xa_{\overline{4}\rceil:0,04} + \frac{100.000}{1,04^{(12-8)}}$ $D_8 = 10.889,69 + 85.480,42 = \boxed{96.370,10}$
Sistema Francés (cuotas constantes)	$C = V_{\overline{n}\rceil}a^{-1}_{\overline{n}\rceil:i} = 100.000x\frac{0,03}{1-1,03^{-12}} = 10.046,21$ $D_8 = Ca_{\overline{n-k}\rceil:i'} = 10.046,21\frac{1-1,04^{-4}}{0,04} = \boxed{36.466,68}$
Sistema Alemán (cuotas decrecientes)	$D_8 = \frac{C_9}{1+i'} + \frac{C_{10}}{\left(1+i'\right)^2} + \frac{C_{11}}{\left(1+i'\right)^3} + \frac{C_{12}}{\left(1+i'\right)^4}$ $D_8 = \frac{9.333,33}{1,04} + \frac{9.083,33}{1,04^2} + \frac{8.833,33}{1,04^3} + \frac{8.583,33}{1,04^4}$ $D_8 = 8.974,36 + 8.398,05 + 7.852,80 + 7.337,07 = \boxed{32.562,28}$
Sistema Americano Ídem (*)	$D_k = V_{\overline{n}\rceil}.i.a_{\overline{n-k}\rceil:i'} + \frac{V_{\overline{n}\rceil}}{(1+i')^{(n-k)}} = 100.000x0,03xa_{\overline{4}\rceil:0,04} + \frac{100.000}{1,04^4}$ $D_8 = 10.889,69 + 85.480,42 = \boxed{96.370,10}$

Tasa Directa Con intereses cargados	$D_k = Ca_{\overline{n-k}\rceil i'} = \frac{K}{n} a_{\overline{n-k}\rceil i'} = V_{\overline{n}\rceil}\left(\frac{1}{n} + r_c\right) a_{\overline{n-k}\rceil i'}$ $D_8 = 100.000\left(\frac{1}{12} + 0,03\right) a_{\overline{4}\rceil 0,04} = 11.333,33 a_{\overline{4}\rceil 0,04} = \boxed{41.138,81}$
Tasa Directa Con intereses descontados	$D_k = Ca_{\overline{n-k}\rceil i'} = \frac{K}{n} a_{\overline{n-k}\rceil i'}$ Se calcula el préstamo recibido: $V_{\overline{n}\rceil} = K\left(1 - nr_d\right) = 100.000\left(1 - 12x0,03\right) = 64.000$ luego $D_8 = \frac{100.000}{12} a_{\overline{4}\rceil 0,04} = 8.333,33 a_{\overline{4}\rceil 0,04} = \boxed{30.249,13}$

Observación: En caso de prever la cancelación anticipada de un préstamo conviene tomarlo por sistema Alemán ya que en las primeras cuotas hay mayor amortización de capital. Lo mismo sucede en caso de períodos inflacionarios. Recordar que en el caso de tasa directa con descuento de intereses el préstamo efectivamente recibido es menor al solicitado.

3) En el próximo Capítulo 7 Empréstitos y Obligaciones Negociables de este libro (punto 7.5.4) se desarrollará, en profundidad, el tema Usufructo y la Nuda Propiedad. En este capítulo se introducen estos conceptos para préstamos.

Nuda Propiedad y Usufructo de un préstamo a valor de mercado.

El valor de mercado de un préstamo ($V'_{\overline{n}\rceil}$) al momento de emisión (momento 0) puede expresarse como la suma de todas las cuotas actualizadas a la tasa de mercado i'.

$$V'_{\overline{n}\rceil} = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+i')^j} = \frac{C_1}{1+i'} + \frac{C_2}{(1+i')^2} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{(1+i')^n}$$

Expresando las cuotas como suma de amortización e intereses:

$$V'_{\overline{n}\rceil} = \frac{t_1 + I_1}{1+i'} + \frac{t_2 + I_2}{(1+i')^2} + \ldots + \frac{t_n + I_n}{(1+i')^n} = \frac{t_1}{1+i'} + \frac{t_2}{(1+i')^2} + \ldots + \frac{t_n}{(1+i')^n} + \frac{I_1}{1+i'} + \frac{I_2}{(1+i')^2} + \ldots + \frac{I_n}{(1+i')^n}$$

Donde $$\boxed{V'_{\overline{n}\rceil} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{(1+i')^j}}_{\text{Nuda Propiedad}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i')^j}}_{\text{Usufructo}}}$$

Definición: La Nuda Propiedad de un préstamo al momento de emisión es la suma de las amortizaciones reales futuras actualizadas al momento 0 a la tasa de mercado.

Definición: El Usufructo de un préstamo al momento de emisión es la suma de los intereses futuros actualizados al momento 0 a la tasa de mercado.

La tasa de actualización i' es la tasa de mercado que muy rara vez coincide con la tasa activa pactada en el préstamo. Es una tasa de mercado, que corresponde a operaciones de similar riesgo vigentes en el mercado financiero. Por ejemplo, si el préstamo fue emitido a largo plazo se utiliza una tasa de operaciones a largo plazo. Si fue emitido a corto plazo se utiliza una tasa de corto plazo.

En el Cuadro II se expresa la Nuda Propiedad y el Usufructo de una deuda a un momento *k* cualquiera y a la tasa de mercado *i'* para los sistemas de amortización estudiados. Se hace notar que la suma de ambas expresiones (Nuda Propiedad y Usufructo) debe dar el valor de cancelación anticipada D_k del Cuadro I.

Cuadro II: Nuda Propiedad y Usufructo

Sistema de amortización	Nuda Propiedad	Usufructo
Pago total único R. I. Simple	$NP_k = \dfrac{V_{\overline{0}\rceil}}{1+i'_s(n-k)}$	$U_k = \dfrac{V_{\overline{0}\rceil}.i.n}{1+i'_s(n-k)}$
Pago total único R. I. Compuesto	$NP_k = \dfrac{V_{\overline{0}\rceil}}{(1+i')^{(n-k)}}$	$U_k = \dfrac{V_{\overline{0}\rceil}\left[(1+i)^n-1\right]}{(1+i')^{(n-k)}}$
Ints Periódico y amort. al final. Ídem (*)	$NP_k = \dfrac{V_{\overline{0}\rceil}}{(1+i')^{(n-k)}}$	$U_k = V_{\overline{0}\rceil}.i.a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$
Sistema Francés	$NP_k = \dfrac{t_{k+1}}{1+i'} + \dfrac{t_{k+2}}{(1+i')^2}+\ldots+\dfrac{t_n}{(1+i')^{n-k}}$	$U_k = \dfrac{I_{k+1}}{1+i'} + \dfrac{I_{k+2}}{(1+i')^2}+\ldots+\dfrac{I_n}{(1+i')^{n-k}}$
Sistema Alemán	$NP_k = ta_{\overline{n-k}\rceil:i'}$	$U_k = \dfrac{I_{k+1}}{1+i'} + \dfrac{I_{k+2}}{(1+i')^2}+\ldots+\dfrac{I_n}{(1+i')^{n-k}}$
Sistema Americano Ídem (*)	$NP_k = \dfrac{V_{\overline{n}\rceil}}{(1+i')^{(n-k)}}$	$U_k = V_{\overline{n}\rceil}.i.a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$
Tasa Directa Con intereses cargados	$NP_k = ta_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \dfrac{V_{\overline{n}\rceil}}{n}a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$	$U_k = V_{\overline{n}\rceil}.r_c.a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$
Tasa Directa Con intereses descontados (**)	$NP_k = \dfrac{V_{\overline{n}\rceil}}{n}a_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \dfrac{K(1-r_dn)}{n}a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$	$U_k = K.r_d.a_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \left(\dfrac{V_{\overline{n}\rceil}}{1-r_dn}\right).r_d.a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$

Se demuestra que en (**) la suma de ambas columnas es el valor de cesión D_k

$$Np_k + U_k = \frac{V_{\overline{n}\rceil}}{n}a_{\overline{n-k}\rceil:i'} + Kr_d a_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \left[\frac{K(1-r_dn)}{n}+Kr_d\right]a_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \left[\frac{K-Kr_dn+Kr_dn}{n}\right]a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$$

$$Simplificando \quad \boxed{Np_k + U_k = \frac{K}{n}a_{\overline{n-k}\rceil:i'} = Ca_{\overline{n-k}\rceil:i'} = D_k}$$

Ejemplo:

Calcular el usufructo y la nuda propiedad para el préstamo del ejemplo anterior después de abonada la octava cuota.

Cuadro II: Nuda Propiedad y Usufructo

Sistema de amortización	Nuda Propiedad	Usufructo
Pago total único R. I. Simple	$NP_8 = \frac{100.000}{1+0,04x4} = \boxed{86.206,90}$	$U_8 = \frac{100.000x0,03x12}{1+0,04x4} = \boxed{31.034,48}$
Pago total único R. I. Compuesto	$NP_8 = \frac{100.000}{1,04^4} = \boxed{85.480,42}$	$U_8 = \frac{42.576,09}{1,04^4} = \boxed{36.394,22}$
Ints Periódico y amort. al final. Ídem (*)	$NP_8 = \frac{100.000}{1,04^4} = \boxed{85.480,42}$	$U_8 = 100.000x0,03xa_{\overline{4}\rceil;0,04} = \boxed{10.889,68}$
Sistema Francés	$NP_8 = \frac{8.925,93}{1,04} + \frac{9.193,71}{1,04^2} + \frac{9.469,52}{1,04^3} + \frac{9.753,60}{1,04^4} = \boxed{33.838,50}$	$U_8 = \frac{1.120,28}{1,04} + \frac{852,50}{1,04^2} + \frac{576,69}{1,04^3} + \frac{292,61}{1,04^4} = \boxed{2.628,18}$
Sistema Alemán	$NP_8 = 8.333,33a_{\overline{4}\rceil;0,04} = \boxed{30.249,13}$	$U_8 = \frac{1.000}{1,04} + \frac{750}{1,04^2} + \frac{500}{1,04^3} + \frac{250}{1,04^4}$ $U_8 = \boxed{2.313,15}$
Sistema Americano. Ídem (*)	$NP_8 = \frac{100.000}{1,04^4} = \boxed{85.480,42}$	$U_8 = 100.000x0,03xa_{\overline{4}\rceil;0,04} = \boxed{10.889,68}$
Tasa Directa Con intereses cargados	$NP_8 = \frac{100.000}{12} a_{\overline{4}\rceil;0,04} = \boxed{30.249,13}$	$U_8 = 100.000x0,03xa_{\overline{4}\rceil;0,04} = \boxed{10.889,68}$
Tasa Directa Con intereses descontados	$NP_8 = \frac{64.000}{12} a_{\overline{4}\rceil;i0,04} = \boxed{19.359,45}$	$U_8 = 100.000x0,03xa_{\overline{4}\rceil;0,04} = \boxed{10.889,68}$

Se verifica que la suma de ambas columnas es el valor de cancelación anticipada D_k (ver cuadro del ejemplo anterior).

6.10. EJERCITACIÓN CAPÍTULO VI

1.- Construir el cuadro de amortización de un préstamo contraído por el Sistema Francés de \$30.000.- a cancelar en 4 meses a la tasa del 1,50% mensual.

$$V_{\overline{n}|} = C a_{\overline{n}|i} \qquad C = V_{\overline{n}|} a_{\overline{n}|i}^{-1} = V_{\overline{n}|} \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 30.000 \frac{0,015}{1-1,015^{-4}} = \boxed{7.783,34}$$

	Cuota =	$ 7.783,34			
k	Deuda Inicio	Interés	Amort	Total amort.	Deuda final
	1	*2=1x0,015*	*3=C-2*	*4=suma 3*	*5=1-3*
1	30.000,00	450,00	7.333,34	7.333,34	22.666,66
2	22.666,66	340,00	7.443,34	14.776,69	15.223,31
3	15.223,31	228,35	7.554,99	22.331,68	7.668,32
4	7.668,32	115,02	7.668,32	30.000,00	-0,00
		1.133,37			

2.- Se contrae una deuda por \$20.000.- por el sistema de cuotas constantes al 2% bimestral con pago de cuotas bimestrales. Sabiendo que la última amortización representa el 10,91435% de la deuda original, calcular:

a) el número de períodos en el que se amortiza la deuda y

b) la cuota bimestral a abonar.

a) $t_n = 0,1091435 x V_{\overline{n}|}$

$$t(1+i)^{n-1} = 0,1091435 \; t \; s_{\overline{n}|i}$$

$$\frac{(1+i)^n}{(1+i)^1} = 0,1091435 \; \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{1,02^n}{1,02^1} = 0,1091435 \left(\frac{1,02^n - 1}{0,02}\right)$$

$$1,02^n = \frac{0,1091435}{0,02} 1,02 \; \left(1,02^n - 1\right)$$

$$1,02^n = \; 5,5663185 \; \left(1,02^n - 1\right)$$

$$1,02^n = \; 5,5663185 x 1,02^n - 5,5663185$$

$$5,5663185 = 5,5663185 x 1,02^n - 1,02^n$$

$$5,5663185 = 1,02^n x 4,5663185 \qquad 1,02^n = \frac{5,5663185}{4,5663185} = 1,2189948$$

aplicando logritmo $\boxed{n = 10 \text{ bimestres}}$

b) $V_{\overline{n}|} = C a_{\overline{n}|i} \qquad C = 20.000 \dfrac{0,02}{1-1,02^{-10}} \qquad \boxed{C = 2.226,53}$

3.- Se contrae una deuda por el sistema de amortizaciones progresivas de $30.000.- fijando una tasa de interés del 3% mensual y una tasa de amortización del 1,50%. Determinar:

a) el fondo amortizante,

b) el número de períodos en que se cancela la deuda. En caso de no resultar exacto el número de cuotas, reajustar el valor por defecto, calcular la cuota y re calcular la tasa de amortización y el fondo amortizante.

$a)$ $\tau =$ es el porcentaje de la deuda que se cancela con la primera amortización

$$\tau = \frac{t}{V_{\overline{n}|}} x100 \qquad t = \frac{V_{\overline{n}|}\ \tau}{100} \qquad t = \frac{30.000x1,50}{100} = \boxed{450.-}$$

b) $V_{\overline{n}|} = t\ s_{\overline{n}|i}$ $\qquad 30.000 = 450x\dfrac{1,03^{n}-1}{0,03} \qquad \boxed{n=37,1670 \text{ meses}}$

Tomando n=37 meses $\qquad V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i} \qquad C = 30.000\dfrac{0,03}{1-1,03^{-37}} = \boxed{1.353,35}$

Se recalcula: $\qquad 30.000 = t\ \dfrac{1,03^{37}-1}{0,03} \qquad \boxed{t=453,35}$

$$\tau = \frac{t}{V_{\overline{n}|}} x100 = \frac{453,35}{30.000} x100 = \boxed{1,511167\%}$$

4.- Se contrae una deuda de $14.000.- a 15 meses al 2,25% mensual por el Sistema Francés. Luego de abonadas 10 cuotas se resuelve disminuir la tasa de interés al 2% mensual y aumentar el plazo en 3 meses. Determinar la nueva cuota mensual vencida a abonar.

$$V_{\overline{n}|} = Ca_{\overline{n}|i} \qquad C = 14.000\frac{0,0225}{1-1,0225^{-15}} = 1.110,04$$

$$V_{\overline{n-k}|} = Ca_{\overline{n-k}|i} \qquad V_{\overline{15-10}|} = 1.110,04\frac{1-1,0225^{-5}}{0,0225} = 5.194,38 = V_{\overline{n'}|}$$

$$V_{\overline{n'}|} = C'a_{\overline{8}|i'} \qquad C' = 5.194,38\frac{0,02}{1-1,02^{-8}} = \boxed{709,08}$$

5.- Se contrae un préstamo a cancelar en 25 meses por el Sistema Francés y se conoce que en la cuota 15 el servicio de amortización resulta ser igual al servicio de interés. Determinar:

a) la tasa de interés del préstamo,

b) el período medio de reembolso y

c) la tasa de amortización.

a) $C_{15} = t_{15} + I_{15}$; $C_{15} = 2t_{15}$; $t(1+i)^{n} = 2\ t(1+i)^{k-1}$; $t(1+i)^{25} = 2\ t(1+i)^{14}$

$(1+i)^{11} = 2$ $\boxed{i\text{=0,065041 mensual}}$

b) $T_{\overline{pm|}} = \dfrac{V_{\overline{n|}}}{2}$; $ts_{\overline{pm|}:i} = \dfrac{ts_{\overline{n|}:i}}{2}$; $\dfrac{1{,}065041^{pm}-1}{0{,}065041} = \dfrac{1{,}065041^{25}-1}{2\text{x}0{,}065041}$

$1{,}065041^{pm} = \left(\dfrac{1{,}065041^{25}-1}{2}\right)+1$ aplicando logaritmo $pm = 16{,}98$ $\boxed{16<pm<17}$

c) $\tau = \dfrac{t}{V_{\overline{n|}}}x100 = \dfrac{t}{ts_{\overline{n|}:i}}x100 = 100\ s^{-1}_{\overline{n|}:i}$; $\tau = 100\dfrac{0{,}065041}{1{,}065041^{25}-1} = \boxed{1{,}697158\%}$

6.- Dado un préstamo de \$140.000.- por Sistema Francés a un año de plazo y a la tasa del 1,50% mensual, determinar:
a) la cuota mensual vencida,
b) la amortización real del décimo período,
c) el total de intereses abonados en las primeras 6 cuotas,
d) el total de intereses abonados en el préstamo,
e) el total amortizado en los 7 primeros períodos,
f) la deuda subsistente después de abonadas 3 cuotas,
g) la tasa de amortización y
h) el período medio de reembolso.

a) $V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}:i}$ $C = 140.000\dfrac{0{,}015}{1-1{,}015^{-12}} = \boxed{12.835{,}20}$

b) $t_k = t\ (1+i)^{k-1}$ $V_{\overline{n|}} = ts_{\overline{n|}:i}$ $140.000 = t\dfrac{1{,}015^{12}-1}{0{,}015}$ $t = 10.735{,}20$

$t_{10} = 10.735{,}20\ x\ 1{,}015^{9} = \boxed{12.274{,}52}$

c) $H_{\overline{k|}} = kC - T_{\overline{k|}}$ $T_{\overline{k|}} = ts_{\overline{k|}:i} = 10.735{,}20\dfrac{1{,}015^{6}-1}{0{,}015} = 66.875{,}48$

$H_{\overline{6|}} = 6x12.835{,}20 - 66.875{,}48 = \boxed{10.135{,}73}$

$d)$ $H_{\overline{12|}} = nC - V_{\overline{n|}} = 12x12.835{,}20 - 140.000 = \boxed{14.022{,}40}$

e) $T_{\overline{k|}} = ts_{\overline{k|}:i} = 10.735{,}20\dfrac{1{,}015^{7}-1}{0{,}015} = \boxed{78.613{,}81}$

f) $V_{\overline{n-k|}} = Ca_{\overline{n-k|}:i} = 12.835{,}20\dfrac{1-1{,}015^{-(12-3)}}{0{,}015} = \boxed{107.308{,}91}$

g) $\tau = 100s^{-1}_{\overline{n|}} = 100\dfrac{0{,}015}{1{,}015^{12}-1} = \boxed{7{,}6680\%}$ o bien $\tau = \dfrac{t}{V_{\overline{n|}}}100 = \dfrac{10.735{,}20}{140.000}100 = \boxed{7{,}6680\%}$

h) $T_{\overline{pm|}} = \dfrac{V_{\overline{n|}}}{2}$; $ts_{\overline{pm|}:i} = \dfrac{ts_{\overline{n|}:i}}{2}$; $\dfrac{1{,}015^{pm}-1}{0{,}015} = \dfrac{1{,}015^{12}-1}{2\text{x}0{,}015}$; $1{,}015^{pm} = \left(\dfrac{1{,}015^{12}-1}{2}\right)+1$

aplicando logaritmo $pm = 6{,}2676$ $\boxed{6 < pm < 7}$

7.- Se contrae una deuda de $30.000.- a 4 meses por el Sistema Alemán a amortizar al 1,50% mensual. Construir el cuadro de amortización.

	t =	7500			
k	Deuda Inicio	Interés	Cuota	Total amort.	Deuda final
	1	*2=1x0,015*	*3=t+2*	*4=k x t*	*5=1-t*
1	30.000,00	450,00	7.950,00	7.500,00	22.500,00
2	22.500,00	337,50	7.837,50	15.000,00	15.000,00
3	15.000,00	225,00	7.725,00	22.500,00	7.500,00
4	7.500,00	112,50	7.612,50	30.000,00	-
		1.125,00			

Si comparamos el total de intereses abonados por sistema Alemán ($1.125.-) y por sistema Francés (Ver ejercicio 1: $1.133,37) en el sistema Alemán se abonan menos intereses nominales. (Ver punto 6.3.11).

8.- Se contrae una deuda por el sistema de amortizaciones constantes que debe ser cancelado en 18 cuotas bimestrales al 5% bimestral, Sabiendo que la cuota 12 es de $1.350.-, determinar:
a) la deuda de origen y
b) si existe un período en el cual el servicio de interés se iguala con servicio de amortización.

$$a)\ C_k = t\left[1+\left(n-k+1\right)i\right] \qquad 1.350 = t\left[1+\left(18-12+1\right)0,05\right] \qquad t = 1.000.-$$

$$V_{\overline{n}|} = nt = 18x.1000 = \boxed{18.000.-}$$

$$b)\ I_k = t_k \qquad (n-k+1).t_k.i = t_k \qquad (18-k+1)\,\mathrm{x}\,0,05 = 1 \quad ; \quad (18-k+1) = \frac{1}{0,05} \quad ; \quad 18-k+1 = 20$$

$18+1-20=k \qquad k=-1$ absurdo. $\boxed{\text{No existe}}$ un período en que se igualan ambos servicios

Verificación: $I_1 = V_{\overline{n}|} x i = 18.000x0,05 = 900.-$ Como el interés del primer período es el mayor y es menor a la amortización, en ningún momento podrán igualarse ambos servicios.

9.- Se solicita un préstamo de $50.000.- por el Sistema Alemán a 10 meses y a la tasa del 1,30% mensual. Determinar:

a) la primera cuota mensual vencida,
b) la amortización real del décimo período,
c) el total de intereses abonados en las primeras 6 cuotas,
d) el total de intereses abonados en el préstamo,
e) el total amortizado en los 7 primeros períodos,
f) la deuda subsistente después de abonadas 3 cuotas,
g) la tasa de amortización y
h) el período medio de reembolso.

$a)\ C_k = t\left[1+\left(n-k+1\right)i\right] \qquad C_1 = \frac{50.000}{10}\left[1+\left(10-1+1\right)0,013\right] = \boxed{5.650.-}$

$b)\ t = \frac{V_{\overline{n}|}}{n} = \frac{50.000}{10} = \boxed{5.000.-}$ (son todas las amortizaciones iguales)

$c)\ H_{\overline{k}|} = tik\left(\frac{2n-k+1}{2}\right) = 5.000x0,013x6\left(\frac{2x10-6+1}{2}\right) = \boxed{2.925.-}$

$d)\ H_{\overline{n}|} = tin\left(\frac{n+1}{2}\right) = 5.000x0,013x10\left(\frac{10+1}{2}\right) = \boxed{3.575.-}$

e) $T_{\overline{k}|} = kt = 7x5.000 = \boxed{35.000.-}$

f) $V_{\overline{n-k}|} = (n-k)t = (10-3)x5.000 = \boxed{35.000.-}$

g) $\tau = \frac{t}{V_{\overline{n}|}}x100 = \frac{t}{nt}x100 = \frac{100}{10} = \boxed{10\%}$ (en todos los períodos se amortiza el 10% de la deuda)

h) $T_{\overline{pm}|} = \frac{V_{\overline{n}|}}{2} \qquad pm\ x\ t = \frac{nt}{2} \qquad \boxed{pm = \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5}$ la mitad de la deuda se cancela exactamente en la mitad del plazo de cancelación de la deuda.

10.- Tomamos un préstamo a ser cancelado en 24 meses con amortizaciones constantes. Si la cuota 12 es de \$ 1.325.- y la cuota 18 de \$ 1.175.-, determinar:

a) la tasa de interés mensual,

b) el importe del préstamo y

c) la suma total de intereses abonados.

$a)$ Igualamos las amortizaciones de ambas cuotas

$$t_{12} = t_{18} \quad ; \quad \frac{C_{12}}{1+\left(24-12+1\right)i} = \frac{C_{18}}{1+\left(24-18+1\right)i} \quad ; \quad \frac{1.325}{1+13xi} = \frac{1.175}{1+7xi} \quad ;$$

$$1.325\left(1+7xi\right) = 1.175\left(1+13xi\right) \quad \text{despejando} \quad \boxed{i = 0,025 \text{ mensual}}$$

$b)\ C_{12} = \frac{V_{\overline{n}|}}{n}\left[1+\left(24-12+1\right)0,025\right] \qquad 1.325 = \frac{V_{\overline{n}|}}{24}\left[1+\left(24-12+1\right)0,025\right] \qquad \boxed{V_{\overline{n}|} = 24.000.-}$

$c)\ H_{12} = tin\left(\frac{n+1}{2}\right) = 24.000x0,025\frac{25}{2} = \boxed{7.500.-}$

11.- Se solicita un préstamo de \$150.000.- a 20 meses a la tasa del 1,50% mensual. El deudor coloca los fondos de acumulación en otra institución que abona el 2% mensual. Determinar:

a) el interés pagado en cada período,

b) el total de intereses abonados en los primeros 4 períodos,

c) el total de intereses abonados,

d) el fondo de acumulación,

e) la cuota mensual vencida

f) el total de intereses ganados,

g) el total de intereses netos abonados,

h) la cuota que correspondería abonar en el Sistema Francés,

i) los intereses que se abonarían en el Sistema Francés y

j) la tasa real de costo del sistema Americano, por tanteo financiero e interpolación lineal cuando el error es menor a 0,001.

$a)\ I = V_{\overline{n|}}\ i = 150.000x0,015 = \boxed{2.250.-}$

$b)\ H_{\overline{4|}} = V_{\overline{n|}}\ i\ 4 = 150.000x0,015x4 = \boxed{9.000.-}$

$c)\ TIA{=}H_{\overline{n|}} = V_{\overline{n|}}\ x\ i\ x\ n = 150.000x0,015x20 = \boxed{45.000.-}$

d) $V_{\overline{n|}} = ts_{\overline{n|}i'}$ $\quad 150.000 = t\ \dfrac{1,02^{20}-1}{0,02}$ $\quad \boxed{t = 6.173,51}$

e) $C = I + t = 2.250 + 6.173,51 = \boxed{8.423,51}$

f) $TIG\ =\ V_{\overline{n|}} - nt = 150.000 - 20x6.173,51 = \boxed{26.529,80}$ (imposición)

g) $TIN = TIA - TIG = 45.000 - 26.529,80 = \boxed{18.470,20}$

$h)\ V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i}$ $\quad 150.000 = C\ \dfrac{1-1,015^{-20}}{0,015}$ $\quad \boxed{C{=}8.736,86}$ (mayor a la del sistema Americano)

i) $H_{\overline{n|}} = nC - V_{\overline{n|}} = 20x8.736,86 - 150.000 = \boxed{24.737,20}$ (mayor a los TIN del sistema Americano)

$j)\ V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i^*}$ $\quad 150.000 = 8.423,51xa_{\overline{20|}i*}$

$$\frac{8.423,51}{150.000} = 0,056157 = a^{-1}_{\overline{20|}i*} = \frac{i^*}{1-(1+i^*)^{-20}} = f_{(i*)}$$ función creciente

Tanteo financiero. Se obtiene

Para $i_a^{\ *} = 0,011$ $\quad f_{(i_a^{\ *})} = 0,055975$ como mi dato es $f_{(i^*)} = 0,056157$

Para $i_p^{\ *} = 0,012$ $\quad f_{(i_p^{\ *})} = 0,058246$ como mi dato es $f_{(i^*)} = 0,056157$

Como $f_{(i^*)} = 0,056157$ está entre $0,055975 < f_{(i^*)} < 0,058246$

Interpolación lineal :

$$\frac{i^*_I - i^*_a}{i^*_p - i^*_a} = \frac{f_{(i^*)} - f_{(i^*_a)}}{f_{(i^*_p)} - f_{(i^*_a)}} \qquad \frac{i^*_I - 0,011}{0,012-0,011} = \frac{0,056157-0,055975}{0,058246-0,055975}$$ y despejado

$$i^*_I = 0,011 + \frac{0,056157-0,055975}{0,058246-0,055975}(0,012-0,011) = \boxed{0,011323 \text{ mensual}}$$

Siendo $i < i'$ entonces $i* < i < i'$

12.- Se ha contraído una deuda de $90.000.- por el Sistema Americano. Los servicios de intereses mensuales han sido pactados al 2%. En la misma fecha, el deudor deposita sumas fijas en una institución que abona el 1,10% mensual. La cuota total es de $3.000.-. Determinar:

a) en cuántos períodos se cancela la deuda y

b) la tasa real de costo mensual que le resulta al deudor por tanteo financiero e interpolación lineal cuando el error es menor a 0,001.

$$a)\ C = V_{\overline{n|}}\left(i + s^{-1}_{\overline{n|}i'}\right) \qquad 3.000 = 90.000\left(0{,}02 + \frac{0{,}011}{1{,}011^{n} - 1}\right) \qquad \boxed{\text{n} = 55\ meses}$$

$$\text{b)}\ V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}i^*} \qquad 90.000 = 3.000xa_{\overline{55|}i^*}$$

$$\frac{3.000}{90.000} = 0{,}033333 = a^{-1}_{\overline{55|}i^*} = \frac{i^*}{1-(1+i^*)^{-55}} = f_{(i^*)} \quad \text{función creciente}$$

Tanteo financiero. Se obtiene

$$Para\ \ i_a^* = 0{,}024 \qquad f_{(i_a^*)} = 0{,}032937 \quad \text{como mi dato es} \quad f_{(i^*)} = 0{,}033333$$

$$Para\ \ i_p^* = 0{,}025 \qquad f_{(i_p^*)} = 0{,}033654 \quad \text{como mi dato es} \quad f_{(i^*)} = 0{,}033333$$

$$\text{Como} \quad f_{(i^*)} = 0{,}033333 \quad \text{está entre} \quad 0{,}032937 < f_{(i^*)} < 0{,}033654$$

Interpolación lineal:

$$\frac{i^*_I - i^*_a}{i^*_p - i^*_a} = \frac{f_{(i^*)} - f_{(i^*_a)}}{f_{(i^*_p)} - f_{(i^*_a)}} \qquad \frac{i_I - 0{,}024}{0{,}025 - 0{,}024} = \frac{0{,}033333 - 0{,}032937}{0{,}033654 - 0{,}032937} \qquad \text{y despejando}$$

$$i_I = 0{,}024 + \frac{0{,}033333 - 0{,}032937}{0{,}033654 - 0{,}032937}(0{,}025 - 0{,}024) = \boxed{0{,}024552\ \text{mensual}}$$

$$\text{Siendo} \quad i' < i \quad \text{entonces} \quad i' < i < i^*$$

13.- En un préstamo de $60.000.- concertado por el sistema de amortizaciones constantes a la tasa del 2% mensual, la cuota 15 es de $ 3.360.-. Luego del pago de dicha cuota se convierte el préstamo al sistema de cuotas constantes, sin modificar la tasa de interés ni la duración. ¿Cuál será el importe de la nueva cuota?

Para calcular la cuota del Sistema Francés se debe calcular la deuda subsistente del sistema Alemán.

1º Cálculo del plazo de cancelación en el sistema Alemán

$$C_k = t\left[1+\left(n-k+1\right)i\right] \qquad C_{15} = \frac{60.000}{n}\left[1+\left(n-15+1\right)0,02\right] = 3.360.-$$

$$3.360 = \frac{60.000}{n}\left[1+\left(n-14\right)0,02\right] \qquad 3.360n = 60.000\left[1+\left(n-14\right)0,02\right]$$

$$3.360n = 60.000 + 60.000xnx0,02 - 60.000x14x0,02 \qquad 2.160n = 43.200$$

$n = 20$ *meses*

2º Cálculo de la deuda subsistente del sistema Alemán que es la deuda del sistema Francés

$t = 60.000 / 20 = 3.000$

$$V_{\overline{n-k|}Alemán} = (n-k)t = (20-15)\text{ x }3.000 = 15.000 = V_{\overline{5|}Francés}$$

$$V_{\overline{5|}Francés} = Ca_{\overline{n|}:i} \qquad C = 15.000\frac{0,02}{1-1,02^{-5}} \qquad \boxed{C = 3.182,38}$$

14.- Se recibió un préstamo de \$30.000.- por el sistema de cuotas constantes al 3,75% bimestral en 20 bimestres. Transcurridos 12 períodos y después de pagar la cuota de ese orden, se decide convertir el préstamo al sistema de amortizaciones constantes prorrogando el plazo en 2 períodos y aumentando la tasa al 4%. Determinar:

a) la cuota inicial bimestral vencida,
b) la primera cuota que se abona luego de la conversión y
c) la última cuota que se abona luego de la conversión.

$$a)\ V_{\overline{n|}} = Ca_{\overline{n|}:i} \qquad C = 30.000\frac{0,0375}{1-1,0375^{-20}} \qquad \boxed{C = 2.158,86}$$

$$b)\ V_{\overline{n-k|}Francés} = Ca_{\overline{n-k|}:i} \qquad V_{\overline{20-12|}} = 2.158,86\frac{1-1,0375^{-8}}{0,0375} = 14.686,30 = V_{\overline{10|}Alemán}$$

$$C_k = \frac{V_{\overline{10|}Alemán}}{n}\left[1+\left(n-k+1\right)i\right] \qquad C_1 = \frac{14.686,30}{10}\left[1+\left(10-1+1\right)0,04\right]$$

$$\boxed{C_1 = 2.056,08}$$

$$c)\ C_{10} = \frac{14.686,30}{10}\left[1+\left(10-10+1\right)0,04\right] = \boxed{1.527,38}$$

15.-Un préstamo de \$200.000.- se pacta por el Sistema Americano a la tasa de interés del 1,80% mensual y con cuotas del fondo de acumulación al 1,20% durante 10 períodos. Luego del depósito del 4° fondo de acumulación se convierte el préstamo al Sistema Francés sin alterar la tasa de interés y prorrogando el plazo en 2 meses. Además, se conviene con el acreedor que con el total acumulado hasta ese momento se efectúa un pago reduciendo el saldo de la deuda. Determinar:

a) la cuota inicial vencida,

b) la nueva cuota que debe abonar el deudor después de la conversión

c) el total de intereses abonados y

d) el total de intereses netos abonados.

$$a)\ C = V_{\overline{n}|}\left(i + s^{-1}_{\overline{n}|i'}\right) \qquad C = 200.000\left(0{,}018 + \frac{0{,}012}{1{,}012^{10}-1}\right) = \boxed{22.543{,}61}$$

$b)$ 1º Cálculo del fondo de acumulación

$$t = C - I = 22.543{,}61 - 200.000x0{,}018 = 18.943{,}61$$

2º Cálculo del ahorro de los 4 fondos de acumulación = pago extraordinario

$$T_{\overline{4}|} = t.s_{\overline{4}|i'} = 18.943{,}61\frac{1{,}012^{4}-1}{0{,}012} = 77.149{,}34$$

3º Cálculo de la deuda subsistente a abonar por el sistema Francés

$$V_{\overline{8}|Francés} = 200.000 - 77.149{,}34 = 122.850{,}66$$

4º Cálculo de la cuota del sistema Francés

$$C_{Francés} = 122.850{,}66\frac{0{,}018}{1-1{,}018^{-8}} = \boxed{16.626{,}08}$$

$$c)\ \text{TIA=TIA}_{Americano} + H_{\overline{n}|Francés}$$

$$\text{TIA=V}_{\overline{n}|Americano}.i.4 + nC - V_{\overline{n}|Francés}$$

$$\text{TIA=}\left(200.000x0{,}018x4\right) + \left(8x16.626{,}08 - 122.850{,}66\right)$$

$$\text{TIA=}14.400{,}00 + 10.157{,}94 = \boxed{24.557{,}94}$$

$$\text{d)}\quad \text{TIANetos=TIN}_{Americano} + H_{\overline{n}|Francés}$$

$$\text{TIANetos=}\left(\text{TIA} - \text{TIG}\right) + H_{\overline{n}|Francés}$$

Calculamos los $\text{TIG=T}_{\overline{4}|} - 4.t = 77.149{,}34 - 4x18.943{,}61 = 1.374{,}88$

$$\text{TIANetos=}\left(14.400{,}00 - 1.374{,}88\right) + 10.157{,}94 = \boxed{23.183{,}06}$$

16.- Se solicita un préstamo de $42.000.- a la tasa directa del 2% mensual en 10 meses. Determinar la cuota y la tasa efectiva de costo mensual en los siguientes casos:

a) cargando los intereses al préstamo y

b) descontando los intereses del préstamo.

a) $C=\dfrac{K}{n}=V_{\overline{n|}}\left(r_c+\dfrac{1}{n}\right)=42.000\left(0,02+\dfrac{1}{10}\right)=\boxed{5.040}$

$V_{\overline{n|}}=C a_{\overline{n|}:i}$ $\quad$ $42.000=5.040 x a_{\overline{10|}:i}$ $\quad$ $\dfrac{5.040}{42.000}=0,12=a^{-1}_{\overline{10|}:i}=\dfrac{i}{1-(1+i)^{-10}}=f_{(i)}$ función creciente

Tanteo financiero. Se obtiene

$Para \quad i_a=0,034 \quad f_{(i_a)}=0,119636$ como mi dato es $f_{(i)}=0,12$

$Para \quad i_p=0,035 \quad f_{(i_p)}=0,120241$ como mi dato es $f_{(i)}=0,12$

Como $\quad f_{(i\ )}=0,12$ está entre $\quad 0,119636<f_{(i)}<0,120241$

Interpolación lineal :

$$\frac{i_I-i_a}{i_p-i_a}=\frac{f_{(i)}-f_{(i_a)}}{f_{(i_p)}-f_{(i_a)}} \qquad \frac{i_I-0,034}{0,035-0,034}=\frac{0,12-0,119636}{0,120241-0,119636} \quad \text{y despejando}$$

$$i_I=0,034+\frac{0,12-0,119636}{0,120241-0,119636}(0,035-0,034)=\boxed{0,034602\text{ mensual}}$$

b) $C=\dfrac{K}{n}=\dfrac{42.000}{10}=\boxed{4.200.-}$ $\qquad V_{\overline{n|}}=K\left(1-r_d n\right)=42.000\left(1-0,02x10\right)=33.600.-$

$V_{\overline{n|}}=C a_{\overline{n|}:i}$ $\quad$ $33.600=4.200 x a_{\overline{10|}:i}$

$\dfrac{4.200}{33.600}=0,125=a^{-1}_{\overline{10|}:i}=\dfrac{i}{1-(1+i)^{-10}}=f_{(i)}$ función creciente

Tanteo financiero. Se obtiene

$Para \quad i_a=0,042 \quad f_{(i_a)}=0,124522$ como mi dato es $f_{(i)}=0,125$

$Para \quad i_p=0,043 \quad f_{(i_p)}=0,125139$ como mi dato es $f_{(i)}=0,125$

Como $\quad f_{(i)}=0,125$ está entre $\quad 0,124522<f_{(i)}<0,125139$

Interpolación lineal :

$$\frac{i_I-i_a}{i_p-i_a}=\frac{f_{(i)}-f_{(i_a)}}{f_{(i_p)}-f_{(i_a)}} \qquad \frac{i_I-0,042}{0,043-0,042}=\frac{0,125-0,124522}{0,125139-0,124522} \quad \text{y despejando}$$

$$i_I=0,042+\frac{0,125-0,124522}{0,125139-0,124522}(0,043-0,042)=\boxed{0,042775\text{ mensual}}$$

17.- Se solicitó un préstamo de \$10.000.- por el procedimiento de tasa directa con descuento anticipado de intereses a cancelar en 10 cuotas vencidas, obteniéndose un neto de \$7.900.-. Determinar:

a) la tasa directa mensual,

b) la suma que debió solicitarse para recibir efectivamente \$10.000.-

c) el número máximo de cuotas en este sistema y

d) la tasa efectiva mensual de costo que le resulta al deudor.

a) $V_{\overline{n}|} = 7.900.-$ $\quad K$=10.000.-

$V_{\overline{n}|} = K\left(1 - r_d n\right) \qquad 7.900 = 10.000\left(1 - r_d .10\right) \qquad \boxed{r_d = 0,021 \text{ mensual}}$

b) $V_{\overline{n}|} = K\left(1 - r_d n\right) \qquad 10.000 = K\left(1 - 0,021x10\right) \qquad \boxed{K = 12.658,23}$

$c)$ $\left(1 - r_d n\right) > 0 \qquad n < \dfrac{1}{r_d} = \dfrac{1}{0,021} = 47,6190 \qquad \boxed{n < 47 \text{ cuotas}}$

d) $V_{\overline{n}|} = C a_{\overline{n}|:i} \qquad 7.900 = 1.000 x a_{\overline{10}|:i}$

$$\frac{1.000}{7.900} = 0,126582 = a^{-1}_{\overline{10}|:i} = \frac{i}{1-(1+i)^{-10}} = f_{(i)} \quad \text{función creciente}$$

Tanteo financiero. Se obtiene:

Para $i_a = 0,045 \qquad f_{(i_a)} = 0,126379$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,126582$

Para $i_p = 0,046 \qquad f_{(i_p)} = 0,127001$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,126582$

Como $f_{(i)} = 0,126582$ está entre $0,126379 < f_{(i)} < 0,127001$

Interpolación lineal :

$$\frac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}} \qquad \frac{i_I - 0,045}{0,046 - 0,045} = \frac{0,126582 - 0,126379}{0,127001 - 0,126379} \qquad \text{y despejando}$$

$$i_I = 0,045 + \frac{0,126582 - 0,126379}{0,127001 - 0,126379}(0,046 - 0,045) = \boxed{0,045326 \text{ mensual}}$$

18.- Se compra una heladera cuyo precio de contado es de \$25.000.-. Se ofrece pagar la misma abonando 20 cuotas mensuales adelantadas de \$2.000.- abonando la primera de ellas en el momento de retirarla. Calcular:

a) la tasa directa mensual aplicada,

b) la deuda efectivamente financiada y

c) la tasa efectiva mensual de costo a abonar por el deudor.

a) $V_{\overline{n|}} = 23.000$ $\quad K = 19x2.000 = 38.000$ $\quad$ Se toman 19 cuotas porque son adelantadas

$38.000 = 23.000\left(1 + r_c x19\right)$ $\quad \boxed{r_c = 0,034325 \text{ mensual}}$

b) $\boxed{V_{\overline{n|}} = 23.000}$ ya que la primera cuota adelantada de $2.000.- debe descontarse

c) $V_{\overline{n|}} = C a_{\overline{n|}:i}$ $\quad 23.000 = 2.000 x a_{\overline{19|}:i}$

$$\frac{2.000}{23.000} = 0,086957 = a^{-1}_{\overline{19|}:i} = \frac{i}{1-(1+i)^{-19}} = f_{(i)} \quad \text{función creciente}$$

Tanteo financiero. Se obtiene

Para $i_a = 0,056$ $\quad f_{(i_a)} = 0,086839$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,086957$

Para $i_p = 0,057$ $\quad f_{(i_p)} = 0,087531$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,086957$

Como $f_{(i)} = 0,086957$ está entre $0,086839 < f_{(i)} < 0,087531$

Interpolación lineal:

$$\frac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}} \qquad \frac{i_I - 0,056}{0,057 - 0,056} = \frac{0,086957 - 0,086839}{0,087531 - 0,086839}$$

$$i_I = 0,056 + \frac{0,086957 - 0,086839}{0,087531 - 0,086839}(0,057 - 0,056) = \boxed{0,056171 \text{ mensual}}$$

19.- Un préstamo se financia a 12 meses mediante el pago de cuotas constantes vencidas aplicando tasa directa del 3% mensual sin descuento anticipado de intereses. Calcular:

a) la tasa efectiva mensual por tanteo financiero e interpolación lineal cuando el error es menor a 0,001.

b) la tasa directa con descuento anticipado de intereses que debió aplicarse para que el préstamo resultase equivalente (igual tasa efectiva).

a) $a^{-1}_{\overline{n|}:i} = r_c + \dfrac{1}{n}$ $\quad a^{-1}_{\overline{12|}:i} = 0,03 + \dfrac{1}{12} = 0,113333 = \dfrac{i}{1-(1+i)^{-12}} = f_{(i)}$ $\quad$ función creciente

Tanteo financiero. Se obtiene

Para $i_a = 0,050$ $\quad f_{(i_a)} = 0,112825$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,113333$

Para $i_p = 0,051$ $\quad f_{(i_p)} = 0,113463$ como mi dato es $f_{(i)} = 0,113333$

Como $f_{(i)} = 0,113333$ está entre $0,112825 < f_{(i)} < 0,113463$

Interpolación lineal:

$$\frac{i_I - i_a}{i_p - i_a} = \frac{f_{(i)} - f_{(i_a)}}{f_{(i_p)} - f_{(i_a)}} \qquad \frac{i_I - 0,050}{0,051 - 0,050} = \frac{0,113333 - 0,112825}{0,113463 - 0,112825} \qquad \text{y despejando}$$

$$i_I = 0,050 + \frac{0,113333 - 0,112825}{0,113463 - 0,112825}(0,051 - 0,050) = \boxed{0,050796 \text{ mensual}}$$

b) $r_c + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\left(1 - r_d.n\right)n}$ $\qquad 0,03 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{\left(1 - r_d.12\right)12}$

despejando $\boxed{r_d = 0,022059 \text{ mensual}}$

20.- Construir el cuadro de amortización de un préstamo de $100.000.- a cancelar en 5 cuotas mensuales por el Sistema Francés al 2% mensual con IVA incluido dentro de la cuota, sobre los intereses, a la alícuota del 21%.

Como el IVA debe incluirse en la cuota mensual a la tasa de interés del 2% se le recarga el 21% de IVA a la tasa. La tasa con la cual se calcula la cuota es:

$$i_{conIVA} = i_{\sin IVA} x1,21 = 0,0242 \text{ mensual}$$

	Cuota =	21.475,14				
Per	Deuda Inicio	Interes	IVA	Amort.	Total Amort.	Deuda final
	1	*2=1x0,02*	*3=2x0,21*	*4=C-2-3*	*5=suma 4*	*6=1-4*
1	100.000,00	2.000,00	420,00	19.055,14	19.055,14	80.944,86
2	80.944,86	1.618,90	339,97	19.516,28	38.571,42	61.428,58
3	61.428,58	1.228,57	258,00	19.988,57	58.559,99	41.440,01
4	41.440,01	828,80	174,05	20.472,29	79.032,28	20.967,72
5	20.967,72	419,35	88,06	20.967,72	100.000,00	-0,00
		6.095,62	1.280,08			

21.- Construir el cuadro de amortización de un préstamo de $100.000.- a cancelar en 5 cuotas mensuales por el Sistema Francés al 2% mensual con IVA excluido de la cuota, sobre los intereses, a la alícuota del 21%.

Como el IVA no se incluye en la cuota mensual, la cuota se calcula con la tasa del 2% (resulta menor a la anterior porque no incluye el IVA). El IVA se calcula sobre los intereses.

	Cuota =	$ 21.215,84					
Per	Deuda Inicio	Interes	IVA	Amort.	Total Amort.	Deuda final	Cuota total
	1	*2=1x0,02*	*3=2x0,21*	*4=C-2*	*5=suma 4*	*6=1-4*	*7=C+3*
1	100.000,00	2.000,00	420,00	19.215,84	19.215,84	80.784,16	21.635,84
2	80.784,16	1.615,68	339,29	19.600,16	38.816,00	61.184,00	21.555,13
3	61.184,00	1.223,68	256,97	19.992,16	58.808,15	41.191,85	21.472,81
4	41.191,85	823,84	173,01	20.392,00	79.200,16	20.799,84	21.388,85
5	20.799,84	416,00	87,36	20.799,84	100.000,00	-	21.303,20
		6.079,20	1.276,63				

Comparando este ejercicio y el anterior se concluye que cuando se incluye el IVA en la cuota se pagan más intereses e IVA. Esto se debe a que se abonan intereses e IVA sobre el IVA. La forma correcta de construir el cuadro es con IVA excluido de la cuota, aunque se pierde la caraterística del sistema Francés de cuota constante (ver columna 7 en este ejercicio)

22.- Con los datos del ejercicio anterior construir el cuadro de amortización por el Sistema Alemán con IVA, sobre los intereses, a la alícuota del 21%.

	Amortización	$ 20.000,00				
Per	Deuda Inicio	Interes	IVA	Cuota	Total Amort.	Deuda final
	1	*2=1x0,02*	*3=2x0,21*	*4=t+2+3*	*5= k.t*	*6= 1 - t*
1	100.000,00	2.000,00	420,00	22.420,00	20.000,00	80.000,00
2	80.000,00	1.600,00	336,00	21.936,00	40.000,00	60.000,00
3	60.000,00	1.200,00	252,00	21.452,00	60.000,00	40.000,00
4	40.000,00	800,00	168,00	20.968,00	80.000,00	20.000,00
5	20.000,00	400,00	84,00	20.484,00	100.000,00	-
		6.000,00	1.260,00			

23.- Se concede un préstamo de $150.000.- que se cancela en un año por el Sistema Francés con tasa variable (flotante) y cuotas trimestrales vencidas. Construir el cuadro de amortización con reformulación del préstamo al final de cada período (sustitución del préstamo original por la deuda subsistente, por un período menos y a la nueva tasa).

Período	Tasa trimestral
1	3
2	3,50
3	2,50
4	2,75

$$C_1 = 150.000 \frac{0,03}{1-1,03^{-4}} = 40.354,06$$

Per	Deuda Inicio	Tasa	Interes	Cuota	Amort.	Total Amort.	Deuda final
k	*1*	*2*	*3=1x2*	*4*	*5=Ck-3*	*6=suma 5*	*7=1-5*
1	150.000,00	0,0300	4.500,00	$ 40.354,06	35.854,06	35.854,06	114.145,94
2	114.145,94	0,0350	3.995,11	$ 40.742,59	36.747,48	72.601,54	77.398,46
3	77.398,46	0,0250	1.934,96	$ 40.156,42	38.221,46	110.823,00	39.177,00
4	39.177,00	0,0275	1.077,37	$ 40.254,37	39.177,00	150.000,00	0,00
			11.507,44				

$$C_2 = 114.145,94 \frac{0,035}{1-1,035^{-3}} = 40.742,59$$

$$C_3 = 77.398,46 \frac{0,025}{1-1,025^{-2}} = 40.156,42$$

$$C_4 = 39.177,00 \frac{0,0275}{1-1,0275^{-1}} = 40.254,37$$

24.- Con los datos del ejercicio anterior, construir el cuadro de amortización en el caso de pactarse por el Sistema Alemán.

		t =	37.500,00			
Per	Deuda Inicio	Tasa	Interes	Cuota	Total Amort.	Deuda final
k	1	2	3=1x2	4=t+3	5=k.t	6=1-t
1	150.000,00	0,0300	4.500,00	42.000,00	37.500,00	112.500,00
2	112.500,00	0,0350	3.937,50	41.437,50	75.000,00	75.000,00
3	75.000,00	0,0250	1.875,00	39.375,00	112.500,00	37.500,00
4	37.500,00	0,0275	1.031,25	38.531,25	150.000,00	-
			11.343,75			

25.- Se contrajo un préstamo de $70.000.- a devolver en 4 cuatrimestres por el Sistema Francés y con cláusula de ajuste por inflación, a la tasa del 4,40% cuatrimestral. La primera cuota venció el 15/08/X1 y para el ajuste se utilizaron los Índices de Precios al Consumidor Nivel General con un mes de antelación al vencimiento de cada cuota. Se requiere la construcción del cuadro de amortización, siendo los siguientes índices:

Marzo/X1	260,17
Julio/X1	271,99
Noviembre/X1	283,75
Marzo/X2	291,19
Julio/X2	301,13

Cálculo de los Coeficientes de Ajuste (CA_j) por Inflación:

Recordar que $I_1 = I_0(1+\rho)$ entonces $\frac{I_1}{I_0} = (1+\rho) = \text{Coeficiente de Ajuste}$

$$CA_1 = \frac{271,99}{260,17} = 1,045432$$

$$CA_2 = \frac{283,75}{271,99} = 1,043237$$

$$CA_3 = \frac{291,19}{283,75} = 1,026220$$

$$CA_4 = \frac{301,13}{291,19} = 1,034136$$

		C =	$ 19.466,42				
Per	Deuda Inicio	Coef. Ajuste	Deuda Aj.	Interés	Cuota Aj.	Amort.	Deuda final
k	1	2	3=1x2	4=3x0,044	5=C k-1 x 2	6=5-4	7=3-6
1	70.000,00	1,045432	73.180,23	3.219,93	20.350,82	17.130,89	56.049,34
2	56.049,34	1,043237	58.472,74	2.572,80	21.230,72	18.657,92	39.814,82
3	39.814,82	1,026220	40.858,77	1.797,79	21.787,40	19.989,61	20.869,16
4	20.869,16	1,034136	21.581,54	949,59	22.531,13	21.581,54	0,00

Cuando existe ajuste por inflación no se calcula el total amortizado ya que suma valores monetarios de distinto valor real.

26.- Con los datos del ejercicio anterior, construir el cuadro de amortización en el caso de pactarse por el Sistema Alemán.

		t =	17.500,00				
Per	Deuda Inicio	Coef. Ajuste	Deuda Aj.	Interés	Amort. Aj.	Cuota	Deuda final
k	*1*	*2*	*3=1x2*	*4=3x0,044*	*5=t k-1 x 2*	*6=4+5*	*7=3-5*
1	70.000,00	1,045432	73.180,23	3.219,93	18.295,06	21.514,99	54.885,17
2	54.885,17	1,043237	57.258,24	2.519,36	19.086,08	21.605,44	38.172,16
3	38.172,16	1,026220	39.173,04	1.723,61	19.586,52	21.310,13	19.586,52
4	19.586,52	1,034136	20.255,12	891,23	20.255,12	21.146,35	-

27- Calcular el valor de cancelación anticipada, la nuda propiedad y el usufructo, después de abonada la segunda cuota, de los préstamos de los ejercicios 1, 7, 12 y 16 considerando que la tasa vigente en el mercado es del 3% mensual.

Ejerc.	Sistema	Fórmula	Solución
1	Francés	$D_k = Ca_{\overline{n-k\rceil}i'}$ $NP_k = \dfrac{t_3}{1+i'} + \dfrac{t_4}{(1+i')^2}$ $U_k = \dfrac{I_3}{1+i'} + \dfrac{I_4}{(1+i')^2}$	$D_2 = 7.783,34\dfrac{1-1,03^{-2}}{0,03} = \boxed{14.893,19}$ $NP_2 = \dfrac{7.554,99}{1,03} + \dfrac{7.668,32}{1,03^2} = \boxed{14.563,07}$ $U_2 = \dfrac{228,35}{1,03} + \dfrac{115,02}{1,03^2} = \boxed{330,12}$
7	Alemán	$D_k = \dfrac{C_3}{1+i'} + \dfrac{C_4}{(1+i')^2}$ $NP_k = ta_{\overline{n-k\rceil}i'}$ $U_k = \dfrac{I_3}{1+i'} + \dfrac{I_4}{(1+i')^2}$	$D_2 = \dfrac{7.725}{1,03} + \dfrac{7.612,50}{1,03^2} = \boxed{14.675,51}$ $NP_2 = 7.500\dfrac{1-1,03^{-2}}{0,03} = \boxed{14.351,02}$ $U_2 = \dfrac{225}{1,03} + \dfrac{112,50}{1,03^2} = \boxed{324,49}$
12	Americano	$D_k = V_{\overline{n\rceil}}.i.a_{\overline{n-k\rceil}i'} + \dfrac{V_{\overline{n\rceil}}}{(1+i')^{(n-k)}}$ $NP_k = \dfrac{V_{\overline{n\rceil}}}{(1+i')^{(n-k)}}$ $U_k = V_{\overline{n\rceil}}.i.a_{\overline{n-k\rceil}i'}$	$D_2 = 1.800\dfrac{1-1,03^{-53}}{0,03} + \dfrac{90.000}{1,03^{53}} = \boxed{27.786,95}$ $NP_2 = \dfrac{90.000}{1,03^{53}} = \boxed{18.787,53}$ $U_2 = 1.800\dfrac{1-1,03^{-53}}{0,03} = \boxed{\$\ 8.999,42}$

16	TD Cargada	$D_k = Ca_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \frac{K}{n} a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$ $NP_k = \frac{V_{\overline{n}\rceil}}{n} a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$ $U_k = V_{\overline{n}\rceil} r_c a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$	$D_2 = 5.040 \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = \boxed{35.379,25}$ $NP_2 = 4.200 \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = \boxed{29.482,71}$ $U_2 = 840 \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = \boxed{5.896,54}$
16	TD Descontada	$D_k = Ca_{\overline{n-k}\rceil:i'} = \frac{K}{n} a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$ $NP_k = \frac{V_{\overline{n}\rceil}}{n} a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$ $U_k = Kr_d a_{\overline{n-k}\rceil:i'}$	$D_2 = 4.200 \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = \boxed{29.482,71}$ $NP_2 = 3.360 \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = \boxed{23.586,17}$ $U_2 = 840 \frac{1-1,03^{-8}}{0,03} = \boxed{5.896,54}$

CAPÍTULO VII

Empréstitos y Obligaciones Negociables

7.1. Introducción.

7.2. Condiciones de emisión.

7.3. Simbología.

7.4. Empréstitos y Obligaciones Negociables emitidos por el Sistema Francés.
7.4.1. Determinación del número de títulos (Rescate aleatorio).
7.4.2. Probabilidades aplicadas a empréstitos (Rescate aleatorio).
7.4.3. Cálculo de la tasa efectiva del empréstito.
7.4.3.1. Para el ente emisor.
7.4.3.2. Para el suscriptor o tenedor del título.
7.4.4. Vida de un título de renta (Rescate aleatorio).
7.4.5. Nuda Propiedad y Usufructo de un empréstito a Valor de Mercado.
7.4.6. Nuda Propiedad, Usufructo y Valor Real de un título de renta (para el tenedor del título).
7.4.6.1. Rescate Aleatorio.
7.4.6.2. Rescate Cierto o Programado.

7.5. Empréstitos y Obligaciones Negociables emitidos por el Sistema Alemán.
7.5.1. Determinación del número de títulos (Rescate aleatorio).
7.5.2. Probabilidades aplicadas a empréstitos (Rescate aleatorio).
7.5.3. Cálculo de la tasa efectiva del empréstito.
7.5.3.1. Para el ente emisor.
7.5.3.2. Para el suscriptor o tenedor del título.
7.5.4. Vida de un título de renta (Rescate aleatorio).
7.5.5. Nuda Propiedad y Usufructo de un empréstito a Valor de Mercado.
7.5.6. Nuda Propiedad, Usufructo y Valor Real de un título de renta (para el tenedor del título).
7.5.6.1. Rescate aleatorio.
7.5.6.2. Rescate Cierto o Programado.

7.6. Paridad.

7.7. Aplicación (Análisis de emisiones vigentes)

7.8. Ejercitación Capítulo VII.

EMPRÉSTITOS Y OBLIGACIONES NEGOCIABLES

7.1. Introducción

Un empréstito es una deuda emitida con un sólo deudor (normalmente el Estado ya sea Nacional, Provincial o Municipal) cuyos acreedores están diversificados y tienen en su poder fracciones del préstamo llamadas títulos, obligaciones o bonos. Si la emisión de la deuda la realiza una entidad privada se la llama Obligación Negociable.

Las entidades de derecho público o privado emiten empréstitos u obligaciones negociables cuando necesitan grandes capitales y financiación a largo plazo.

Los tenedores de obligaciones, en rescate cierto, tienen derecho a percibir al final de cada período un servicio de interés o un servicio de interés y amortización (según las condiciones de emisión del empréstito). En rescate aleatorio (sorteo o licitación), solo cobran los intereses en cada período y en el momento del rescate, intereses más 100% de la amortización.

7.2. Condiciones de emisión

a) Sistema de emisión del empréstito (se analizarán sólo dos, inicialmente):
I- Sistema Francés
II- Sistema Alemán

b) Tasa de interés: se denomina tasa nominal o facial y se utiliza para el cálculo de los intereses periódicos sobre el valor residual de la obligación.

c) Forma de pago de los intereses: se efectúa por períodos vencidos según las condiciones de emisión del empréstito.

d) Plazo del empréstito: es por períodos finitos. Han existido empréstitos perpetuos en los que el Estado no se obligaba al reembolso en una fecha definida, abonando sólo el servicio de intereses.

e) Forma de reembolso del capital:

Existen dos formas de rescatar un empréstito: I- Rescate Aleatorio y II- Rescate Cierto o Programado. Se estudiará, cada una de ellas, desde el punto de vista del ente emisor y del tenedor del título.

Para el ente emisor no hay diferencias en cuanto al importe periódico que destina a amortizar deuda pero dicho importe se aplica de manera distinta:

1) en rescate aleatorio rescata, en cada período, la cantidad de títulos que la amortización periódica permite (ver punto 7.4.1. y 7.5.1.), según el sistema (Francés o Alemán) y

2) en rescate programado rescata de todos los títulos emitidos la amortización periódica correspondiente hasta el último período, según el sistema de amortización.

Para el tenedor del título existen diferencias:

1) en rescate aleatorio: el tenedor del título cobra los cupones de renta mientras el título esté vivo. En el momento del rescate cobra los intereses de ese período más el 100% de su valor nominal. En esta modalidad el tenedor desconoce la vida del título. El rescate aleatorio puede hacerse por Sorteo (en cada período se efectúa un sorteo de acuerdo a la numeración que identifica a cada título) o por licitación (los suscriptores ofrecen al ente emisor un valor de rescate que puede ser distinto del valor nominal).

2) en rescate cierto o programado el tenedor del título cobra los cupones de renta y amortización periódicos durante toda la vida del empréstito acorde con el sistema en el que se emitió la deuda. De acuerdo con el pago de la amortización puede clasificarse: Cupón cero (el empréstito dura un único período y el precio de compra se calcula por descuento), Amortizaciones periódicas (en cada período se rescatan una parte del valor nominal del título) y Pago íntegro al final del plazo (se rescatan el 100% del valor del título en el último período).

f) Modalidades de emisión: pueden emitirse:

1- Al valor nominal o a la par.
2- A un valor inferior o bajo la par.

3- A un valor superior o <u>sobre la par</u>.

Estas modalidades dan lugar a la fijación de distintas tasas efectivas que pueden diferir de la tasa facial o nominal.

7.3. Simbología

$V_{\overline{n|}}$ = valor nominal del empréstito
N = cantidad de títulos emitidos
c = valor nominal de cada título => $Nc = V_{\overline{n|}}$
$V'_{\overline{n|}}$ = valor efectivo del empréstito
e = precio de emisión => $Ne = V'_{\overline{n|}}$
p = prima de emisión => p = c – e
α = cuota periódica total del servicio de interés más amortización
L = lote o premio
α' = α + L cuota periódica total que incluye lotes
i = tasa nominal del empréstito o tasa facial
i´ = tasa efectiva del empréstito en emisión bajo la par
i ´´= tasa efectiva del empréstito en emisión bajo la par y con lotes

<u>Aclaración</u>: Se llaman empréstitos normales a los que se emiten a la par. El reembolso es a su valor nominal siendo i = i' => c = e => $V_{\overline{n|}} = V'_{\overline{n|}}$

7.4. Empréstitos emitidos por el Sistema Francés

7.4.1. Determinación del número de títulos (rescate aleatorio)

En rescate aleatorio el ente emisor destinará la amortización periódica creciente de títulos al rescate del 100% de los títulos sorteados. Distinto es en el rescate programado que destina la amortización periódica creciente al rescate de la amortización periódica, también creciente, de todos los títulos emitidos.

7.4.1.1. Rescatados o extinguidos en el primer período:

$$N_1 = \frac{\text{fondo amortizante}}{\text{valor nominal de cada título}} = \frac{t}{c} = \frac{V_{\overline{n|}} s^{-1}_{\overline{n|}:i}}{c} = \frac{Ncs^{-1}_{\overline{n|}:i}}{c}$$

$$N_1 = Ns^{-1}_{\overline{n|}:i}$$

7.4.1.2. Rescatados o extinguidos en el período k:

$$N_k = \frac{\text{amortización real del período k}}{\text{valor nominal de cada título}} = \frac{t_k}{c} = \frac{t(1+i)^{k-1}}{c} = N_1(1+i)^{k-1}$$

O bien $$N_k = Ns^{-1}_{\overline{n|}:i}(1+i)^{k-1}$$

7.4.1.3. Rescatados o extinguidos en los primeros k períodos:

$$N_k^e = N_1 + N_2 + \dots + N_K = N_1 + N_1(1+i) + \dots + N_1(1+i)^{k-1} = N_1[1+(1+i)+\dots+(1+i)^{k-1}]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} N_k^e = N_1 s_{\overline{k|}:i} \\ N_k^e = Ns^{-1}_{\overline{n|}:i} s_{\overline{k|}:i} \end{array}}$$

7.4.1.4. Vivos o en circulación después de transcurridos k períodos:

$$\boxed{N_k^v = N - N_k^e = N(1 - s_{\overline{n}|i}^{-1} s_{\overline{k}|i})}$$

Ejemplo:

Considerando un empréstito de \$10.000.000.- emitido por Sistema Francés, en títulos de \$500.- al 7% semestral y a 10 años, determinar el número de títulos:

a) Rescatados en el 1er. Período	$N_1 = Ns_{\overline{n}\|i}^{-1} = 20.000 \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1} = 487,86$ $\boxed{N_1 = 487 \text{ títulos}}$
b) Rescatados en el 10° período	$N_k = Ns_{\overline{n}\|i}^{-1}(1+i)^{k-1} = 20.000 \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1} 1,07^9 = 896,91$ $\boxed{896 < N_{10} < 897 \text{ títulos}}$
c) Rescatados en los 10 primeros períodos	$N_k^e = Ns_{\overline{n}\|i}^{-1} s_{\overline{k}\|i} = 20.000 \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1} \dfrac{1,07^{10}-1}{0,07} = 6.740,49$ $\boxed{6.740 < N_{10}^e < 6.741 \text{ títulos}}$
d) Vivos después del 10° período	$N_k^v = N - N_k^e = N - Ns_{\overline{n}\|i}^{-1} s_{\overline{k}\|i} = 20.000\left(1 - \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1} \dfrac{1,07^{10}-1}{0,07}\right) = 13.259,51$ $\boxed{13.259 < N_{10}^v < 13.260 \text{ títulos}}$

7.4.2. Probabilidades aplicadas a empréstitos (rescate aleatorio)

Definición clásica de Probabilidad de un evento de un hecho aleatorio:

$$\textit{Probabilidad de un evento en su suceso aleatorio} = \frac{\textit{N° de casos favorables al evento}}{\textit{N° de casos posibles al suceso aleatorio}}$$

7.4.2.1. Probabilidad de que un título sea rescatado en el primer período:

$$\boxed{p_{(1)}} = \frac{\text{cantidad de títulos rescatados en el primer período}}{\text{cantidad de títulos emitidos}} = \frac{N_1}{N} = \frac{Ns_{\overline{n}|i}^{-1}}{N} = \boxed{s_{\overline{n}|i}^{-1}}$$

7.4.2.2. Probabilidad de que un título sea rescatado en el período k:

$$\boxed{p_{(k)}} = \frac{\text{cantidad de títulos rescatados en el per. k}}{\text{cantidad de títulos emitidos}} = \frac{N_k}{N} = \frac{N_1(1+i)^{k-1}}{N} = \frac{Ns_{\overline{n}|i}^{-1}(1+i)^{k-1}}{N} = \boxed{s_{\overline{n}|i}^{-1}(1+i)^{k-1}}$$

7.4.2.3. Probabilidad de que un título sea rescatado en los primeros k períodos:

$$\boxed{p_{(1,2,\dots k)}} = \frac{N_k^e}{N} = \frac{Ns_{\overline{n}|i}^{-1} s_{\overline{k}|i}}{N} = \boxed{s_{\overline{n}|i}^{-1} s_{\overline{k}|i}}$$

7.4.2.4. Probabilidad de que un título esté en circulación después de transcurridos k períodos:

$$\boxed{p_{(k+1,k+2,\ldots,n)}} = \frac{N_k^v}{N} = 1 - p_{(1,2,\ldots k)} = 1 - \frac{N_k^e}{N} = 1 - \frac{N s_{\overline{n}|i}^{-1} s_{\overline{k}|i}}{N} = \boxed{1 - s_{\overline{n}|i}^{-1} s_{\overline{k}|i}}$$

Ejemplo:

Siguiendo con el empréstito del ejemplo, calcular la probabilidad de que un título:

a) sea rescatado en el 1er. Período	$p_1 = s_{\overline{n}\|i}^{-1} = \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1} = \boxed{0,0244}$
b) sea rescatado en el 10° período	$p_k = s_{\overline{n}\|i}^{-1}(1+i)^{k-1} = \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1}1,07^{9} = \boxed{0,0448}$
c) sea rescatado en los 10 primeros períodos	$p_{(1,2,\ldots k)} = s_{\overline{n}\|i}^{-1} s_{\overline{k}\|i} = \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1}\dfrac{1,07^{10}-1}{0,07} = \boxed{0,3370}$
d) esté con vida después del 10° período	$p_{(k+1,k+2,\ldots n)} = 1 - p_{(1,2,\ldots k)} = 1 - s_{\overline{n}\|i}^{-1} s_{\overline{k}\|i} = 1 - \dfrac{0,07}{1,07^{20}-1}\dfrac{1,07^{10}-1}{0,07} = \boxed{0,6630}$

7.4.3. Cálculo de la tasa efectiva del empréstito (TIR)

El principal problema que se presenta cuando un empréstito se emite bajo la par es determinar la tasa efectiva del mismo o tasa TIR (Ver Capítulo V). El cálculo se realiza separadamente desde el punto de vista del:

1- ente emisor
2- tenedor o suscriptor del título

Se procede de esta forma por el hecho de que el ente emisor conoce desde el momento de la emisión cómo evolucionará el empréstito en cada período.

En cambio, en el caso de rescate aleatorio, si bien el suscriptor conoce los intereses que va a percibir por cada cupón y el importe del reembolso, desconoce en qué momento su título saldrá sorteado o licitado.

7.4.3.1. Para el ente emisor

7.4.3.1.1. Empréstitos emitidos a la par

En este caso la tasa nominal o facial enunciada es la tasa efectiva TIR del empréstito. Recordando que la cuota que destina el ente emisor es $\boxed{\alpha = V_{\overline{n}|} a_{\overline{n}|i}^{-1}}$ donde *i* es la tasa efectiva.

7.4.3.1.2. Empréstitos emitidos bajo la par

Cuando los títulos se emiten bajo la par al ente emisor del empréstito le resulta una tasa efectiva mayor a la tasa nominal ya que por cada título recibe un valor menor al valor escrito o nominal y en el momento del rescate deberá abonar el valor nominal. La cuota calculada sobre el valor nominal del empréstito ($V_{\overline{n}|}$) y a la tasa nominal i "conocida" es, también, la cuota calculada sobre el valor efectivo ($V_{\overline{n}|}^{'}$) a la tasa efectiva de costo *i'* (TIR) para el emisor. Igualando y despejando:

$$= \left[\begin{array}{l} \alpha = V_{\overline{n}|} a_{\overline{n}|i}^{-1} \\ \alpha = V_{\overline{n}|}^{'} a_{\overline{n}|i'}^{-1} \end{array}\right.$$

$$V_{\overline{n}|} a_{\overline{n}|i}^{-1} = V_{\overline{n}|}^{'} a_{\overline{n}|i'}^{-1}$$

$$Nca_{\overline{n|}i}^{-1} = Nea_{\overline{n|}i'}^{-1}$$

$\boxed{\frac{c}{e} a_{\overline{n|}i}^{-1} = a_{\overline{n|}i'}^{-1}}$ aplicando tanteo financiero e interpolación lineal resulta $\boxed{i<i'}$

7.4.3.1.3. Empréstitos emitidos bajo la par y con lotes

En este caso al ente emisor le resulta una tasa efectiva de costo (*i''* o tasa TIR) aún mayor que la tasa efectiva de emisión bajo la par (i') ya que en el momento del rescate existen algunos títulos que presentan premios o lotes. Surge entonces la cuota que incluye los lotes que se simboliza α'=α+L y despejando α=α'-L

$$= \begin{cases} \alpha = V_{\overline{n|}} a_{\overline{n|}i}^{-1} \\ \alpha = \alpha' - L = V'_{\overline{n|}} a_{\overline{n|}i''}^{-1} - L \end{cases}$$

$V_{\overline{n|}} a_{\overline{n|}i}^{-1} = V'_{\overline{n|}} a_{\overline{n|}i''}^{-1} - L$ reemplazando por $V_{\overline{n|}} = Nc$ y $V'_{\overline{n|}} = Ne$ y despejando

$$\boxed{\frac{c}{e} a_{\overline{n|}i}^{-1} + \frac{L}{Ne} = a_{\overline{n|}i''}^{-1}}$$

Calculando *i''* por tanteo financiero e interpolación lineal resulta $\boxed{i < i' < i''}$

Ejemplo:

Considerando un empréstito emitido por el Sistema Francés, de $10.000.000.- a cancelar en 10 años con cuotas semestrales y al 7% semestral y siendo $500.- el valor nominal de cada título calcular la tasa TIR si la emisión se realiza:

a) a la par	$\boxed{i = i' = 0,07 \text{ semestral}}$
b) Bajo la par, siendo el precio de emisión e = $476.-	$a_{\overline{n|}i'}^{-1} = \frac{c}{e} a_{\overline{n|}i}^{-1} = \frac{500}{476} x \frac{0,07}{1-1,07^{-20}} = 0,099152$ por tanteo e int. lineal $\boxed{i' = 0,076417 \text{ semestral}}$
c) Bajo la par y con lotes siendo e = $476.- y L=$20.000.- (*)	$a_{\overline{n|}i''}^{-1} = \frac{c}{e} a_{\overline{n|}i}^{-1} + \frac{L}{Ne} = \frac{500}{476} x \frac{0,07}{1-1,07^{-20}} + \frac{20.000}{20.000x476} = 0,101253$ por tanteo e interpolación lineal $\boxed{i'' = 0,079208 \text{ semestral}}$

(*) se abona un lote de $1.000.- a cada uno de los primeros 20 títulos rescatados.

7.4.3.2. Para el suscriptor o tenedor del título

Al existir dos formas de rescate (aleatorio y cierto) de los títulos se calcula la tasa efectiva en cada caso.

7.4.3.2.1. Rescate aleatorio (sorteo o licitación)

El cálculo de la tasa efectiva se realiza bajo el concepto de la tasa Tir. Se desarrolla a través de ejemplos.

Suponiendo que un inversor adquiere un título cuyo valor nominal es de $2.000.- en $1.800.- y que el empréstito paga una tasa nominal del 10% anual durante 4 años, determinar la tasa TIR para el inversor suponiendo que el título se rescata en el:

a) primer período
b) segundo período
c) k-ésimo período

a) El título se rescata por sorteo o licitación en el primer período:

<u>Datos:</u>

c=2.000.-
e=1.800.-
i=0,10 anual
k=1

momento de emisión	momento de rescate
0	1
-1.800	Interés = 200
	Amortización = 2.000
	Total = 2.200

$$0 = -1.800 + \frac{2.200}{1+Tir}$$

$$1.800 = \frac{2.200}{1+Tir} \quad => \boxed{\text{Tir} = 0{,}222222 \text{ anual}}$$

b) El título se rescata por sorteo o licitación en el segundo período:

<u>Datos:</u>
c=2.000.-
e=1.800.-
i=0,10 anual
k=2

momento de emisión		momento de rescate
0	1	2
-1.800	Interés=200	Interés = 200
		Amortización = 2.000
		Total = 2.200

$$0 = -1.800 + \frac{200}{1+Tir} + \frac{2.200}{(1+Tir)^2}$$

Haciendo un cambio de variable $X = \dfrac{1}{1+Tir}$ y aplicando la resolvente de una ecuación cuadrática se llega a que $\boxed{\text{Tir} = 0{,}162492 \text{ anual}}$

c) El título se rescata por sorteo o licitación en el *k*-ésimo período (generalización)

<u>Datos:</u>
c=2.000.-
e=1.800.-
i=0,10 anual
Rescate en el *k*-ésimo período

momento de emisión				momento de rescate
0	1	2	//	k
-1.800	Interés=200	Interés=200		Interés = 200
				Amortización = 2.000
				Total = 2.200

$$0=-1800+\frac{200}{1+Tir}+\frac{200}{(1+Tir)^2}+.....+\frac{200}{(1+Tir)^k}+\frac{2000}{(1+Tir)^k}$$

$$\boxed{1.800=200.a_{\overline{k|}:Tir}+2.000(1+Tir)^{-k}}$$

La tasa Tir se calcula aplicando tanteo financiero. (La Tir buscada es aquella que iguala el segundo miembro a 1.800.-). En fórmulas: $\boxed{e=I.a_{\overline{k|}:Tir}+c.(1+Tir)^{-k}}$

7.4.3.2.2. Rescate cierto o programado

La determinación de la tasa efectiva para el suscriptor o tenedor del título se realiza calculando la tasa Tir de acuerdo con las condiciones de emisión del empréstito. En la ecuación financiera el precio de emisión (momento 0) o precio de compra (momento k, posterior a la emisión) del título debe igualarse a la suma de los flujos de renta y amortización periódicos (cuota constante α del sistema Francés) actualizados al momento calculatorio.

Al momento inicial (siendo e el precio de emisión al momento 0):

$$0=-e+\frac{t_1+I_1}{1+Tir}+\frac{t_2+I_2}{(1+Tir)^2}+...+\frac{t_n+I_n}{(1+Tir)^n}=-e+\alpha a_{\overline{n|}:Tir}$$

Al momento calculatorio k (siendo $e_{(k)}$ el precio de compra al momento k):

$$0=-e_{(k)}+\frac{t_{k+1}+I_{k+1}}{1+Tir}+\frac{t_{k+2}+I_{k+2}}{(1+Tir)^2}+...+\frac{t_n+I_n}{(1+Tir)^{n-k}}=-e_{(k)}+\alpha a_{\overline{n-k|}:Tir}$$

Ejemplo:

Suponiendo un título de valor nominal \$10.000.- correspondiente a un empréstito emitido por el sistema Francés a 4 años y a la tasa del 4% anual, determinar la tasa TIR anual para el tenedor del título si fue adquirido a \$9.800.- en el momento de la emisión.

Sabiendo que la cuota constante que cobra el tenedor de un título es:

$$\alpha=V_{\overline{n|}}a^{-1}_{\overline{n|}:i}=10.000x\frac{0,04}{1-1,04^{-4}}=\$2.754,90$$

$$0=-9.800+\frac{2.754,90}{1+Tir}+\frac{2.754,90}{(1+Tir)^2}+\frac{2.754,90}{(1+Tir)^3}+\frac{2.754,90}{(1+Tir)^4}$$

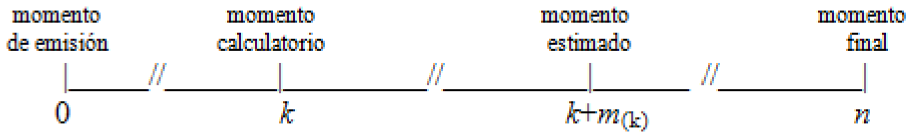
$$a^{-1}_{\overline{4|}:Tir}=\frac{2.754,90}{9.800}=0,281112$$ aplicando tanteo financiero

$\boxed{TIR=0,048626 \text{ anual}}$

7.4.4. Vida de un título de renta (Rescate aleatorio)

Al ser los títulos rescatados por sorteo o licitación no se conoce, con exactitud, cuánto tiempo estarán en circulación y por lo tanto cuál será la vida de los mismos. Esto dificulta la estimación del tiempo en que el tenedor del mismo ha de percibir los servicios de intereses como así también el momento de rescate del título.

Se simboliza con $m_{(k)}$ al número de períodos que debe transcurrir desde el momento calculatorio k hasta el momento en que el título es rescatado.



Existen distintos métodos para calcular la vida de un título. Algunos se basan en probabilidades (Vida Probable), otros en promedios ponderados de períodos y en cuánto vivirán todos los títulos en conjunto (Vida Media) y otros que tienen mayor base financiera y operan con equivalencia suponiendo un momento de rescate íntegro equivalente al de los rescates periódicos (Vida Matemática).

Se estudiará:

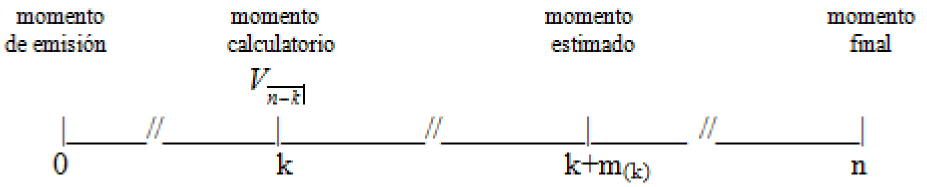
a) Vida Probable (sólo su definición)
b) Vida Media (sólo su definición)
c) Vida Matemática

7.4.4.1. Vida Probable

Definición: La Vida Probable es el número de períodos que debe transcurrir para que el número de títulos en circulación, al momento calculatorio, quede reducido a la mitad.

Es importante aclarar que cuando el momento calculatorio es el momento de emisión la Vida Probable coincide con el Período Medio de Reembolso.

Gráficamente:



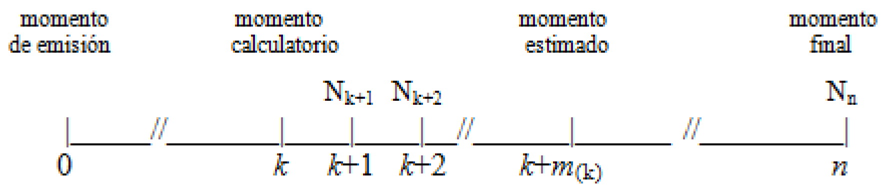
$\boxed{T_{\overline{m(k)}|} = \frac{V_{\overline{n-k}|}}{2}}$ para k = 0 $\boxed{T_{\overline{m(0)}|} = \frac{V_{\overline{n}|}}{2}}$ Período Medio de Reembolso

7.4.4.2. Vida Media

Definición: La Vida Media es el número de períodos que en promedio vivirá cada título si los períodos que vivirán todos los títulos en conjunto, se repartieran en partes iguales entre los títulos en circulación al momento calculatorio (es un promedio ponderado).
Se calcula del siguiente cociente:

$$m_{(k)} = \frac{\textit{número de períodos que vivirán todos los títulos vivos al momento k}}{\textit{número de títulos en circulación al momento k}}$$

Gráficamente



Para calcular el numerador de la Vida Media se construye el siguiente cuadro:

Período	Cada título que se rescata en este período vivirá	Todos los títulos que se rescatan en este período vivirán
k+1	1 período	1 . N_{k+1} períodos
k+2	2 períodos	2 . N_{k+2} períodos
…….	………	……..
n	(n-k) períodos	(n-k) N_n períodos

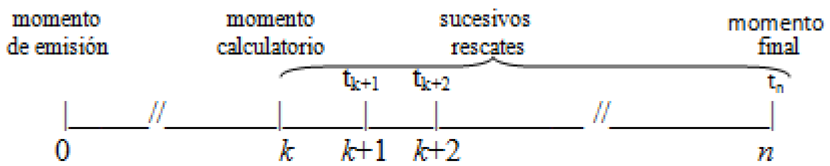
$$\boxed{m_{(k)} = \frac{1N_{k+1} + 2N_{k+2} + 3N_{k+3} + ... + (n-k)N_n}{N_k^v}}$$

7.4.4.3. Vida Matemática

Definición: La Vida Matemática es el número de períodos que debe transcurrir para rescatar simultáneamente todos los títulos en circulación en reemplazo de los rescates sucesivos, de tal manera que, ambas operaciones resulten financieramente equivalentes.

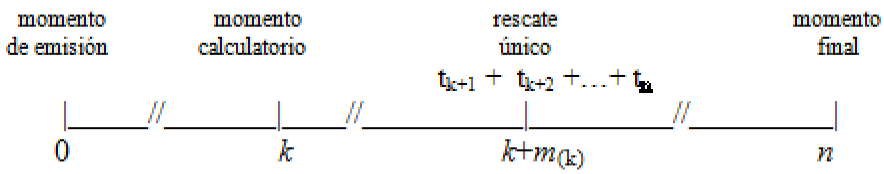
1- Caso más frecuente (i ≠ i´). En general, la tasa de mercado i’ utilizada para actualizar los rescates es distinta a la tasa nominal o facial del empréstito i.

a) Hecho real



$$\textit{Valor presente de los rescates extemporáneos} = \frac{t_{k+1}}{1+i'} + \frac{t_{k+2}}{(1+i')^2} + ... + \frac{t_n}{(1+i')^{n-k}}$$

b) Supuesto de equivalencia



$$\textit{Valor presente del rescate único} = \frac{t_{k+1} + t_{k+2} + ... + t_n}{(1+i')^{m_{(k)}}}$$

Igualando el valor presente de los rescates extemporáneos y el valor presente del rescate único se plantea la equivalencia financiera:

$$\frac{t_{k+1}}{1+i'} + \frac{t_{k+2}}{(1+i')^2} + ... + \frac{t_n}{(1+i')^{n-k}} = \frac{t_{k+1} + t_{k+2} + ... + t_n}{(1+i')^{m(k)}}$$ reemplando las amortizaciones periódicas en función de t_{k+1}

$$\frac{t_{k+1}}{1+i'}+\frac{t_{k+1}(1+i)}{(1+i')^2}+......+\frac{t_{k+1}(1+i)^{n-k-1}}{(1+i')^{n-k}}=\frac{t_{k+1}+t_{k+1}(1+i)+...+t_{k+1}(1+i)^{n-k-1}}{(1+i')^{m(k)}}$$ sacando t_{k+1} factor común en ambos miembros

$$t_{k+1}\left[\frac{1}{1+i'}+\frac{1+i}{(1+i')^2}+......+\frac{(1+i)^{n-k-1}}{(1+i')^{n-k}}\right]=\frac{t_{k+1}\sum_{j=0}^{n-k-1}(1+i)^j}{(1+i')^{m(k)}} \text{ (A)}$$

Suma de términos de una progresión geométrica

$$\frac{1}{1+i'}\frac{1-\left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{n-k}}{1-\frac{1+i}{1+i'}}=\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$

$$\frac{1}{1+i'}\frac{\frac{(1+i')^{n-k}-(1+i)^{n-k}}{(1+i')^{n-k}}}{\frac{1+i'-1-i}{1+i'}}=\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}} \quad \text{simplificando}$$

$$\frac{(1+i')^{n-k}-(1+i)^{n-k}}{(1+i')^{n-k}(i'-i)}=\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$

$$\frac{(1+i')^{n-k}-(1+i)^{n-k}}{(1+i')^{n-k}}=(i'-i)\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$

$$1-\frac{(1+i)^{n-k}}{(1+i')^{n-k}}=(i'-i)\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$ dividiendo ambos miembros por $(1+i)^{n-k}$

$$\frac{1}{(1+i)^{n-k}}-\frac{1}{(1+i')^{n-k}}=(i'-i)\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}(1+i)^{n-k}}$$

En el primer miembro se suma y resta 1 y en el segundo miembro se reemplaza:

$\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i)^{n-k}}$ por $a_{\overline{n-k}|:i}$

$$\left[1-\frac{1}{(1+i')^{n-k}}\right]-\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n-k}}\right]=(i'-i)\frac{a_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$

$$\left[1-(1+i')^{-(n-k)}\right]-\left[1-(1+i)^{-(n-k)}\right]=(i'-i)\frac{a_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$

En el primer miembro se multiplica y divide el minuendo por i’ y el sustraendo, por i

$$i'\left[\frac{1-(1+i')^{-(n-k)}}{i'}\right]-i\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}\right]=\frac{(i'-i)a_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$

$$i'a_{\overline{n-k}|:i'}-ia_{\overline{n-k}|:i}=\frac{(i'-i)a_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i')^{m(k)}}$$

$$(1+i')^{m(k)}=\frac{(i'-i)a_{\overline{n-k}|:i}}{i'a_{\overline{n-k}|:i'}-ia_{\overline{n-k}|:i}} \quad \text{aplicando log}$$

$$\boxed{m_{(k)}=\frac{\log\left[(i'-i)a_{\overline{n-k}|:i}\right]-\log\left[i'a_{\overline{n-k}|:i'}-ia_{\overline{n-k}|:i}\right]}{\log(1+i')}}$$

2- Ejemplo:

Calcular la vida matemática al momento 7 de un título emitido a 16 semestres, a la tasa semestral del 5% semestral considerando una tasa de mercado del 6% semestral.

$$m_{(k)}=\frac{\log\left[(i'-i)a_{\overline{n-k}|:i}\right]-\log\left[i'a_{\overline{n-k}|:i'}-ia_{\overline{n-k}|:i}\right]}{\log(1+i')}$$

$$m_{(7)}=\frac{\log\left[(0,06-0,05)a_{\overline{9}|:0,05}\right]-\log\left[0,06xa_{\overline{9}|:0,06}-0,05xa_{\overline{9}|:0,05}\right]}{\log 1,06}$$

$$m_{(7)}=\frac{\log\left[(0,06-0,05)\frac{1-1,05^{-9}}{0,05}\right]-\log\left[0,06\frac{1-1,06^{-9}}{0,06}-0,05\frac{1-1,05^{-9}}{0,05}\right]}{\log 1,06}$$

$$\boxed{m_{(7)}=5{,}13082 \text{ semestres}}$$

3- Caso particular (i = i')

En la fórmula anterior se presenta una indeterminación. Reemplazando en (A)

$$(n-k)\frac{1}{1+i}=\frac{s_{\overline{n-k}|:i}}{(1+i)^{m(k)}}\quad (1+i)^{m(k)}=\frac{s_{\overline{n-k}|:i}(1+i)}{(n-k)}\qquad \text{aplicando log}$$

$$\boxed{m_{(k)}=\frac{\log\left[s_{\overline{n-k}|:i}(1+i)\right]-\log(n-k)}{\log(1+i)}}$$

7.4.5. Nuda Propiedad y Usufructo de un Empréstito a Valor de Mercado

El valor de mercado de un empréstito ($V'_{\overline{n}|}$) puede expresarse como la suma de todas las cuotas actualizadas a la tasa de mercado i' al momento de emisión.

$$V'_{\overline{n}|}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha}{(1+i')^j}=\frac{\alpha}{1+i'}+\frac{\alpha}{(1+i')^2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha}{(1+i')^n}$$

$$V'_{\overline{n}|}=\frac{t+I_1}{1+i'}+\frac{t_2+I_2}{(1+i')^2}+\ldots+\frac{t_n+I_n}{(1+i')^n}=\frac{t}{1+i'}+\frac{t_2}{(1+i')^2}+\ldots+\frac{t_n}{(1+i')^n}+\frac{I_1}{1+i'}+\frac{I_2}{(1+i')^2}+\ldots+\frac{I_n}{(1+i')^n}$$

Donde $$V'_{\overline{n}|}=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{t_j}{(1+i')^j}}_{\text{Nuda Propiedad}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{I_j}{(1+i')^j}}_{\text{Usufructo}}$$

Definición: La Nuda Propiedad de un empréstito al momento de emisión es la suma de las amortizaciones reales futuras actualizadas al momento 0.

Definición: El Usufructo de un empréstito al momento de emisión es la suma de los intereses futuros actualizados al momento 0.

La tasa de actualización *i’* es un dato y puede coincidir (caso poco frecuente) con la tasa nominal del empréstito. Es una tasa de mercado, que corresponde a operaciones similares (de similar riesgo) vigentes en el mercado. Si el empréstito fue emitido a largo plazo se utiliza una tasa de operaciones a largo plazo. Si fue emitido a corto plazo se utiliza una tasa de corto plazo.

Aclaración: Las fórmulas de nuda propiedad y usufructo no se desarrollan para el empréstito total (ente emisor) pero sí para un título de renta (tenedor de un título): primero en el caso de Rescate Aleatorio (sorteo o licitación) y luego para Rescate Cierto o Programado.

7.4.6. Nuda Propiedad, Usufructo y Valor Real de un título de renta

7.4.6.1. Rescate Aleatorio

Se recuerda que, en rescate aleatorio el tenedor del título cobra los intereses periódicos (renta) sobre el valor nominal mientras el título esté vivo, y en el momento en que sale sorteado o licitado cobra, además, el 100% del valor nominal (amortización).

7.4.6.1.1. Nuda Propiedad de un título de renta

Definición: La Nuda Propiedad de un título de renta es la suma de las amortizaciones reales futuras actualizadas al momento calculatorio.

En el caso de rescate aleatorio, la nuda propiedad es el valor actualizado (al momento calculatorio) del 100% del valor nominal del título que recibirá el tenedor cuando sea rescatado (sorteado o licitado). Al desconocer el momento de rescate del título, para actualizar el valor nominal del mismo es necesario operar con valores estimativos de su vida siendo el más correcto, financieramente, el de la vida matemática.

a) Caso particular (i = i’) En este caso la tasa nominal que paga el título coincide (caso poco probable) con la tasa de actualización.

$$\boxed{np_{(k)} = c(1+i)^{-m_{(k)}}}$$

donde c es el valor nominal del título, $m_{(k)}$ la vida matemática e *i* la tasa nominal o facial del empréstito.

b) Caso más frecuente o general (i ≠ i’): Normalmente la tasa nominal o facial que abona el título es distinta de la tasa de mercado.

$$\boxed{np_{(k)} = c(1+i')^{-m_{(k)}}}$$

donde c es el valor nominal del título, $m_{(k)}$ la vida matemática e *i’* la tasa de mercado vigente para operaciones de similar riesgo.

7.4.6.1.2. Usufructo de un título de renta

Definición: El Usufructo de un título de renta es la suma de los intereses futuros actualizados al momento calculatorio.

Para el rescate aleatorio, el usufructo resulta ser el valor de una renta inmediata de cuota constante *c.i* cuya temporalidad es la vida estimada del título (se utiliza la vida matemática).

a) Caso particular (*i* = *i’*)

$$\boxed{u_{(k)} = c.i.a_{\overline{m(k)}|;i} = c.i.\left[\frac{1-(1+i)^{-m_{(k)}}}{i}\right] = c - c(1+i)^{-m_{(k)}}}$$

b) Caso más frecuente (*i* ≠ *i’*)

$$\boxed{u_{(k)} = c.i.a_{\overline{m(k)}|;i'}}$$

7.4.6.1.3. Valor Real de un título de renta

Definición: El Valor Real de un título de renta es la suma de la nuda propiedad y el usufructo.

a) Caso particular (i = i´). En este caso, la tasa nominal que paga el título coincide (caso poco probable) con la tasa de actualización.

$$\boxed{c_{(k)} = c(1+i)^{-m_{(k)}} + c - c(1+i)^{-m_{(k)}}}$$

Nuda P. Usufructo

$\boxed{c_{(k)} = c}$ Se concluye que, el valor real del título coincide con su valor nominal.

b) Caso más frecuente (i $\neq$ i')

$$\boxed{c_{(k)} = c(1+i')^{-m_{(k)}} + c.i.a_{\overline{m(k)}|;i'}}$$

7.4.6.1.4. Ejemplo

Se sabe que un título emitido a 16 semestres, a la tasa nominal del 5% semestral, tiene una vida matemática al momento 7 igual a 5,13082 semestres. Sabiendo que el valor nominal del título es de \$100.- determinar trabajando con una tasa de mercado del 6% semestral:

a) la nuda propiedad
b) el usufructo
c) el valor real del título.

Datos:

c=100, i=0,05, i'= 0,06, $m_{(7)}$=5,13082

a) $np_{(7)} = 100 \times 1{,}06^{-5{,}13082} = \boxed{74{,}16}$

b) $u_{(7)} = 100 \times 0{,}05 \times (1-1{,}06^{-5{,}13082})/0{,}06 = \boxed{21{,}53}$

c) $c_{(7)} = 74{,}16 + 21{,}53 = \boxed{95{,}69}$

7.4.6.2. Rescate Cierto o Programado

En este caso el tenedor del título cobrará los flujos de renta y amortización periódicamente, en forma programada, es decir, bajo las condiciones de emisión del empréstito (sistema Francés). Para calcular el usufructo y la nuda propiedad cada flujo se actualizará al momento calculatorio y a la tasa de mercado vigente.

7.4.6.2.1. Nuda Propiedad de un título de renta

Definición: La Nuda Propiedad de un título de renta es la suma de las amortizaciones reales futuras actualizadas al momento calculatorio.

En el caso de rescate cierto la nuda propiedad es la suma de las amortizaciones reales periódicas y crecientes (calculadas por sistema Francés) que recibirá el tenedor del título, en forma programada, al momento calculatorio k.

Para $i = i´$ $\boxed{np_{(k)} = \frac{t_{k+1}}{1+i} + \frac{t_{k+2}}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{t_n}{(1+i)^{n-k}} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{t_{k+j}}{(1+i)^j}}$

Para $i \neq i'$ $\boxed{np_{(k)} = \frac{t_{k+1}}{1+i'} + \frac{t_{k+2}}{(1+i')^2} + ... + \frac{t_n}{(1+i')^{n-k}} == \sum_{j=1}^{n-k} \frac{t_{k+j}}{(1+i')^j}}$

7.4.6.2.2. Usufructo de un título de renta

<u>Definición</u>: El Usufructo de un título de renta es la suma de los intereses futuros actualizados al momento calculatorio.

Para el rescate cierto, el usufructo es la suma de los intereses periódicos decrecientes (calculados por sistema Francés) que recibirá el tenedor del título, en forma programada, actualizados al momento calculatorio *k*.

Para $i = i'$ $\boxed{u_{(k)} = \frac{I_{k+1}}{1+i} + \frac{I_{k+2}}{(1+i)^2} + ... + \frac{I_n}{(1+i)^{n-k}} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{I_{k+j}}{(1+i)^j}}$

Para $i \neq i'$ $\boxed{u_{(k)} = \frac{I_{k+1}}{1+i'} + \frac{I_{k+2}}{(1+i')^2} + ... + \frac{I_n}{(1+i')^{n-k}} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{I_{k+j}}{(1+i')^j}}$

7.4.6.2.3. Valor Real de un título de renta

<u>Definición</u>: El Valor Real de un título es la suma de la nuda propiedad y el usufructo calculados al momento *k*.

$$\boxed{c_{(k)} = np_{(k)} + u_{(k)}}$$

7.4.6.2.4. Ejemplo

Suponiendo un título de valor nominal \$10.000.- correspondiente a un empréstito emitido por el sistema Francés a 4 años y a la tasa del 4% anual, determinar la nuda propiedad, el usufructo y el valor real del título, en caso de rescate programado, considerando una la tasa de mercado del 5% anual:

a) al momento de emisión
b) después de transcurridos dos períodos

a) Sabiendo que:

$$\alpha = V_{\overline{n}|} a^{-1}_{\overline{n}|i} = 2.754,90 \text{ , } t = \frac{C}{(1+i)^n} = \frac{2.754,90}{1,04^4} = 2.354,90 \qquad \text{luego}$$

$$np_{(0)} = \frac{2.354,90}{1,05} + \frac{2.449,10}{1,05^2} + \frac{2.547,06}{1,05^3} + \frac{2.648,94}{1,05^4} = \boxed{8.843,70}$$

$$u_{(0)} = \frac{400}{1,05} + \frac{305,80}{1,05^2} + \frac{207,84}{1,05^3} + \frac{105,96}{1,05^4} = \boxed{925,04}$$

$$c_{(0)} = np_{(0)} + u_{(0)} = 8.843,70 + 925,04 = \boxed{9.768,74}$$

b) Para k = 2

$$np_{(2)} = \frac{2.547,06}{1,05} + \frac{2.648,94}{1,05^2} = \boxed{4.828,44}$$

$$u_{(2)} = \frac{207,84}{1,05} + \frac{105,96}{1,05^2} = \boxed{294,05}$$

$$c_{(2)} = np_{(2)} + u_{(2)} = 4.828,44 + 294,05 = \boxed{5.122,49}$$

7.5. Empréstitos emitidos por el Sistema Alemán

7.5.1. Determinación del número de títulos (rescate aleatorio)

En rescate aleatorio, el ente emisor destinará la amortización periódica constante de títulos al rescate del 100% de los títulos sorteados. Distinto es en el rescate programado, que destina la amortización periódica constante al rescate de la amortización periódica constante de todos los títulos emitidos.

7.5.1.1. Rescatados o extinguidos en un período cualquiera:

Como en este sistema la amortización es constante

$$N_k = \frac{\text{amortización periódica constante}}{\text{valor nominal de cada título}} = \frac{t}{c} = \frac{\frac{V_{\overline{n}|}}{n}}{\frac{V_{\overline{n}|}}{N}} \qquad \boxed{N_k = \frac{N}{n}}$$

7.5.1.2. Rescatados o extinguidos en los primeros k períodos:

$$N_k^e = N_1 + N_2 + \ldots + N_K = \frac{N}{n} + \frac{N}{n} + \ldots + \frac{N}{n}$$

$$\boxed{N_k^e = k\frac{N}{n}}$$

7.5.1.3. Vivos o en circulación después de transcurridos k períodos:

$$\boxed{N_k^v = N - N_k^e = (n-k)\frac{N}{n}}$$

Ejemplo:

Considerando un empréstito de \$10.000.000.- emitido por Sistema Alemán, en títulos de \$500.- al 7% semestral y a 20 semestres, determinar el número de títulos:

a) Rescatados en un período cualquiera	$N_k = \frac{N}{n} = \frac{20.000}{20} = \boxed{1.000 \text{ títulos}}$
b) Rescatados en los 5 primeros períodos	$N_k^e = k\frac{N}{n} = 5x\frac{20.000}{20} = \boxed{5.000 \text{ títulos}}$
c) Vivos después del 5º período	$N_k^v = N - N_k^e = N - k\frac{N}{n} = 20.000 - 5x\frac{20.000}{20} = \boxed{15.000 \text{ títulos}}$

7.5.2. Probabilidades aplicadas a empréstitos (Rescate aleatorio)

7.5.2.1. Probabilidad de que un título sea rescatado en un período cualquiera:

La probabilidad es constante en todos los períodos:

$$\boxed{p_{(k)}} = \frac{\text{cantidad de títulos rescatados en el período k}}{\text{cantidad de títulos emitidos}} = \frac{N_k}{N} = \frac{N}{nN} = \boxed{\frac{1}{n}}$$

7.5.2.2. Probabilidad de que un título sea rescatado en los primeros k períodos:

$$\boxed{p_{(1,2,\ldots k)}} = \frac{N_k^e}{N} = \frac{kN_k}{N} = \frac{kN}{Nn} = \boxed{\frac{k}{n}}$$

7.5.2.3. Probabilidad de que un título esté en circulación después de transcurridos k períodos:

$$\boxed{p_{(k+1,k+2,\ldots,n)}} = \frac{N_k^v}{N} = 1 - p_{(1,2,3\ldots k)} = 1 - \frac{k}{n} = \boxed{\frac{n-k}{n}}$$

Ejemplo:

Siguiendo con el empréstito del ejemplo, calcular la probabilidad de que un título:

a) sea rescatado en un período cualquiera	$p_{(k)} = \frac{1}{n} = \frac{1}{20} = \boxed{0,05}$
b) sea rescatado en los 5 primeros períodos	$p_{(1,2,\ldots k)} = \frac{k}{n} = \frac{5}{20} = \boxed{0,25}$
c) esté con vida después del 5° período	$p_{(k+1,k+2,\ldots n)} = 1 - p_{(1,2,\ldots k)} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - \frac{5}{20} = \boxed{0,75}$

7.5.3. Cálculo de la tasa efectiva del empréstito

Nuevamente se analizará, separadamente, para el emisor del empréstito y luego para el tenedor del título.

7.5.3.1. Para el ente emisor

7.5.3.1.1. Empréstitos emitidos a la par.

En la emisión a la par la tasa nominal es la tasa efectiva del empréstito.

7.5.3.1.2. Empréstitos emitidos bajo la par.

Cuando el empréstito se emite bajo la par al ente emisor le resulta una tasa efectiva mayor a la tasa nominal ya que por cada título recibe un valor de emisión (e) menor al valor nominal ($e<c$). Sin embargo, en el momento del rescate deberá abonar el valor nominal (c).

Para calcular tasa efectiva se deben calcular todas las cuotas y actualizarlas al momento inicial igualándolas al valor efectivo del empréstito. La tasa efectiva no es más que la Tasa Interna de Retorno (i') de la siguiente ecuación (ahora las cuotas son variables y decrecientes).

$$\boxed{0 = -V'_{\overline{n}|} + \frac{\alpha_1}{1+i'} + \frac{\alpha_2}{(1+i')^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{(1+i')^n}} \text{ o bien}$$

$$\boxed{V'_{\overline{n}|} = \frac{\alpha_1}{1+i'} + \frac{\alpha_2}{(1+i')^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{(1+i')^n}}$$

Para encontrar la *i'* se aplica tanteo financiero e interpolación lineal.

siendo $\alpha_k = t\left[1+(n-k+1)i\right]$ y $V'_{\overline{n}|} = Ne$

7.5.3.1.3. Empréstitos emitidos bajo la par y con lotes.

En el caso en que existen lotes, la suma destinada a lotes debe sumarse a cada cuota y calcularse así, la tasa Tir que incluye lotes que se simboliza *i''*:

$$\boxed{0 = -V'_{\overline{n}|} + \frac{\alpha_1 + L}{1+i''} + \frac{\alpha_2 + L}{(1+i'')^2} + ... + \frac{\alpha_n + L}{(1+i'')^n}}$$

Ejemplo:

Considerando un empréstito emitido por el Sistema Alemán, de $10.000.000.- a cancelar en 4 semestres, a la tasa nominal del 7% semestral y siendo $500.- el valor nominal de cada título, calcular la tasa efectiva para el ente emisor si la emisión se realiza:

a) a la par	$i = i' = 0,07$ semestral
b) Bajo la par, siendo el precio de emisión e = $476.-	$0 = -V'_{\overline{n}|} + \frac{\alpha_1}{1+i'} + \frac{\alpha_2}{(1+i')^2} + ... + \frac{\alpha_n}{(1+i')^n}$ $0 = -9.520.000 + \frac{3.200.000}{1+i'} + \frac{3.025.000}{(1+i')^2} + \frac{2.850.000}{(1+i')^3} + \frac{2.675.000}{(1+i')^4}$ $\boxed{i' = 0,092842 \text{ semestral}}$
c) Bajo la par y con lotes siendo e = $476.- y L=$20.000.- (*)	$0 = -V'_{\overline{n}|} + \frac{\alpha_1 + L}{1+i''} + \frac{\alpha_2 + L}{(1+i'')^2} + ... + \frac{\alpha_n + L}{(1+i'')^n}$ $0 = -9.520.000 + \frac{3.220.000}{1+i''} + \frac{3.045.000}{(1+i'')^2} + \frac{2.870.000}{(1+i'')^3} + \frac{2.695.000}{(1+i'')^4}$ $\boxed{i'' = 0,096030 \text{ semestral}}$

(*) se abona un lote de $1.000.- a cada uno de los primeros 20 títulos rescatados.

Se cumple que $\boxed{i < i' < i''}$

7.5.3.2. Para el suscriptor o tenedor del título

Nuevamente, al existir dos formas de rescate (aleatorio y cierto) para su cálculo se analizan separadamente cada una de ellas.

7.5.3.2.1. Rescate aleatorio (sorteo o licitación)

El método para la determinación de la tasa efectiva es idéntico al caso de la emisión por Sistema Francés. El tenedor cobrará en cada período y mientras el título esté vivo los flujos periódicos constantes de renta y en el período en que se rescata, el flujo de renta y amortización (100% del valor nominal). Ver punto 7.4.3.2.1 de este capítulo.

7.5.3.2.2. Rescate cierto o programado

El precio de emisión (momento 0) o el precio de compra (momento k posterior al de emisión) del título debe ser igual a la suma de los flujos de interés y amortización (cuotas variables y decrecientes α_j acordes a este sistema) actualizados al momento calculatorio a la tasa Tir.

Al momento inicial (siendo e el precio de emisión al momento 0):

$$0=-e+\frac{t+I_1}{1+Tir}+\frac{t+I_2}{(1+Tir)^2}+\ldots+\frac{t+I_n}{(1+Tir)^n}=-e+\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{(1+Tir)^j}$$

Al momento calculatorio k siendo $e_{(k)}$ el precio de compra al momento k:

$$0=-e_{(k)}+\frac{t+I_{k+1}}{1+Tir}+\frac{t+I_{k+2}}{(1+Tir)^2}+\ldots+\frac{t+I_n}{(1+Tir)^{n-k}}=-e_{(k)}+\sum_{j=1}^{n-k}\frac{\alpha_{k+j}}{(1+Tir)^j}$$

Ejemplo:

Suponiendo un título de valor nominal \$10.000.- correspondiente a un empréstito emitido por el sistema Alemán a 4 años y a la tasa del 4% anual, determinar la tasa efectiva anual para el tenedor del título si fue adquirido a \$9.800.- en el momento de la emisión.

Sabiendo que:

$$t=\frac{V_{\overline{n|}}}{n}=\frac{10.000}{4}=\$2.500.-$$

$$0=-9.800+\frac{2.900}{1+Tir}+\frac{2.800}{(1+Tir)^2}+\frac{2.700}{(1+Tir)^3}+\frac{2.600}{(1+Tir)^4} \qquad \text{aplicando tanteo financiero}$$

$$\boxed{\text{Tir}=0{,}048790 \text{ anual}}$$

Si se compara esta Tir con la del ejemplo en sistema Francés, es un poco mayor debido a que el inversor cobra antes los servicios de amortización.

7.5.4. Vidas de un título de renta (Rescate aleatorio)

Se estudiará:

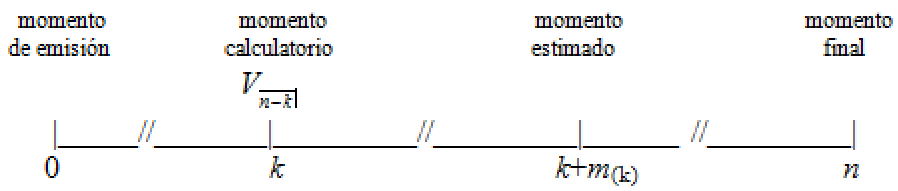
a) Vida Probable
b) Vida Media
c) Vida Matemática

7.5.4.1. Vida Probable

Definición: La Vida Probable es el número de períodos que debe transcurrir para que el número de títulos en circulación al momento calculatorio quede reducido a la mitad.

Es importante aclarar que cuando el momento calculatorio es el momento de emisión, la Vida Probable coincide con el Período Medio de Reembolso.

Gráficamente:



Siendo la amortización (y el número de títulos rescatados) en cada período constante:

$$T_{\overline{m(k)|}}=\frac{V_{\overline{n-k|}}}{2} \quad\rightarrow\quad t.m_{(k)}=t\frac{(n-k)}{2} \quad \text{simplificando t:}$$

$$\boxed{m_{(k)}=\frac{n-k}{2}}$$

Si $\quad k = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{m_{(0)} = \dfrac{n}{2}}$ (Período Medio de Reembolso)

7.5.4.2. <u>Vida Media</u>

<u>Definición</u>: La Vida Media es el número de períodos que en promedio vivirá cada título si los períodos que vivirán todos en conjunto, se repartieran en partes iguales entre los títulos en circulación al momento calculatorio (es un promedio ponderado).

Se calcula como el siguiente cociente:

$$m_{(k)} = \frac{\textit{número de períodos que vivirán todos los títulos vivos al momento } k}{\textit{número de títulos en circulación al momento } k}$$

Gráficamente:

momento de emisión — momento calculatorio — momento estimado — momento final

```
                    N/n   N/n                                N/n
|______//________|_____|_____|__//_______|_______ //__________|
0                k    k+1   k+2        k+m(k)                 n
```

En este sistema el número de títulos rescatados en todos los períodos es constante e igual a N/n. Por lo tanto:

Período	Cada título que se rescata en este período vivirá	Todos los títulos que se rescatan en este período vivirán
k+1	1 período	$1 \cdot \frac{N}{n}$ períodos
k+2	2 períodos	$2 \cdot \frac{N}{n}$ períodos
…….	………	……..
n	(n-k) períodos	$(n-k)\ \frac{N}{n}$ períodos

Entonces:

$$m_{(k)} = \frac{\frac{N}{n} + 2\frac{N}{n} + 3\frac{N}{n} + \ldots.. + (n-k)\frac{N}{n}}{(n-k)\frac{N}{n}} = \frac{\frac{N}{n}\left[1+2+3+\ldots+(n-k)\right]}{(n-k)\frac{N}{n}}$$

En el corchete del numerador se observa la suma de términos de una progresión aritmética que es la semisuma del primer más el último término multiplicada por el número de términos, es decir,

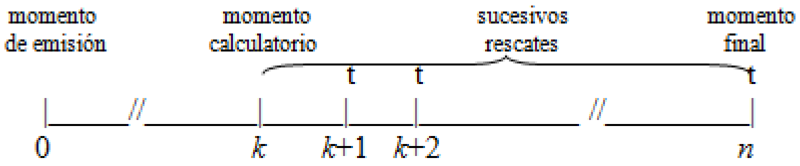
$$m_{(k)} = \frac{\frac{[1+(n-k)]}{2}(n-k)}{(n-k)} \qquad \boxed{m_{(k)} = \frac{n-k+1}{2}}$$

7.5.4.3. <u>Vida Matemática</u>

Definición: La Vida Matemática es el número de períodos que debe transcurrir para rescatar simultáneamente todos los títulos en circulación en reemplazo de los rescates sucesivos de tal manera que ambas operaciones resulten financieramente equivalentes.

1- Caso más frecuente ($i \neq i'$). En general, la tasa i' o tasa de mercado vigente (dato), para operaciones de similar riesgo, es distinta a la tasa nominal del empréstito.

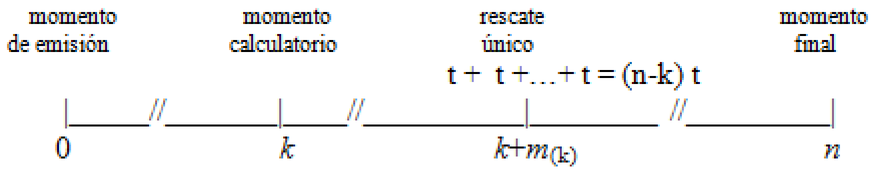
a) Hecho real



$$\text{Valor presente de los rescates extemporáneos} = \frac{t}{1+i'} + \frac{t}{(1+i')^2} + \ldots\ldots + \frac{t}{(1+i')^{n-k}}$$

$$\text{Valor presente de los rescates extemporáneos} = t a_{\overline{n-k|}i'}$$

b) Supuesto de equivalencia



$$\text{Valor presente del rescates único} = \frac{t+t+\ldots\ldots+t}{(1+i')^{m_{(k)}}} = \frac{(n-k)t}{(1+i')^{m_{(k)}}}$$

Igualando el valor presente de los rescates extemporáneos y el valor presente del rescate único se plantea la equidad financiera:

$$t.a_{\overline{n-k|}i'} = \frac{(n-k)t}{(1+i')^{m_{(k)}}} \quad (1+i')^{m_{(k)}} = \frac{(n-k)}{a_{\overline{n-k|}i'}}$$

$$\boxed{m_{(k)} = \frac{\log(n-k) - \log a_{\overline{n-k|}i'}}{\log(1+i')}}$$

Ejemplo:

Calcular la vida matemática al momento 7, de un empréstito emitido a 16 semestres, a la tasa semestral del 5% semestral considerando una tasa de mercado del 6% semestral.

$$m_{(k)} = \frac{\log[(n-k)] - \log\left[a_{\overline{n-k|}i'}\right]}{\log(1+i')} = \frac{\log[(16-7)] - \log\left[a_{\overline{16-7|}0,06}\right]}{\log 1,06}$$

$$m_{(7)} = \frac{\log 9 - \log\left(\frac{1-1,06^{-9}}{0,06}\right)}{\log 1,06}$$

$$\boxed{m_{(7)} = 4,806219 \text{ semestres}}$$

En el sistema Alemán la vida matemática de un título de renta es menor que en el sistema Francés porque las amortizaciones son constantes (lo mismo sucede con el período medio de reembolso).

2- <u>Caso particular</u> ($i = i'$)

En este caso se reemplaza la i' por la i en la fórmula anterior:

$$\boxed{m_{(k)} = \frac{\log(n-k) - \log a_{\overline{n-k}|i}}{\log(1+i)}}$$

7.5.5. Nuda Propiedad y Usufructo de un Empréstito a Valor de Mercado.

El valor de mercado de un empréstito ($V'_{\overline{n}|}$) al momento de emisión puede expresarse como la suma de todas las cuotas actualizadas a la tasa de mercado i' al momento 0.

$$V'_{\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{(1+i')^j} = \frac{\alpha_1}{1+i'} + \frac{\alpha_2}{(1+i')^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{(1+i')^n}$$

$$V'_{\overline{n}|} = \frac{t+I_1}{1+i'} + \frac{t+I_2}{(1+i')^2} + \ldots + \frac{t+I_n}{(1+i')^n} = \frac{t}{1+i'} + \frac{t}{(1+i')^2} + \ldots + \frac{t}{(1+i')^n} + \frac{I_1}{1+i'} + \frac{I_2}{(1+i')^2} + \ldots + \frac{I_n}{(1+i')^n}$$

$$V'_{\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{t}{(1+i')^j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i')^j} = t\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i')^j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i')^j}$$

Donde $$V'_{\overline{n}|} = \underbrace{t a_{\overline{n}|i'}}_{\text{Nuda Propiedad}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{(1+i')^j}}_{\text{Usufructo}}$$

<u>Definición</u>: La Nuda Propiedad de un empréstito al momento de emisión es la suma de las amortizaciones reales futuras constantes actualizadas al momento 0.

<u>Definición</u>: El Usufructo de un empréstito al momento de emisión es la suma de los intereses futuros actualizados al momento 0.

La tasa de actualización i' es un dato y puede coincidir (caso poco frecuente) con la tasa nominal del empréstito. Es una tasa de mercado, que corresponde a operaciones similares (de similar riesgo) vigentes en el mercado. Si el empréstito fue emitido a largo plazo se utiliza una tasa de operaciones a largo plazo. Si fue emitido a corto plazo se utiliza una tasa de corto plazo.

Las fórmulas no se desarrollan para el empréstito total (ente emisor) pero sí para un título de renta (tenedor de un título), primero en el caso de Rescate Aleatorio (sorteo o licitación) y luego para Rescate Cierto o Programado.

7.5.6. Nuda Propiedad, Usufructo y Valor Real de un título de renta (para el tenedor del título)

7.5.6.1. Rescate Aleatorio

Este tema <u>no depende</u> del sistema en el que el empréstito se emite sino de la forma en que los títulos se rescatan. El tenedor del título cobrará los flujos de renta sobre el valor nominal del título, mientras esté vivo y, en el momento del rescate cobrará, además, el 100% de su valor nominal. Por lo tanto coincide con lo visto para Sistema Francés (7.4.6.1. Nuda Propiedad, Usufructo, Valor Real y Ejemplo de un título de renta). Lo que cambia es el valor de la Vida Matemática, ahora calculada para el sistema Alemán.

7.5.6.1.1. Nuda Propiedad de un título de renta

Definición: La Nuda Propiedad de un título de renta es la suma de las amortizaciones reales futuras actualizadas al momento calculatorio.

En el caso de rescate aleatorio la nuda propiedad es el valor actualizado (al momento calculatorio) del 100% del valor nominal del título que recibirá el tenedor cuando sea rescatado (sorteado o licitado). Al desconocer el momento de rescate del título, para actualizar el valor nominal del mismo se hace necesario operar con valores estimativos de su vida siendo el más correcto, financieramente, el de la vida matemática calculada por el sistema que corresponda, en este caso, sistema Alemán.

a) Caso particular ($i = i'$) En este caso la tasa nominal que paga el título coincide (caso poco probable) con la tasa de actualización o de mercado.

$$\boxed{np_{(k)} = c(1+i)^{-m_{(k)}}}$$

donde c es el valor nominal del título, $m_{(k)}$ la vida matemática e i la tasa nominal o facial del empréstito.

b) Caso más frecuente ($i \neq i'$): Normalmente, la tasa nominal o facial que abona el título es distinta de la tasa de mercado.

$$\boxed{np_{(k)} = c(1+i')^{-m_{(k)}}}$$

donde c es el valor nominal del título, $m_{(k)}$ la vida matemática e i' la tasa de mercado vigente para operaciones de similar riesgo.

7.5.6.1.2. Usufructo de un título de renta

Definición: El Usufructo de un título de renta es la suma de los intereses futuros actualizados al momento calculatorio.

El usufructo es el valor actualizado, al momento calculatorio, de los intereses que recibirá el tenedor del título mientras el título está en circulación. Para el rescate aleatorio el usufructo resulta ser el valor de una renta inmediata de cuota $c.i$ cuya temporalidad es la vida estimada (vida matemática).

a) Caso particular (i = i')

$$\boxed{u_{(k)} = c.i.a_{\overline{m(k)}|;i} = c.i.\left[\frac{1-(1+i)^{-m_{(k)}}}{i}\right] = c - c(1+i)^{-m_{(k)}}}$$

b) Caso más frecuente o general ($i \neq i'$)

$$\boxed{u_{(k)} = c.i.a_{\overline{m(k)}|;i'}}$$

7.5.6.1.3. Valor Real de un título de renta

Definición: El Valor Real de un título es la suma de la nuda propiedad y el usufructo.

a) Caso particular (i = i´). En este caso coincide la tasa nominal que paga el título coincide (caso poco probable) con la tasa de actualización.

$$\boxed{c_{(k)} = c(1+i)^{-m_{(k)}} + c - c(1+i)^{-m_{(k)}}}$$

Nuda Propiedad Usufructo

$\boxed{c_{(k)} = c}$ Se concluye que el valor real del título coincide con su valor nominal.

b) Caso más frecuente (i ≠ i')

$$\boxed{c_{(k)} = c(1+i')^{-m_{(k)}} + c.i.a_{\overline{m(k)}|i'}}$$

7.5.6.1.4. Ejemplo

Se sabe que en un empréstito emitido a 16 semestres la tasa nominal del 5% semestral tiene una vida matemática al momento 7 igual a 4,806219 semestres. Sabiendo que el valor nominal del título es de $100.- determinar trabajando con una tasa de mercado del 6% semestral:

a) la nuda propiedad
b) el usufructo
c) el valor real del título.

Datos:

c=100, i=0,05, i'= 0,06, $m_{(7)}$=4,806219

a) $np_{(7)} = 100 \times 1{,}06^{-4{,}806219} = \boxed{75{,}57}$

b) $u_{(7)} = 100 \times 0{,}05 \times (1-1{,}06^{-4{,}806219})/0{,}06 = \boxed{20{,}35}$

c) $c_{(7)} = 75{,}57 + 20{,}35 = \boxed{95{,}92}$

Aclaración: Para rescate aleatorio sólo cambia el valor de la vida matemática del título (calculada, ahora, para el sistema Alemán) que lleva a distintos valores del usufructo, nuda propiedad y valor real del título.

7.5.6.2. Rescate Cierto o Programado

En este caso el tenedor del título cobrará los cupones de renta y amortización periódicamente, en forma programada (condiciones de emisión del empréstito) bajo el sistema Alemán.

7.5.6.2.1. Nuda Propiedad de un título de renta

Definición: La Nuda Propiedad de un título de renta es la suma de las amortizaciones reales periódicas y constantes actualizadas al momento calculatorio.

En el caso de rescate cierto la nuda propiedad es la suma de las amortizaciones reales periódicas constantes (calculadas por sistema Alemán) que recibirá el tenedor del título, en forma programada, actualizadas al momento calculatorio k.

Para $i = i'$ $\boxed{np_{(k)} = \frac{t}{1+i} + \frac{t}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{t}{(1+i)^{n-k}} = ta_{\overline{n-k}|i}}$

Para $i \neq i'$ $\boxed{np_{(k)} = \frac{t}{1+i'} + \frac{t}{(1+i')^2} + \ldots + \frac{t}{(1+i')^{n-k}} = ta_{\overline{n-k}|i'}}$

7.5.6.2.2. Usufructo de un título de renta

Definición: El Usufructo de un título de renta es la suma de los intereses futuros actualizados al momento calculatorio.

En el caso de rescate cierto, el usufructo es la suma de los intereses periódicos que recibirá el tenedor del título (calculados por sistema Alemán), en forma programada, actualizados al momento calculatorio *k*.

Para $i = i'$ $\boxed{u_{(k)} = \frac{I_{k+1}}{1+i} + \frac{I_{k+2}}{(1+i)^2} + ... + \frac{I_n}{(1+i)^{n-k}} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{I_{k+j}}{(1+i)^j}}$

Para $i \neq i'$ $\boxed{u_{(k)} = \frac{I_{k+1}}{1+i'} + \frac{I_{k+2}}{(1+i')^2} + ... + \frac{I_n}{(1+i')^{n-k}} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{I_{k+j}}{(1+i')^j}}$

7.5.6.2.3. Valor Real de un título de renta

Definición: El Valor Real de un título de renta es la suma de la nuda propiedad y el usufructo calculados al momento calculatorio *k*.

$$\boxed{c_{(k)} = np_{(k)} + u_{(k)}}$$

7.5.6.2.4. Ejemplo

Suponiendo un título de $10.000.- de valor nominal, correspondiente a un empréstito emitido por el sistema Alemán a 4 años y a la tasa del 4% anual, determinar la nuda propiedad, el usufructo y el valor real del título, en caso de rescate programado y considerando una tasa de mercado del 5% anual (el tenedor tiene el título hasta que el mismo expira):

a) al momento de emisión
b) después de transcurridos 2 períodos.

a) Sabiendo que:

$$t = \frac{V_{\overline{n|}}}{n} = \frac{10.000}{4} = 2.500.- \text{ y que } \quad I_k = ti(n-k+1) \quad \text{luego}$$

$$np_{(0)} = \frac{2.500}{1,05} + \frac{2.500}{1,05^2} + \frac{2.500}{1,05^3} + \frac{2.500}{1,05^4} = 2.500 a_{\overline{4|}0,05} = \boxed{8.864,88}$$

$$u_{(0)} = \frac{10.000x0,04}{1,05} + \frac{7.500x0,04}{1,05^2} + \frac{5.000x0,04}{1,05^3} + \frac{2.500x0,04}{1,05^4}$$

$$u_{(0)} = \frac{400}{1,05} + \frac{300}{1,05^2} + \frac{200}{1,05^3} + \frac{100}{1,05^4} = \boxed{908,10}$$

$$c_{(0)} = np_{(0)} + u_{(0)} = 8.864,88 + 908,10 = \boxed{9.772,98}$$

b) Para *k* = 2

$$np_{(2)} = \frac{2.500}{1,05} + \frac{2.500}{1,05^2} = 2.500 a_{\overline{2|}0,05} = \boxed{4.648,53}$$

$$u_{(2)} = \frac{200}{1,05} + \frac{100}{1,05^2} = \boxed{281,18}$$

$$c_{(2)} = np_{(2)} + u_{(2)} = 4.648,53 + 281,18 = \boxed{4.929,71}$$

7.6. Paridad

La Paridad de un título se define como la relación o cociente entre su precio de mercado y su valor técnico al momento de la valuación.

$$Paridad = \frac{Valor\ de\ mercado}{Valor\ técnico}$$

El numerador es el valor que tiene el título en las colocaciones de mercado abierto o precio de cotización.

El denominador es el valor residual del título más los intereses devengados. Es el valor que el título tiene de acuerdo a las condiciones de emisión y se forma con el capital pendiente de pago más los intereses devengados, a ese momento, y aún no percibidos.

Si la Paridad es:

a) >1 el título cotiza sobre la par
b) =1 el título cotiza a la par
c) <1 el título cotiza bajo la par

Ejemplo:

Suponiendo un título de valor residual $100.- que abona un interés del 3% cuatrimestral el 08/03, 08/07 y 08/11 de cada año y siendo el valor de mercado de hoy, 08/10, a $94.-, determinar, utilizando año comercial:

a) El valor técnico del título:

$$Valor\ \text{técnico} = Valor\ \text{Residual + Intereses corridos} = 100 + 100x0,03x\frac{3}{4} = \boxed{102,25}$$

b) La Paridad del título:

$$Paridad = \frac{Valor\ de\ mercado}{Valor\ técnico} = \frac{94}{102,25} = \boxed{0,9193} \quad \text{(bajo la par)}$$

7.7. Aplicación

En esta unidad se desarrollará como aplicación la emisión de empréstitos y obligaciones negociables cuya forma de amortización es en un sólo pago (cupón cero o bullet) o en forma periódica. Dentro de estos últimos están los ya estudiados en este capítulo y, particularmente, amortizados por sistema Francés y Sistema Alemán.

Deseo mencionar que durante el cursado de la Maestría en Finanzas en la UNR tuve de profesor al Dr. Guillermo López Dumrauf en la materia Análisis Cuantitativo de Bonos quien amplió mis conocimientos sobre el tema que aplicaba en mi práctica profesional en un Agente de Bolsa de primera línea de nuestra ciudad (ver bibliografía).

En el Consejo Profesional de Ciencias Económicas, ya hace unos años, dicté varios cursos sobre “Funciones Financieras con Excel” en los cuales se utilizaba dicho software con aplicación de varias de las funciones financieras predeterminadas: VAN, VAN.NO.PER, TIR, TIR. NO.PER, TIR MODIFICADA, DURATION, DURATION MODIF. Incluiré conceptos y aplicaciones de dichas funciones.

En el Capítulo V, cuando se estudiaron Inversiones, se presentaron inversiones bursátiles y en este capítulo se profundizará su estudio.

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, los gobiernos y las empresas necesitan dinero para financiar sus proyectos de inversión y satisfacer sus necesidades de liquidez. Para ello toman dinero prestado de inversores mediante la emisión de empréstitos y obligaciones negociables cuyo monto de emisión se encuentra dividido en bonos, títulos u obligaciones.

Si el ente emisor de la deuda es un gobierno nacional, provincial o municipal reciben el nombre de Empréstitos. Si el ente emisor es una empresa privada, una fundación o una asociación reciben el nombre de Obligaciones Negociables.

Un bono es entonces un préstamo de dinero que se le hace a un gobierno o empresa privada recibiendo a cambio una serie de pagos (puede ser uno sólo) en concepto de intereses y devolución del préstamo. Es un certificado de deuda, una promesa de pago futura documentada según las condiciones de emisión del mismo.

En el prospecto de emisión del título figuran tanto las condiciones de emisión (fecha de emisión, fecha de vencimiento, plazo, período de gracia, emisor, valor nominal del empréstito y de cada título, tasa de interés, precio de emisión, moneda de emisión, monto de emisión, cronograma de pago de cupones de amortización, garantías) como así también las entidades que intervendrán en su negociación en el mercado secundario sobre todo en cuanto a qué plazas intervendrán y bajo qué modalidades.

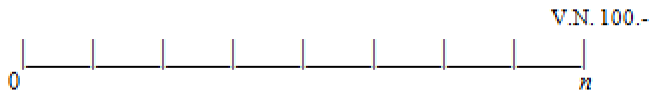
Las condiciones de emisión son:

- Fecha de emisión: es la fecha a partir de la cual tiene vigencia el instrumento de deuda u obligación.
- Fecha de vencimiento: es el momento en que se extingue la obligación.
- Plazo: es el tiempo de vida o madurez de la obligación.
- Período de gracia: es el período en el cual el bono no devenga cupones de amortización.
- Emisor: público (empréstito) o privado (obligación negociable)
- Valor nominal (V.N.): técnicamente es el monto de la deuda originalmente emitida. También es el valor que aparece en cada lámina del bono y se amortiza durante su vida. Este valor lo fija el ente emisor.
- Cupón: es el monto que recibirá el inversor en concepto de intereses y/o amortización.
- Tasa del cupón: es la tasa nominal o facial que se compromete a abonar el emisor del título como retribución del capital adeudado.
- Precio de emisión: es el precio de colocación del bono. Puede ser a la par (a su valor nominal), bajo la par (por debajo de su valor nominal) o sobre la par (por encima de de su valor nominal).
- Moneda de emisión: puede ser en moneda nacional o extranjera (normalmente dólares estadounidenses o euros).
- Monto de la emisión: es el dinero que el emisor recibe de los inversionistas.
- Cronograma de pago de cupones de amortizaciones: es la forma en que el emisor reintegrará el capital (puede ser en un único pago o con pagos periódicos).
- Garantías: Los bonos pueden o no estar respaldados por garantía, depende del prestigio del emisor.

Tipos de bonos

a) Bono cupón Cero:

Son títulos en los que el emisor se compromete a abonar el interés y el capital al vencimiento y de una sola vez. No se abonan cupones periódicos de interés. Estos bonos se emiten a "descuento", es decir, su precio se determina descontando su Valor Nominal. La tasa de interés que paga el emisor queda implícita en el precio al que se emite el bono. Gráficamente



$$\boxed{\textit{Precio de Compra} = \frac{V.N.}{(1+TIR)^n}}$$

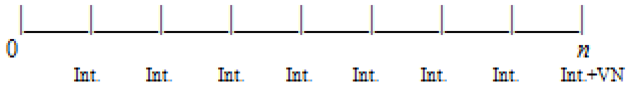
Ejemplo:

Considerando un título de valor nominal \$100.- con vencimiento a 1 año y tasa de interés implícita (*TIR*) igual al 28% determinar precio de emisión.

$$Precio\ de\ Compra = \frac{V.N.}{\left(1+TIR\right)^{n}} = \frac{100}{1,28^{1}} = \boxed{78,125}$$

b) Bono bullet

Son títulos en los que el emisor abona periódicamente sólo intereses y la amortización es íntegra al vencimiento (VN=100). Gráficamente



$$\boxed{\text{Precio de Compra} = I.a_{\overline{n}|:\text{TIR}} + V.N.(1+TIR)^{-n}}$$

Ejemplo:

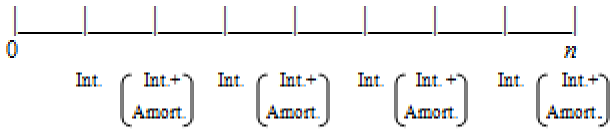
Determinar el precio de compra de un bono bullet de valor nominal \$100.- emitido a 4 años con pago de cupones anuales al 15% anual y con un rendimiento efectivo del 28% anual (TIR).

$$\text{Precio de Compra} = I.a_{\overline{n}|:\text{TIR}} + V.N.(1+TIR)^{-n} = 15a_{\overline{4}|:0,28} + 100x1,28^{-4}$$

$$\text{Precio de Compra} = 15\frac{1-1,28^{-4}}{0,28} + 100x1,28^{-4} = 33,62 + 37,25 = \boxed{70,87}$$

c) Bono con pago periódico de interés y de capital

En este caso el emisor abona periódicamente interés o/y amortización. Gráficamente



$$\boxed{\text{Precio de Compra} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Int_j + Amort_j}{(1+TIR)^{j}}}$$

Dentro de estos títulos se encuentran los emitidos por sistema Francés y sistema Alemán.

Ejemplo:

Determinar el precio de compra de un bono de valor nominal \$100.- emitido a 4 años con pago de cupones anuales al 15% anual, con amortización anual del 25% de su valor nominal y rendimiento efectivo del 28% anual (TIR).

El interés que el bono paga periódicamente se calcula sobre el valor residual (deuda subsistente) en cada período considerado.

$$\text{Precio de Compra} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Int_j + Amort_j}{(1+TIR)^{j}}$$

$$\text{Precio de Compra} = \frac{\left(100x0,15\right)+25}{1,28^{1}} + \frac{\left(75x0,15\right)+25}{1,28^{2}} + \frac{(50x0,15)+25}{1,28^{3}} + \frac{(25x0,15)+25}{1,28^{4}}$$

$$\text{Precio de Compra} = \frac{40}{1,28} + \frac{36,25}{1,28^{2}} + \frac{32,50}{1,28^{3}} + \frac{28,75}{1,28^{4}} = 31,25 + 22,13 + 15,50 + 10,71 = \boxed{79,59}$$

Definiciones:

Valor Residual: es el valor de capital del título que aún no ha sido devuelto por el emisor. Se dice también que es el valor nominal no amortizado. En los bonos que amortizan el 100% de su valor al vencimiento, el valor residual es el valor nominal. Si el bono se amortiza periódicamente el valor residual irá disminuyendo durante la vida del bono en la forma que lo establezcan las condiciones de emisión. Por ejemplo, si un bono de V.N. = 100 abona la amortización en 5 cuotas del 20% de su valor nominal, luego de abonado su primer cupón de amortización el valor residual será 80, luego del segundo cupón será 60 y así sucesivamente.

Valor Técnico: como se definió en este capítulo el valor técnico es el valor residual del título más los intereses corridos o devengados pero aún no cobrados. (Ver punto 7.6. de ese Capítulo).

Suponiendo que un título de valor residual $100.- (en este caso coincide con su valor nominal) abona un interés del 3% cuatrimestral el 08/03, 08/07 y 08/11 de cada año. Siendo hoy 8/10 determinar su valor técnico, utilizando año comercial:

$$Valor \text{ técnico} = Valor \text{ Residual + Intereses corridos} = 100 + 100x0,03x\frac{90}{120}$$

$$= 100 + 100x0,03x\frac{3}{4} = \boxed{102,25}$$

Valor de Paridad: como se definió en esta unidad la paridad de un título es la relación entre su cotización y su valor técnico. (Ver punto 7.6. de este Capítulo)

Siendo el valor de mercado (cotización), 08/10 de $94.- determinar la paridad del título del ejemplo anterior:

$$Paridad = \frac{Valor\ de\ mercado}{Valor\ técnico} = \frac{94}{102,25} = \boxed{0,9193} \text{ (bajo la par)}$$

Siendo: Paridad = 1 el título cotiza a la Par
Paridad < 1 el título cotiza bajo la Par
Paridad > 1 el título cotiza sobre la Par

Riesgos asociados a la inversión de bonos:

Toda inversión implica riesgos que el inversor debe evaluar en el momento de realizarla. Normalmente el valor de un bono está dado por su rendimiento, su plazo y su riesgo. Se mencionan alguno de ellos:

a) Riesgo de tasa de interés: cuando las tasas de mercado varían los precios de los bonos también lo hacen pero en sentido contrario. Si sube la tasa pasiva de los bancos los inversores que poseen bonos de menor rendimiento los venden y se vuelcan a esa tasa bancaria. Al aumentar la oferta de ese bono baja el precio del mismo y el rendimiento se incrementa buscando "el precio de equilibrio de un mercado eficiente".

b) Riesgo de re-inversión: es el riesgo de no poder reinvertir los cupones que el bono paga a la tasa TIR. Los bonos cupón cero no presentan este riesgo. Si existe riesgo de re inversión los bonos que presentan cupones de mayor cuantía al inicio son los más riesgosos para una misma vida. Así, los bullet serán menos riesgosos, los de sistema Francés lo serán más y los del sistema Alemán más aún.

c) Riesgo de los bonos con opciones: algunos bonos se emiten con cláusulas opcionales para el emisor como para el inversor, a saber:

- Riesgo de rescate anticipado: es la cláusula que posee el emisor de rescatar parcial o totalmente la deuda antes de llegar al vencimiento. Estos bonos poseen una prima dentro de la tasa de interés porque el inversor exige un mayor rendimiento ante la posibilidad de ver cortado su plazo de inversión.

- Opción de venta anticipada: otorga al inversor el derecho de vendérselo al emisor en fechas establecidas en las condiciones de emisión del título.
- Opción de conversión en acciones: otorga al inversor el derecho a convertir las obligaciones negociables en acciones de la compañía emisora fijándose fechas y primas determinadas en las condiciones de emisión.

d) Riesgo de inflación: todos los bonos están expuestos a este riesgo. De allí que muchos inversores elijan invertir en bonos emitidos en moneda extranjera (dólar estadounidense o euro) o ajustados por inflación (coeficiente C.E.R.).

e) Riesgo de devaluación: los títulos emitidos en países emergentes presentan mayores riesgos de devaluación.

f) Riesgo del emisor: el mayor riesgo de un bono está dado por la cesación de pagos por parte del emisor también llamado "default". Se refiere a la incertidumbre de pago de los cupones de renta y renta y amortización. Para los títulos públicos este riesgo estaría dado principalmente por el riesgo país. Para los títulos privados estaría dado por la situación económica y política del país como así también por la situación de la industria y de la empresa en sí misma. Existen agencias de crédito (llamadas Calificadoras de Riesgo) que califican a las empresas asignándoles una calificación crediticia: AAA (mejor calificación), AA, A, BBB, BB, B… Esta calificación es clave para que las empresas puedan acceder al mercado de capitales ya sea local como internacional.

g) Riesgo de liquidez: el riesgo consiste en que las posibilidades de vender el título en el mercado secundario y antes de su vencimiento sean limitadas.

h) Riesgo País: mide el "grado de incumplimiento" en que se encuentra el país para abonar deudas adquiridas. Depende de varios indicadores: económicos (tasa de inflación, políticas fiscales, crecimiento del PBI, déficit fiscal, balanzas de pagos, etc.) e historial de incumplimientos internos y externos, riesgo cambiario, situación político económica, indicadores sociales (tasa de desempleo, nivel de ingreso per cápita, etc.). Este riesgo se mide como la sobretasa que deben pagar los bonos de un país por el nivel de riesgo que los mismos incluyen respecto de los bonos del gobierno de los EEUU a 10 años que se consideran bonos libres de riesgo, y son tomados como base. Se expresa en puntos básicos: por cada 100 puntos básicos se toma un 1% de sobretasa. El riesgo país calcula el riesgo que representa a los inversores extranjeros prestarle el dinero al país en cuestión.

Medidas de rendimiento en la inversión de un bono

Tasa Interna de Retorno: es la tasa que iguala el precio de cotización del bono con la suma de los valores actuales de los flujos futuros.

$$\boxed{\text{Precio de Cotización} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{\left(1+TIR\right)^j}}$$

Si la *TIR* es igual a la tasa nominal que paga el bono se dice que cotiza a la par.
Si la *TIR* es mayor a la tasa nominal que paga el bono se dice que cotiza bajo la par.
Si la *TIR* es menor a la tasa nominal que paga el bono se dice que cotiza sobre la par.

Rendimiento del cupón corriente: Es el porcentaje que representan los intereses del cupón vigente en su valor de mercado o precio.

$$\boxed{\text{Rendimiento corriente} = \frac{I_k \text{ del cupón corriente}}{\text{Precio del bono}}\%}$$

Recordar que la cotización del bono depende de la *TIR* y a mayor *TIR* menor cotización del bono. El rendimiento corriente representa el retorno del cupón de intereses, dado por la tasa facial o nominal del bono. Entonces:

Si un título cotiza a la par entonces la *TIR* es igual al rendimiento corriente.
Si un título cotiza bajo la par entonces la *TIR* será mayor que el rendimiento corriente.
Si un título cotiza sobre la par entonces la *TIR* será menor que el rendimiento corriente.

Ejemplo:

Considerando el bono bullet (15% anual durante 4 años y 100% de la amortización al final del cuarto año), calcular el rendimiento corriente del primer cupón. Precio = 70,87

$$\text{Rendimiento corriente} = \frac{15}{70,87}\% = \boxed{21,17\%}$$

En este ejemplo se observa que la *TIR*> Rendimiento corriente ya que el bono cotiza bajo la par.

Rendimiento de ganancias de capital: es la variación porcentual anual del precio del bono con respecto a su valor al final del año anterior.

$$\boxed{\text{Rendimiento de ganancias de capital} = \left(\frac{\text{Precio del bono}_{(1)} - \text{Precio del bono}_{(0)}}{\text{Precio del bono}_{(0)}}\right)\%}$$

Ejemplo:

Considerando el bono bullet (15% anual durante 4 años y 100% de la amortización al final del cuarto año), calcular el rendimiento de ganancias de capital.

Para encontrar este rendimiento se debe calcular el precio del bono a la tasa TIR del 28% pero un año después:

$$\text{Precio de Compra} = 15\frac{1-1,28^{-3}}{0,28} + 100x1,28^{-3} = 28,03 + 47,68 = \boxed{75,71}$$

Entonces:

$$\text{Rendimiento de ganancias de capital} = \left(\frac{\text{Precio del bono}_{(1)} - \text{Precio del bono}_{(0)}}{\text{Precio del bono}_{(0)}}\right)\%$$

$$\text{Rendimiento de ganancias de capital} = \frac{75,71-70,87}{70.87}\% = \frac{4,84}{70.87}\% = \boxed{6,83\%}$$

Observación:

En este punto se puede calcular la *TIR* como la suma del rendimiento corriente más el rendimiento de ganancia de capital.

$$\boxed{TIR = \text{Rendimiento corriente} + \text{Rendimiento de ganancias de capital}}$$

En nuestro ejemplo:

$$\boxed{TIR = 21,17\% + 6,83\% = 28\%}$$

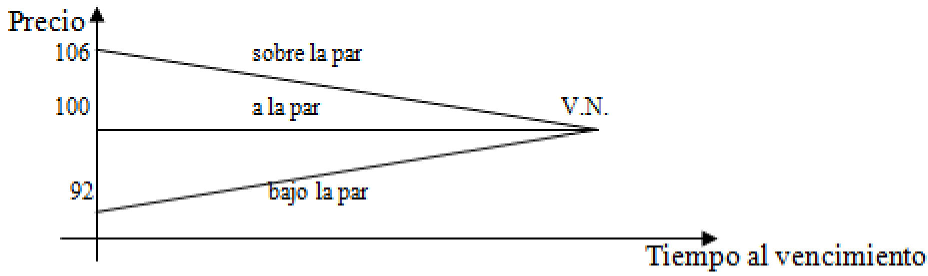
Aclaración:

Para calcular el rendimiento efectivo de un título se deberían tener en cuenta los costos de transacción que el inversor debe afrontar al momento de realizar la inversión. Se mencionan los principales de los gastos y comisiones:

- Gastos de compra y venta: Representan las comisiones de los agentes de bolsa que realizan la transacción. Son porcentuales con un valor mínimo.
- Gastos de custodia y mantenimiento: es una comisión por las cuentas de inversión. Normalmente es un monto fijo.
- Gastos de pago de Interés y Amortización: la cobra el agente por su gestión en el pago de los cupones. Es porcentual con un valor mínimo.
- Derechos de Bolsa y Mercados: son impuestos que deben pagarse para poder realizar la transacción.
- Impuestos: son los que establece el gobierno de cada país sobre este tipo de inversiones.

Evolución del precio del bono hasta su vencimiento

En el siguiente gráfico se observa cómo el precio de un bono se mueve hacia su Valor Nominal (tiende a su cotización a la par) a medida que se acerca a su fecha de vencimiento. Esto se debe a que cada vez es menor el tiempo de actualización.



Recordar que:
Si *TIR*> Rendimiento corriente hay ganancia de capital (bono bajo la par)
Si *TIR*< Rendimiento corriente hay pérdida de capital (bono sobre la par)
Si *TIR* = Rendimiento corriente no hay ganancia ni pérdida de capital (bono a la par).

Modalidad del título otorgado:

a) Carturales: el título es una lámina física con un cuerpo principal con las condiciones de emisión y un cuerpo secundario que contiene cupones de interés o de interés y amortización que pueden separarse del cuerpo principal de la lámina. Al comprar un título se le entrega al inversor la lámina física correspondiente y en las fechas de vencimiento de cada cupón el inversor se debe presentar con el cupón al agente de pago para hacer efectivo el cobro. Por los elevados costos de la impresión de las láminas y la tecnología actual esta modalidad ha sido reemplazada por la siguiente modalidad.

b) Escriturales: el título no posee láminas físicas sino que se registran en los agentes de pago correspondientes (Agentes de Bolsa y Caja de Valores). El registro es electrónico por motivos de seguridad y comodidad. Caja de Valores es la entidad que se encarga de custodiar los depósitos colectivos de los valores que se operan en los mercados asociados.

Cada agente de bolsa (en una de estas empresas de primera línea de la ciudad de Rosario desempeñé mi actividad profesional durante 16 años) posee una cuenta comitente en Caja de Valores S.A. y a su vez, cada comitente o inversor posee una sub-cuenta comitente dentro de la cuenta del agente. Sólo se transfiere la custodia de los títulos, no su propiedad ni su uso. Durante esos años mi trabajo estadístico financiero era formar carteras óptimas de inversión maximizando el rendimiento (a través de la tasa de interés instantánea diaria implícita en los subyacentes integrantes de la cartera) y minimizar el riesgo (medido a través de la volatilidad histórica de la cartera que no es más que el desvío estándar de los subyacentes que la integran).

Medidas de volatilidad en el precio de un bono

En este punto se estudiará la volatilidad teórica de un bono de renta fija. Esta volatilidad es la variación que se produce en el precio del bono de renta fija al cambiar la *TIR* requerida. Es importante poder determinar cuán sensible es el precio del bono frente a cambios de la TIR.

Los factores que más afectan la volatilidad de un título son: el plazo de vencimiento, el tamaño de los cupones y la frecuencia de pago de los mismos. La influencia de estos factores, *ceteris paribus*, son:

- A mayor plazo de vencimiento del bono mayor volatilidad (valor tiempo del dinero)
- A mayor tamaño del cupón menor volatilidad (como ejemplo se considera un bono cupón cero a 1 año y otro a 25 años. El de 25 años tendrá cupón mayor porque tiene más intereses pero al actualizarlo su volatilidad será menor)
- A mayor frecuencia de los cupones menor volatilidad (si el bono tiene amortizaciones subperiódicas, menos incidirá el valor tiempo en los cupones finales)

Duration

Duration de Macauley es el plazo promedio ponderado de los cupones generados por un bono donde las ponderaciones son los valores presentes de los cupones.

Se recuerda que para el cálculo de una media o promedio ponderado en el denominador se calcula la suma de las ponderaciones y dicha suma (suma de los cupones actualizados), en este caso, es el precio del bono.

$$\boxed{Duration = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{Fj}{(1+TIR)^{t_j}} . t_j}{Precio} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Valor\ presente\ del\ cupón_j\ .\ t_j}{Precio}}$$

F_j valor del *j*-ésimo cupón
t_j tiempo al vencimiento del *j*-ésimo cupón
Cotización: Precio del bono

La Duration es una medida de madurez o vida del bono y también una medida de riesgo.

Ejemplo:

Determinar la duration de un bono bullet de valor nominal $100.- emitido a 4 años con pago de cupones anuales al 15% anual y con un rendimiento efectivo (TIR) del 28% anual.

TIR = 0,28 Anual

tj	*Fj*	*Fj act.*	*Fj act x tj*	
.(1)	.(2)	.(3)	.(4)	
1	15	11,72	11,72	= 11,72 x 1
2	15	9,16	18,32	= 9,16 x 2
3	15	7,15	21,45	= 7,15 x 3
4	115	42,84	171,36	= 42,84 x 4
		70,87	222,85	

$$Duration = \frac{222,85}{70,87} = 3,1446 \text{ años} = \boxed{3 \text{ años y } 52 \text{ días}}$$

En el caso particular en que se calcula la duration para un bono cupón cero existe un único cupón (*V.N.*) cuyo valor presente es su precio y por lo tanto su duration coincide con el tiempo hasta su vencimiento. Así

$$\boxed{Duration\ bono\ cupón\ cero = \frac{n\left[\dfrac{V.N.}{(1+TIR)^n}\right]}{Precio} = n\frac{Precio}{Precio} = n}$$

Duration Modificada (DM)

Duration modificada es una medida de volatilidad o riesgo. Es la variación porcentual que se produce en el precio del bono por cada incremento del 1% de la T.I.R.

Algunos autores la llaman “sensibilidad” y permite estimar la variación del precio de un bono ante variaciones de la tasa de interés de mercado.

$$\boxed{Duration\ Modificada = -\frac{Duration}{(1+T.\text{I.R.})}}$$

Observar que la DM es negativa porque es la derivada primera del precio del bono respecto de la tasa TIR y como (1+TIR) está en el denominador tiene exponente -1.

Se calcula la DM para distintas variaciones porcentuales de TIR en nuestro ejemplo

$$Duration\ Modificada = -\frac{3,1446}{1,28} = \boxed{-2,46}$$

Este resultado implica que si la TIR se incrementara un1% el precio del bono disminuiría un 2,46%. En el siguiente cuadro se presenta en la primera columna la variación porcentual de la TIR y en la segunda columna la variación porcentual del precio del bono (recordar que en nuestro ejemplo la TIR es del 28%).

Var % en la TIR	Variación % en el precio		
1% (29%)	-2,46%	= -2,46x1%	si la *TIR* sube un 1% el precio del bono bajará un 2,46%
2% (30%)	-4,92%	= -2,46x2%	si la *TIR* sube un 2% el precio del bono bajará un 4,92%
-1% (27%)	2,46%	= 2,46x1%	si la *TIR* baja un 1% el precio del bono subirá un 2,46%
-2% (26%)	4,92%	= 2,46x2%	si la *TIR* baja un 2% el precio del bono subirá un 4,92%

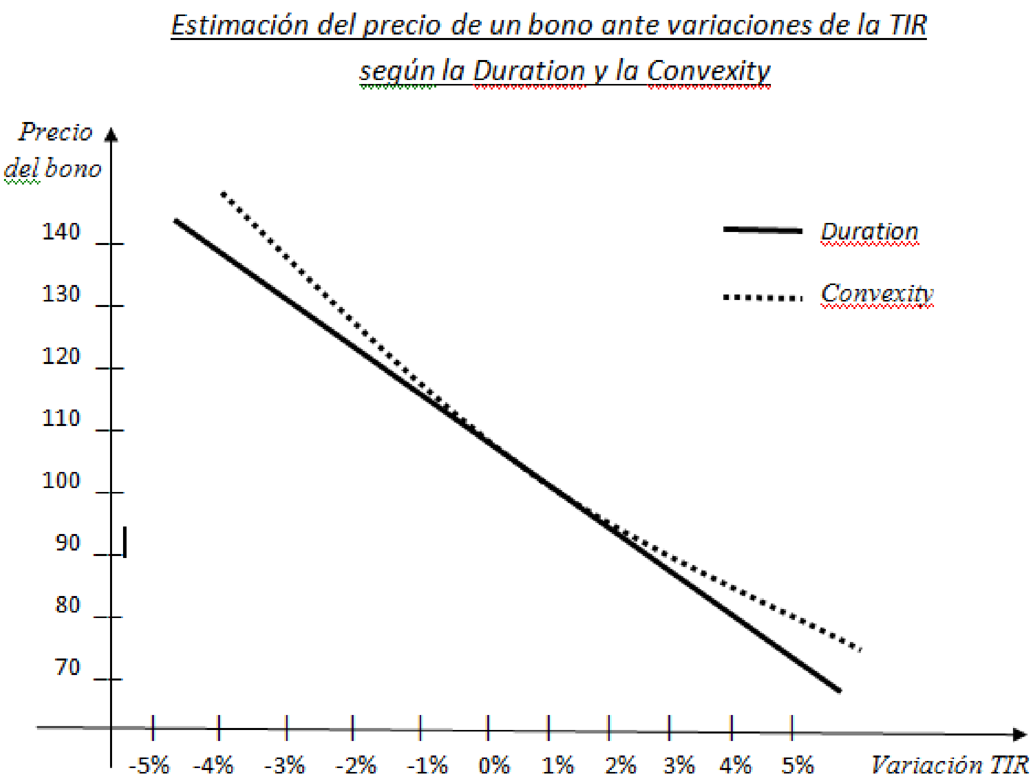
En el caso particular en que se calcula la duration modificada para un bono cupón cero:

$$\boxed{Duration\ Modificada\ bono\ cupón\ cero = -\frac{n}{(1+T.\text{I.R.})}}$$

Convexity

Cuando la variación en *TIR* es muy grande, la Duración y la Duración Modificada no son buenos estimadores del nuevo precio del bono. Esto se debe a que el precio del bono no varía linealmente (recta) con la variación de la *TIR* sino que varía en forma cuadrática (parábola). La Convexity es la segunda derivada del precio respecto de la *TIR* y estima mejor la variación del precio del bono para variaciones grandes de la *TIR*.

En el siguiente gráfico se representa la estimación del precio de un bono ante variaciones de la *TIR* en función de la duration y de la convexity.



En el eje de abscisas se observa la variación porcentual de la *TIR* y en el eje vertical el Precio del bono. Se ha mencionado ya, que a mayor precio del bono menor será su rentabilidad. Y al revés, a menor precio del bono mayor será su rentabilidad.

La duración (recta) asume que la variación porcentual en el precio es siempre la misma ante un cambio del 1% de la *TIR*. La convexidad (curva) tiene en cuenta que el cambio en el precio no es constante ante variaciones de la *TIR*. Es evidente que el precio no cambia en la misma proporción si su rentabilidad varía del 0 al 1% que si varía del 4 al 5% (aunque la variación porcentual siga siendo del 1%). Esto es lo que tiene en cuenta la convexidad, captura el cambio del precio del bono para variaciones grandes de la *TIR*.

Observando el gráfico anterior desde 0% en la variación de la *TIR* hacia lado derecho, ante una suba porcentual de la *TIR*, por ejemplo 5%, la duración estima un precio menor del bono que la convexity, se puede decir que sobrestima la baja del precio del bono. Por el contrario, observando el gráfico desde 0% hacia la izquierda ante una baja porcentual de la tasa *TIR* la duración estima una suba menor en el precio del bono que la convexity, se puede decir que subestima la suba en el precio del bono.

Su fórmula es:

$$Convexity\ Simple = \frac{1}{\left(1+\frac{TIR}{m}\right)^2}\frac{\sum_{j=1}^{n} t_j(t_j+1)\frac{Fj}{(1+TIR)^{t_j}}}{m.m.Precio} = \frac{1}{\left(1+\frac{TIR}{m}\right)^2}\frac{\sum_{j=1}^{n} t_j(t_j+1)\ Valor\ presente\ del\ cupón_j}{m.m.Precio}$$

donde m es la frecuencia de actualización (para cupón anual m=1)

$$Convexity = \frac{Convexity\ Simple}{2}$$

<u>Ejemplo</u>:

Calcular la Convexity y la Convexity Simple para nuestro ejemplo. En el cuadro de cálculo de la Duration:

TIR = 0,28 Anual

tj	*Fj*	*Fj act.*	*Fj act x tj x (tj+1)*
.(1)	.(2)	.(3)	.(4)
1	15	11,72	23,44 = 11,72x1x2
2	15	9,16	54,96 = 9,16x2x3
3	15	7,15	85,80 = 7,15x3x4
4	115	42,84	856,80 = 42,84x4x5
		70,87	1021,00

$$Convexity\ Simple = \frac{1}{\left(1+\frac{TIR}{m}\right)^2}\frac{\sum_{j=1}^{n} t_j(t_j+1) Valor\ presente\ del\ cupón_j}{m.m.Precio} = \frac{1}{(1+0,28)^2}\frac{1021,00}{70,87}$$

$$Convexity\ Simple = 8,7944$$

$$Convexity = \frac{8,7944}{2} = 4,3971$$

En el caso particular de un bono cupón cero en el cálculo la convexity desaparece la sumatoria del numerador porque sólo existe un único cupón y el valor presente del mismo coincide con su precio. Entonces:

$$Convexity\ Simple\ bono\ cupón\ cero = \frac{n(n+1)}{(1+TIR)^2}$$

$$Convexity\ bono\ cupón\ cero = \frac{n(n+1)}{2(1+TIR)^2}$$

Teniendo en cuenta la Duration Modificada y la Convexity se puede calcular mejor la variación porcentual en el precio del un bono en función de la variación porcentual de la *TIR*.

$$Variación\ \%\ precio\ del\ bono = Duration\ Modificada\ x\ \mathrm{Var}\%TIR + Convexity\ x\left(Var\%TIR\right)^2$$

Considerando un incremento del 2% en la *TIR*, determinar la variación porcentual del precio del bono en nuestro ejemplo:

$$Variación\ \%\ precio\ del\ bono = -2,46\ x\ 2\% + 4,3971\ \text{x}\ 2\%^2 = -4,92\% + 0,18\% = \boxed{-4,74\%}$$

Si la *TIR* aumentara un 2% el precio del bono bajaría un 4,74%. Se observa que ante un aumento de la *TIR* de un 2% (de 28% a 30%) la duration modificada estima una baja mayor en el precio del bono (de 70,87 a 67,38) que si en la estimación se incluye la convexity (de 70,87 a 67,51). Si se calculara la variación real del precio se vería que es más cercana a la estimación que incluye la convexity.

Es más, a mayores variaciones porcentuales de la *TIR* las diferencias en la estimación del precio del bono respecto de la variación real de su precio son aún mayores si no se tiene en cuenta la convexity. (ver gráfico).

Tasa spot y tasa forward

La no disponibilidad de dinero implica la necesidad de definir el costo del dinero a través de una tasa de interés. Ese costo depende del plazo del préstamo que otorga el prestamista o acreedor al prestatario o deudor. Este riesgo o incertidumbre se ve reflejado en la tasa de interés: a mayor plazo de devolución mayor tasa de interés (haciendo la aclaración que el crecimiento de la tasa de interés es desacelerado a medida que aumenta el plazo).

En el caso de los bonos de renta fija se observa una estrecha relación entre el precio y la tasa de interés (*TIR*). A su vez, la tasa de interés depende del plazo del bono y a esta relación entre la tasa y el tiempo se la conoce como "estructura temporal de la tasa de interés".

Considerando el eje temporal: |__________//________|_________//____________|
0 *d* *n*

Se define:

* la tasa spot (contado) como la tasa de interés que paga el mercado desde hoy y hasta el vencimiento de la obligación. Representa la rentabilidad asociada a un bono cupón cero, sin pagos intermedios. Se simboliza $_o i_j$ (pudiendo tomar *j* cualquier vencimiento)

* la tasa forward (futura) como la tasa de interés que paga el mercado desde un período futuro "*d*" y hasta el vencimiento "*n*" de la obligación. Se simboliza $_d f_n$

Para calcular la tasa forward del período "*d*" hasta el "*n*" $\left({}_d f_n\right)$ se toma la tasa spot desde el momento 0 por "*d*" años $\left({}_0 i_d\right)$ y la tasa spot desde el momento 0 por "*n*" años $\left({}_0 i_n\right)$ y luego se despeja:

$$\boxed{\left(1+{}_o i_n\right)^n = \left(1+{}_o i_d\right)^d \left(1+{}_d f_n\right)^{n-d}}$$

Observación:

La tasa spot vigente en los *n* períodos puede considerarse como una tasa media entre la tasa spot por *d* períodos y la tasa forward por *n-d* períodos, en régimen de interés compuesto cuando se particiona el tiempo (capítulo I - Tasa media o tasa promedio).

Ejemplo:

Si la tasa de contado un bono cupón 0 a un año es del 15% anual y a dos años es del 18% anual determinar la tasa a futuro anual implícita para el segundo año.

$$\left(1+{}_o i_n\right)^n = \left(1+{}_o i_d\right)^d \left(1+{}_d f_n\right)^{n-d} \qquad 1{,}18^2 = 1{,}15x\left(1+{}_d f_n\right)^1 \qquad \boxed{{}_d f_n = 0{,}2108\ \text{anual}}$$

7.8. EJERCITACIÓN CAPÍTULO VII

1- I. La nuda propiedad de un título de un empréstito emitido por el sistema francés bajo la par y sin lotes calculada en el momento de la emisión es \$49,79986235 y su vida matemática es 11,0704277 períodos. Sabiendo que el valor nominal del título de \$100.- determinar la tasa efectiva del empréstito.
II. Si en el mismo ejemplo que se analiza el Usufructo del título calculado en el momento inicial es de \$ 38,6154905 ¿Cuál es la tasa nominal del empréstito?

$$I)\ np_{(0)} = c\left(1+i'\right)^{-m_{(0)}} \qquad 49,79986235 = 100x(1+i')^{-11,0704277} \qquad \boxed{i'=0,065}$$

$$II)\ \mathrm{u}_{(0)} = c\ i\ \mathrm{a}_{\overline{m_{(0)}}|:i'} \qquad 38,6154905 = 100\ i\ \frac{1-1,065^{-11,0704277}}{0,065} \qquad \boxed{i=0,05}$$

2- Se emite un empréstito de \$50.000.- dividido en títulos de \$100.- cada uno por el sistema Francés en 40 períodos al 9% cuatrimestral. Transcurrido 8 cuatrimestres se modifica la tasa incrementándola en medio punto y el tiempo se prorroga en 11 cuatrimestres. Determinar:
a) la nueva cuota
b) el número de títulos en circulación al momento de la modificación (no tener en cuenta los sobrantes).

$$a)\ \mathrm{V}_{\overline{n}|} = \alpha\, \mathrm{a}_{\overline{n}|:i} \qquad 50.000 = \alpha \frac{1-1,09^{-40}}{0,09} \qquad \alpha = 4.647,98$$

$$\mathrm{V}_{\overline{n-k}|} = \alpha\, \mathrm{a}_{\overline{n-k}|:i} \qquad \mathrm{V}_{\overline{40-8}|} = 4.647,98 \frac{1-1,09^{-32}}{0,09} = 48.368.-$$

$$\mathrm{V}'_{\overline{43}|} = \alpha'\mathrm{a}_{\overline{43}|:0,095} \qquad 48.368 = \alpha' \frac{1-1,095^{-43}}{0,095} \qquad \boxed{\alpha' = 4.689,66}$$

$$b)\ \mathrm{N}_k^V = N\left(1-s_{\overline{n}|:i}^{-1} s_{\overline{k}|:i}\right) = \frac{50.000}{100}\left(1-\frac{0,09}{1-1,09^{-40}}\frac{1-1,09^{-8}}{0,09}\right) = \boxed{483 \text{ o } 484}$$

3- Se emite un empréstito de \$10.000.000.- dividido en títulos de \$500.- de valor nominal a la tasa del 14% anual nominal reembolsable semestralmente en 10 años. Determinar:

a) el número de títulos rescatados en el primer período por el Sistema
a1) Francés
a2) Alemán

b) el número de títulos rescatados en el sexto período por el Sistema
b1) Francés
b2) Alemán

c) el número de títulos rescatados en los 8 primeros períodos por el Sistema
c1) Francés
c2) Alemán

$$a_1)\ N_1 = N s^{-1}_{\overline{n}|i} = \frac{10,000,000}{500}\frac{0,07}{1,07^{20}-1} = \boxed{487}$$

$$a_2)\ N_1 = \frac{N}{n} = \frac{20.000}{20} = \boxed{1.000}$$

$$b_1)\ N_6 = N s^{-1}_{\overline{n}|i}\left(1+i\right)^{k-1} = 20.000\frac{0,07}{1,07^{20}-1}1,07^5 = \boxed{684 \text{ o } 685}$$

$$b_2)\ N_6 = \frac{N}{n} = \frac{20.000}{20} = \boxed{1.000}$$

$$c_1)\ N_8^e = N s^{-1}_{\overline{n}|i} s_{\overline{k}|i} = 20.000\frac{0,07}{1,07^{20}-1}\frac{1,07^8-1}{0,07} = \boxed{5.005 \text{ o } 5.006}$$

$$c_2)\ N_8^e = k\frac{N}{n} = 8\text{x}\frac{20.000}{20} = \boxed{8.000}$$

4- Una entidad emite un empréstito por sistema Francés de \$20.000.000.- cuya lámina es de \$1.000.- a amortizar en 10 años con cuotas bimestrales a la tasa del 5% bimestral. Si en el sorteo bimestral se incluyen lotes por \$5.000.- (\$1.000.- en cada uno de los cinco primeros títulos recatados) calcular la tasa efectiva que incluye lotes para el ente emisor sabiendo que el precio de emisión es de \$926.-

$$\alpha' = \alpha + L \qquad \text{V}'_{\overline{n}|} a^{-1}_{\overline{n}|i''} = \text{V}_{\overline{n}|} a^{-1}_{\overline{n}|i} + L \qquad N.e.a^{-1}_{\overline{n}|i''} = N.c.a^{-1}_{\overline{n}|i} + L$$

$$a^{-1}_{\overline{n}|i''} = \frac{c}{e} a^{-1}_{\overline{n}|i} + \frac{L}{Ne} \qquad a^{-1}_{\overline{n}|i''} = \frac{1.000}{926}\frac{0,05}{1-1,05^{-60}} + \frac{5.000}{20.000x926} = 0,0573199 = f_{(i'')}$$

Tanteo financiero. Obtenemos que

$Para \quad i''_a = 0,055 \qquad f_{(i''_a)} = 0,057307$ como mi dato es $f_{(i'')} = 0,0573199$

$Para \quad i''_p = 0,056 \qquad f_{(i''_p)} = 0,058214$ como mi dato es $f_{(i'')} = 0,0573199$

Ya que $f_{(i'')} = 0,0573199$ está entre $0,057307 < f_{(i'')} < 0,058214$

Interpolación lineal :

$$i''_I = i''_a + \frac{f_{(i'')} - f_{(i''_a)}}{f_{(i''_p)} - f_{(i''_a)}}\left(i''_p - i''_a\right)$$

$$i''_I = 0,055 + \frac{0,0573199 - 0,057307}{0,058214 - 0,057307}(0,056 - 0,055) = \boxed{0,055014 \text{ mensual}}$$

5- Se emite un empréstito emitido por el sistema Francés de \$30.000.000.- en obligaciones de \$1.000.- cada una por el término de 10 años con el pago de cuotas bimestrales al 3% bimestral. El rescate es aleatorio y se distribuyen, en cada período, \$5.000.- en concepto de lotes (\$50.- para c/u de los 100 primeros títulos sorteados). Sabiendo que el precio de emisión fue \$926.- determinar

a) la tasa efectiva de emisión bajo la par y con lotes que le resulta al ente emisor aplicando tanteo financiero e interpolación lineal (error<0,001).

b) La tasa efectiva para el inversor si el rescate fuera aleatorio y el título saliera sorteado en el segundo período y con premio o lote.

a) $\alpha^{'} = \alpha + L \qquad V'_{\overline{n}|} a^{-1}_{\overline{n}|i"} = V_{\overline{n}|} a^{-1}_{\overline{n}|i} + L \qquad N.e.a^{-1}_{\overline{n}|i"} = N.c.a^{-1}_{\overline{n}|i} + L$

$$a^{-1}_{\overline{n}|i"} = \frac{c}{e} a^{-1}_{\overline{n}|i} + \frac{L}{Ne} \qquad a^{-1}_{\overline{n}|i"} = \frac{1.000}{926} \frac{0,03}{1-1,03^{-60}} + \frac{5.000}{30.000x926} = 0,0392004 = \frac{i"}{1-(1+i")^{-60}} = f_{(i")}$$

Tanteo financiero:

$Para \quad i"_a = 0,033 \qquad f_{(i"_a)} = 0,038486 \qquad$ como mi dato es $\quad f_{(i")} = 0,0392004$

$Para \quad i"_p = 0,034 \qquad f_{(i"_p)} = 0,039284 \qquad$ como mi dato es $\quad f_{(i")} = 0,0392004$

Como $\quad f_{(i")} = 0,0392004 \quad$ está entre $\quad 0,038486 < f_{(i")} < 0,039284$

Interpolación lineal :

$$i"_I = i"_a + \frac{f_{(i")} - f_{(i"_a)}}{f_{(i"_p)} - f_{(i"_a)}} \left(i"_p - i"_a \right)$$

$$i"_I = 0,033 + \frac{0,0392004 - 0,038486}{0,039284 - 0,038486} (0,034 - 0,033) = \boxed{0,033895 \text{ mensual}}$$

$b) \quad 0 = -926 + \frac{30}{1+TIR} + \frac{1.080}{(1+TIR)^2} \qquad$ llamando con $x = \frac{1}{1+TIR}$

$1.080x^2 + 30x - 926 = 0 \qquad$ resolviendo y tomando la solución positiva

$$x = 0,912178 = \frac{1}{1+TIR} \qquad \boxed{TIR = 0,096277 \text{ mensual}}$$

6- Se emite un empréstito por el sistema Francés de \$1.000.000.- dividido en obligaciones de \$5.000.- a la tasa del 6% trimestral y debiendo amortizarse en 1 año y medio con el pago de cuotas trimestrales. Siendo el rescate aleatorio, determinar:
   a) El número de títulos que están con vida luego de 4 rescates
   b) La probabilidad de que un título sea rescatado en el quinto trimestre
   c) Ídem a) y b) si el empréstito se hubiera emitido por el sistema Alemán.

a) $$N_k^V = N\left(1 - s^{-1}_{\overline{n}|i} s_{\overline{k}|i}\right) = \frac{1.000.000}{5.000} \left(1 - \frac{0,06}{1-1,0^{-6}} \frac{1-1,06^{-4}}{0,06}\right) = \boxed{74 \text{ } o \text{ } 75}$$

b) $$p_k = s^{-1}_{\overline{n}|i} \left(1+i\right)^{k-1} = \frac{0,06}{1-1,0^{-6}} 1,06^4 = \boxed{0,180992}$$

c) $$N_k^V = N - \frac{k}{n} N = N\left(1 - \frac{k}{n}\right) = 200\left(1 - \frac{4}{6}\right) = \boxed{66 \text{ } o \text{ } 67}$$

$$p_k = \frac{1}{n} = \frac{1}{6} = \boxed{0,166666}$$

7- Construir el cuadro de amortización del ejercicio anterior si la emisión es por Sistema:
   a) Francés
   b) Alemán Rta: Ver cuadros al final del capítulo

8- La vida matemática de un título de renta de VN 100.- al momento 0 es 3,43007925 semestres (emitido por el sistema Francés) y su nuda propiedad es 84,59 determinar:

a) la tasa de mercado (i')
b) Si la tasa nominal es del 4% determinar el usufructo del título
c) El valor real del título.

a) $np_{(0)} = c\left(1+i'\right)^{-m_{(0)}}$ $\quad 84{,}59 = 100x(1+i')^{-3{,}43007925}$ $\quad \boxed{i' = 0{,}05 \text{ semestral}}$

b) $u_{(0)} = c\ i\ a_{\overline{m_{(0)}}|;i'}$ $\quad \mathrm{u}_{(0)} = 100x0{,}04x\dfrac{1-1{,}05^{-3{,}43007925}}{0{,}05}$ $\quad \boxed{u_{(0)} = 12{,}33}$

c) $c_{(0)} = np_{(0)} + u_{(0)} = 84{,}59 + 12{,}33 = \boxed{96{,}92}$

9- Considerando un bono de VN = 1.000.- determinar el precio de compra utilizando una TIR del 15% anual en los siguientes casos y extraer conclusiones:
a1) Bono cupón 0 a 2 años
a2) Bono cupón 0 a 4 años
b1) Bono bullet con pago de interés del 11% anual a 2 años
b2) Bono bullet con pago de interés del 11% anual a 4 años
c1) Bono con pagos periódicos de interés del 11% anual y amortización de capital del 50% anual en 2 años.
c2) Bono con pagos periódicos de interés y amortización de capital del 25% anual en 4 años.

a1) Precio= $\dfrac{V.N.}{\left(1+TIR\right)^n} = \dfrac{1.000}{\left(1+0{,}15\right)^2} = \boxed{756{,}14}$

a2) Precio = $\dfrac{V.N.}{\left(1+TIR\right)^n} = \dfrac{1.000}{\left(1+0{,}15\right)^4} = \boxed{571{,}75}$

b1) Precio= $I.a_{\overline{n}|;\mathrm{TIR}} + V.N.(1+TIR)^{-n} = 110\dfrac{1-1{,}15^{-2}}{0{,}15} + \dfrac{1.000}{1{,}15^2} = 178{,}83 + 756{,}14 = \boxed{934{,}97}$

b2) Precio= $I.a_{\overline{n}|;\mathrm{TIR}} + V.N.(1+TIR)^{-n} = 110\dfrac{1-1{,}15^{-4}}{0{,}15} + \dfrac{1.000}{1{,}15^4} = 314{,}05 + 571{,}75 = \boxed{885{,}80}$

c1) Precio= $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{Int_j + Amort_j}{(1+TIR)^j} = \frac{\left(1.000x0{,}11\right)+500}{1{,}15^1} + \frac{\left(500x0{,}11\right)+500}{1{,}15^2}$

Precio= $\dfrac{610}{1{,}15^1} + \dfrac{555}{1{,}15^2} = 530{,}43 + 419{,}66 = \boxed{950{,}09}$

c2) Precio= $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{Int_j + Amort_j}{(1+TIR)^j}$

Precio= $\dfrac{\left(1.000x0{,}11\right)+250}{1{,}15^1} + \dfrac{\left(750x0{,}11\right)+250}{1{,}15^2} + \dfrac{(500x0{,}11)+250}{1{,}15^3} + \dfrac{(250x0{,}11)+250}{1{,}15^4}$

Precio= $\dfrac{360}{1{,}15} + \dfrac{332{,}50}{1{,}15^2} + \dfrac{305}{1{,}15^3} + \dfrac{277{,}50}{1{,}15^4} = 313{,}04 + 251{,}42 + 200{,}54 + 158{,}66 = \boxed{923{,}66}$

Conclusiones: manteniendo constante la TIR

- En los 3 tipos de bonos a mayor plazo menor precio del bono. Esto se debe al mayor plazo de actualización.

- Considerando el mismo plazo a mayor cantidad de cupones a abonar (de interés y amortización constante) mayor precio. Esto se debe a que en el caso del bullet se cobran más intereses que en el bono cupón 0 y en el caso del bono con pagos subperiódicos, además, las amortizaciones subperiódicas de capital se cobran antes, actualizándolas por un plazo menor.

10- Suponiendo un título de valor nominal $10.000.- emitido a 4 años y a la tasa del 12% anual, determinar el precio del título al momento de emisión si la tasa TIR es del 13% anual por sistema:
a) Francés
b) Alemán

a) Sabiendo que la cuota de este sistema es constante:

$$\alpha = V_{\overline{n|}} a^{-1}_{\overline{n|}:i} = 10.000x\frac{0,12}{1-1,12^{-4}} = 3.292,34$$

$$0 = -\text{Precio} + \frac{3.292,34}{1,13} + \frac{3.292,34}{1,13^2} + \frac{3.292,34}{1,13^3} + \frac{3.292,34}{1,13^4}$$

$$\text{Precio} = 3.292,34 a_{\overline{4|}:0,13} = \boxed{\$9.792,97}$$

b) Sabiendo que:

$$t = \frac{V_{\overline{n|}}}{n} = \frac{10.000}{4} = \$2.500.-$$

$$0 = -\text{Precio} + \frac{(0,12x10.000)+2.500}{1+Tir} + \frac{(0,12x7.500)+2.500}{(1+Tir)^2} + \frac{(0,12x5.000)+2.500}{(1+Tir)^3} + \frac{(0,12x2.500)+2.500}{(1+Tir)^4}$$

$$\text{Precio} = \frac{3.700}{1,13} + \frac{3.400}{1,13^2} + \frac{3.100}{1,13^3} + \frac{2.800}{1,13^4} = \boxed{\$9.802,78}$$

El precio es mayor en el sistema Alemán que en el sistema Francés debido a que el inversor cobra servicios de amortización mayores anticipadamente.

Rta: Ejercicio 7 a) Por sistema Francés

C = 203.362,63

Período	Deuda en títulos	Deuda $	Interés	Cuota Teórica	Amortización teórica	Amortización Real en Títulos	Amortización Real en $	Cuota Real	Deuda Final en Títulos	Deuda Final en $
1	200,00	1.000.000,00	60.000,00	203.362,63	143.362,63	28,00	140.000,00	200.000,00	172,00	860.000,00
2	172,00	860.000,00	51.600,00	203.362,63	151.762,63	31,00	155.000,00	206.600,00	141,00	705.000,00
3	141,00	705.000,00	42.300,00	203.362,63	161.062,63	32,00	160.000,00	202.300,00	109,00	545.000,00
4	109,00	545.000,00	32.700,00	203.362,63	170.662,63	34,00	170.000,00	202.700,00	75,00	375.000,00
5	75,00	375.000,00	22.500,00	203.362,63	180.862,63	36,00	180.000,00	202.500,00	39,00	195.000,00
6	39,00	195.000,00	11.700,00	203.362,63	191.662,63	39,00	195.000,00	206.700,00	0,00	0,00
						200,00	1.000.000,00			

Sobrantes

Periodo	Acumulados	Del periodo	Total	Interés	Total $
1	0	3.362,63	3.362,63	201,76	3.564,39
2	3.564,39	-3.237,37	327,01	19,62	346,64
3	346,64	1.062,63	1.409,26	84,56	1.493,82
4	1.493,82	662,63	2.156,45	129,39	2.285,84
5	2.285,84	862,63	3.148,46	188,91	3.337,37
6	3.337,37	-3.337,37	0,00	0,00	0,00

Ejercicio 7 b) Por sistema Alemán: (los sobrantes no se capitalizan)

t = 166.666,67

Periodo	Deuda en títulos	Deuda $	Interés	Cuota	Amort. Real Tít.	Amort Real $	Deuda Final Tít.	Deuda en $	Cuota Real
1	200,00	1.000.000,00	60.000,00	226.666,67	33,00	165.000,00	167,00	835.000,00	225.000,00
2	167,00	835.000,00	50.100,00	216.766,67	33,00	165.000,00	134,00	670.000,00	215.100,00
3	134,00	670.000,00	40.200,00	206.866,67	34,00	170.000,00	100,00	500.000,00	210.200,00
4	100,00	500.000,00	30.000,00	196.666,67	33,00	165.000,00	67,00	335.000,00	195.000,00
5	67,00	335.000,00	20.100,00	186.766,67	33,00	165.000,00	34,00	170.000,00	185.100,00
6	34,00	170.000,00	10.200,00	176.866,67	34,00	170.000,00	0,00	0,00	180.200,00
					200,00	1.000.000,00			

CAPÍTULO VIII

Introducción al Cálculo Actuarial

8.1. Introducción.

8.2. Funciones de Sobrevivencia y de Mortalidad.

8.3. Tasas Anuales.

8.4. Cálculo de los Valores de Conmutación de las Tablas de Mortalidad.

8.5. Probabilidades de Vida y de Muerte sobre una sola cabeza.

8.6. Vida Probable.

8.7. Duración más probable de Vida.

8.8. Definiciones para la clasificación de Seguros y Rentas Vitalicias.

8.9. Seguros sobre la Vida.
- 8.9.1. Capital Diferido (Seguros en caso de Vida)
- 8.9.2. Rentas Vitalicias (Seguro en caso de Vida) y Seguros en caso de Muerte.
- 8.9.3. Seguros Mixtos (Seguros en caso de Vida y de Muerte).

8.10. Primas Naturales en un Seguro en caso de Muerte.

8.11. Primas Periódicas Constantes o Niveladas.

8.12. Reservas Matemáticas.

8.13. Prima de Riesgo y Prima de Ahorro.

8.14. Primas de Tarifa o Primas Cargadas.

8.15. Aplicaciones (Comparación de CSO 1941 y 2001. Esperanza de Vida)

8.16. Anexo. Tablas de Mortalidad

8.17. Ejercitación Capítulo VIII

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ACTUARIAL

Deseo dejar aclarado que este capítulo de "Introducción al Cálculo Actuarial" fue incorporado al programa de la materia Matemática Financiera para Contadores y Licenciados en Administración en el año 2006 por el profesor titular Dr. Fernando Cícero tomando como base su libro para redactarlo. En mi carrera de grado, "Estadística", existía la materia Matemática Financiera y Actuarial. Era desarrollada conjuntamente con el CPN Eduardo Cúneo, profesor titular quien me inició en mi carrera docente y de quien también he tomado algunos desarrollos. Ambos profesores titulares han sido mis grandes maestros en el área de las Finanzas.

8.1. Introducción

Las operaciones estudiadas en Cálculo Actuarial son operaciones financieras inciertas o de previsión ya que en ellas existe un elemento aleatorio que condiciona la realización de la contraprestación. Se estudian en Cálculo Actuarial y corresponden a todo tipo de seguros. El elemento aleatorio que condiciona el pago del "premio" por parte de la compañía aseguradora es la ocurrencia del siniestro asegurado. Por ejemplo, en un seguro por rotura de cristales de un vehículo el tomador del seguro paga la "prima" pero el pago del "premio" por parte de la aseguradora sólo se realizará si se produce el siniestro.

En este curso se estudiarán, únicamente, los seguros personales o seguros sobre las personas. En ellos, el elemento contingente es "el momento en que se va a extinguir la vida de una persona" para la cual se calcula el seguro. Es evidente que la probabilidad de que un individuo fallezca en un momento determinado depende de muchos factores entre los que se pueden mencionar la edad, sexo, estado de salud, factores ambientales, factores biológicos, factores genéticos, etc.

La herramienta para el cálculo de dichas probabilidades es la Tabla de Mortalidad. Estas tablas se utilizan para construir los modelos de sistemas de seguros que auxilian a los actuarios frente a la incertidumbre sobre el momento en que mueren los individuos.

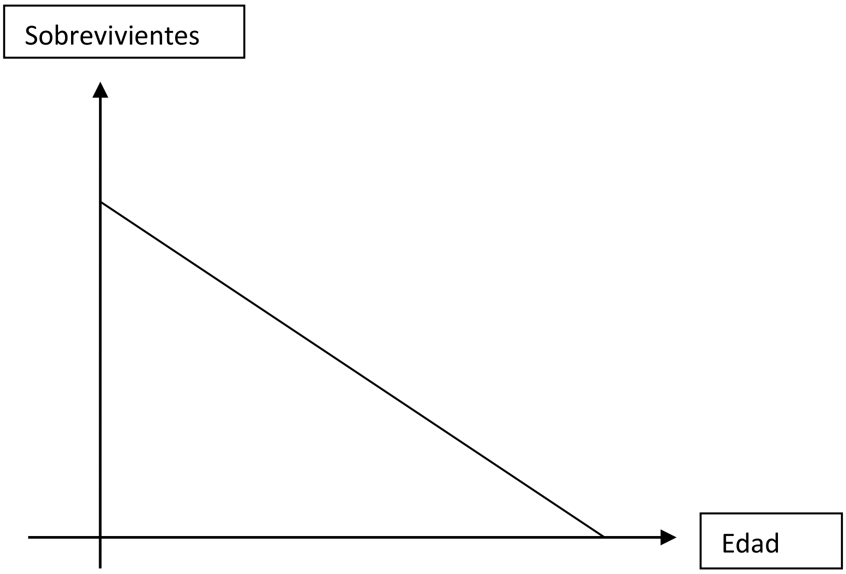
Haciendo un poco de historia, a través del tiempo se han construido distintas tablas de Mortalidad. Estas tablas indican cuántas personas, supuestamente nacidas en el mismo instante (edad cero), sobreviven al año, a los dos años, a los tres años y así sucesivamente hasta extinguirse el grupo inicial. La construcción de una Tabla de Mortalidad para una determinada zona y una determinada población no podía terminarse ya que al fallecer la persona que realizaba los cálculos la tabla quedaba inconclusa. Este inconveniente se salvaba dejando el trabajo a otros pero, en realidad, se obtenía un estudio de "vida sucesiva" y el análisis resultaba en vano ya que el medio de vida cambia debido a que la ciencia permanentemente avanza y el promedio de vida va aumentando.

Con posterioridad la forma de construir una tabla de Mortalidad era estudiar grupos de personas de la misma edad simultáneamente (de recién nacidos, de 10 años, de 20 años, de 30 años, etc.) y realizar un seguimiento de todos los grupos por 10 años y con distintos ajustes biométricos, en un corto número de años, se confeccionaba la tabla.

En la actualidad las tablas de mortalidad se construyen utilizando la información demográfica más cercana posible. Dicha información se obtiene de los Censos de Población discriminada por edad y por sexo relacionándola con la composición de las muertes anuales tomadas del Registro Civil, ordenada también por edad y por sexo (se suelen promediar las muertes de 3 años para una mejor estimación). En base a estas dos fuentes de información demográfica se calculan las probabilidades de muerte (por edad y sexo) y se confecciona, con el auxilio de la Estadística Actuarial y el uso de métodos biométricos especiales para la disciplina, la Tabla de Mortalidad completa.

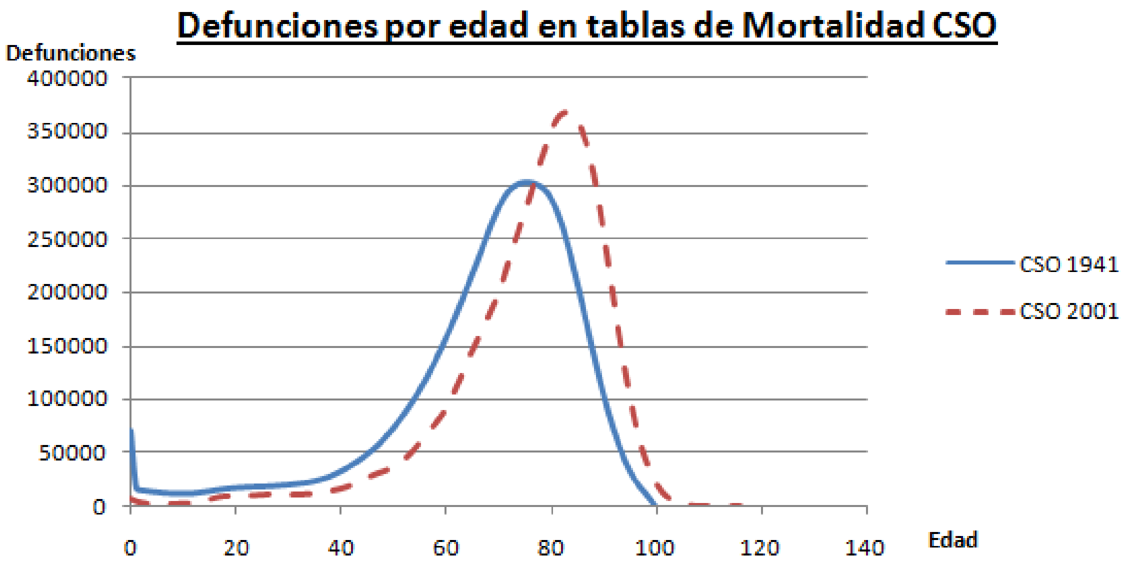
El primero que concibió una tabla de Mortalidad fue el matemático francés, Abraham de

Moivre (1667), quien sostenía que la vida extrema era de 86 años y tomaba un grupo de individuos considerando que todos los años moría un número igual de personas. Ver gráfico:



El actuario y matemático británico Benjamín Gompertz consideró que la mortalidad era consecuencia de la resistencia orgánica de las personas a las enfermedades. La mortalidad era acentuada en los primeros años de vida y los que superaban esa edad eran los más fuertes.

Esta hipótesis de Gompertz era real. La consideración práctica fue hecha por el actuario inglés William Makeham quien consideró que, aparte de la resistencia orgánica, había otro factor, los accidentes a los que están expuestas todas las personas, para todas por igual y a cualquier edad (ver el siguiente gráfico para CSO 1941 y CSO 2001).



En este libro se utilizarán las Tablas de Mortalidad Standard Ordinaria de Los Comisionados (CSO) elaborada en Estados Unidos presentadas en el Anexo, al final de este capítulo.

En el Anexo I se presenta la tabla de mortalidad CSO de 1941 con datos recogidos entre 1930 y 1940 y a la tasa de interés técnico del 4% anual. Cabe resaltar que los valores para mujeres de 15 años en adelante son los mismos que para varones <u>con diferencia de 3 años</u> a favor, es decir, 15 años de mujer es 12 años de varón, 102 años de mujer es 99 años de varón.

En el Anexo II se presentan las tablas de mortalidad CSO de 2001. En estas tablas aparece la información separadamente para Hombre y Mujer donde las probabilidades de muerte son distintas para todas las edades según el sexo (ver última columna).

Al observar ambas tablas se puede apreciar cómo se ha incrementado la edad extrema de vida en estos 60 años (desde 1941 a 2001). La edad máxima en la tabla de 1941 es 100 años para hombre y 103 para mujer (3 años más) y en la tabla de 2001 es 116 años para hombre y 117 años para mujer.

8.2. Funciones de Sobrevivencia y de Mortalidad

Recibe el nombre de función de sobrevivencia y se simboliza l_x a aquella función de la variable independiente x (edad) que representa el número de individuos de un grupo inicial $l_0$de recién nacidos que alcanza a sobrevivir x años.

Recibe el nombre de función de mortalidad y se simboliza d_x a aquella función de la variable independiente x (edad) que representa el número de individuos de un grupo inicial l_0 de recién nacidos que alcanza a vivir x años más y fallecen antes de cumplir un año más.

Se obtiene la siguiente relación: $d_x = l_x - l_{x+1}$

Se simboliza **ω** (omega) a la edad máxima o edad tope a la que puede llegar el último sobreviviente de un grupo iniciall_0 de recién nacidos. El valor de **ω** varía según las tablas de mortalidad empleadas. Para hombres en las tablas de mortalidad C.S.O. 1941 (Anexo I) la edad tope es de 100 años y en las C.S.O. 2001 (anexo II) es 116 años.

$$l_\omega = l_{100} = 0 \text{ (CSO 1941)} \quad l_\omega = l_{116} = 0 \text{ (CSO 2001)}$$

Se demuestra fácilmente que el número de sobrevivientes a la edad x se puede calcular como la suma de los fallecidos entre la edad x y la edad **ω:**

$$l_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} d_{x+t} = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \dots + d_{\omega-1} = (l_x - l_{x+1}) + (l_{x+1} - l_{x+2}) + (l_{x+2} - l_{x+3}) + \dots + (l_{\omega-1} - l_\omega)$$

simplificando $\quad l_x = l_x - l_\omega = l_x - 0 = l_x$

8.3. Tasas Anuales

8.3.1. Tasa Anual de Vitalidad

Definición: La Tasa Anual de Vitalidad es la probabilidad que tiene una persona de **x** años recién cumplidos de vivir un año más. Se simboliza p_x

Para calcular el valor de la probabilidad p_x se recuerda la definición clásica de probabilidad.

$$\text{Probabilidad de un evento de un suceso aleatorio} = \frac{N° \text{ de casos favorables al evento}}{N° \text{ de casos posibles al suceso aleatorio}}$$

Donde los casos posibles son los l_x individuos que alcanzan la edad de x años y los casos favorables son los l_{x+1} que alcanzan la edad de **x+1** años. Luego:

$$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}}$$

8.3.2. Tasa Anual de Mortalidad

Definición: La Tasa Anual de Mortalidad es la probabilidad que tiene una persona de **x** años recién cumplidos de fallecer antes de cumplir un año más. Se simboliza q_x

La Tasa Anual de Mortalidad considerada como probabilidad se calcula:

$$\boxed{q_x = \frac{d_x}{l_x}} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x$$

que lógicamente es complementaria a la probabilidad de vivir. Evidentemente: $\boldsymbol{p_x + q_x = 1}$

Ejemplo:

Calcular la tasa anual de vitalidad y de mortalidad para un hombre de 50 años.

Probabilidad	CSO 1941	CSO 2001
$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{51}}{l_{50}}$	$p_{50} = 0,99168$	$p_{50} = 0,99609$
$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{d_{50}}{l_{50}}$	$q_{50} = 0,00832$	$q_{50} = 0,00391$
$p_{50} + q_{50}$ suceso cierto	$p_{50} + q_{50} = 1$	$p_{50} + q_{50} = 1$

8.4. Cálculo de los Valores de Conmutación de las Tablas de Mortalidad

8.4.1. Parte Vida

I) D_X: recibe el nombre de Valor Actualizado de los Vivos a la edad x de un grupo inicial de recién nacidos y se calcula:

$\boxed{D_x = l_x v^x}$ donde $v^x = (1+i)^{-x}$ (en las CSO i = 0,04 anual)

La letra D proviene de la palabra Denominador.

II) N_x es la suma de las D_x desde la edad x hasta la edad tope (omega).

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots\dots + D_{\omega-1}$$

$$\boxed{N_x = \sum_{t=x}^{\omega-1} D_t}$$

La letra N proviene de la palabra Numerador.

8.4.2. Parte Muerte

I) C_X: recibe el nombre de Valor Actualizado de los Muertos a la edad x de un grupo inicial de recién nacidos. Se simboliza con la letra C que es la letra anterior al primer valor de conmutación sobre la vida (D).

$\boxed{C_x = d_x v^{x+1}}$

La actualización es por un período más porque los fallecimientos de edad x se verifican íntegramente al final del período.

En el extremo:

$$C_\omega = d_\omega v^{\omega+1} = 0 \, v^{\omega+1} = 0$$

II) M_x es la suma de las C_x desde la edad x hasta la edad tope **ω**. (Letra M anterior a la letra N correspondiente al valor de conmutación sobre la vida)

$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_{\omega-1}$

$$\boxed{M_x = \sum_{t=x}^{\omega-1} C_t}$$

El valor extremo:

$M_\omega = C_\omega = 0$

8.5. Probabilidades de Vida y de Muerte sobre una sola cabeza

8.5.1. Probabilidad de Vida Temporaria

Definición: La Probabilidad de Vida Temporaria es la probabilidad que tiene una persona que recién ha cumplido x años de edad de vivir **n** años más. Se simboliza $\boldsymbol{np_x}$

Para el caso de n = 1 se obtiene la tasa anual de vitalidad $\boldsymbol{p_x}$

Aplicando la definición clásica de probabilidad:

Luego $$\boxed{np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$$

A esta misma fórmula se llega si se multiplican las tasas anuales de vitalidad desde la edad x hasta la edad x+n-1, ya que, para vivir n años más hay que ir viviendo cada uno de los años anteriores. Por lo tanto:

$$np_x = p_x \;\cdot\; p_{x+1} \;\cdot\; p_{x+2} \;\cdots\; p_{x+n-2} \;\cdot\; p_{x+n-1} = \prod_{t=x}^{x+n-1} p_t$$

Reemplazando y simplificando:

$$np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n-1}}{l_{x+n-2}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

8.5.2. Probabilidad de Muerte Temporaria

Definición: La Probabilidad de Muerte Temporaria es la probabilidad que tiene una persona que recién ha cumplido x años de fallecer antes de cumplir n años más. Se simboliza $\boldsymbol{/nq_x}$

Aplicando la definición clásica de probabilidad:

$$\boxed{/nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - np_x}$$

Esto significa que:

$$np_x + /nq_x = 1$$

Para el caso de $n = 1$ se obtiene la tasa anual de mortalidad q_x

8.5.3. Probabilidad de Muerte Interceptada

Definición: La Probabilidad de Muerte Interceptada es la probabilidad que tiene una persona que recién ha cumplido ***x*** años de vivir ***m*** años más y fallecer dentro de los ***n*** siguientes a los ***m*** considerados (***m*** es el diferimiento y ***n*** es la temporalidad). Se simboliza $\boldsymbol{m/nq_x}$

Aplicando la definición clásica de probabilidad:

$$\boxed{m/nq_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} - \frac{l_{x+m+n}}{l_x} = mp_x - (m+n)\,p_x}$$

También se puede calcular como la probabilidad conjunta de 2 eventos dependientes A y B: la probabilidad conjunta de sucesos dependientes ($P_{(AyB)}$) es igual a la probabilidad del suceso condicionante B ($P_{(B)}$) por la probabilidad del suceso condicionado A dado B ($P_{(A/B)}$). En fórmulas $P_{(AyB)} = P_{(B)} \,.\, P_{(A/B)}$

En este caso para que la persona fallezca entre las edades x+m y x+m+n necesariamente tiene que haber sobrevivido los primeros m años siguientes a la edad x.

Siendo $P_{(B)}$ la probabilidad de que una persona de x años esté con vida a la edad x+m (mp_x) y $P_{(A/B)}$ la probabilidad de que una persona x+m años muera antes de cumplir n años más ($/nq_{x+m}$), la probabilidad de que una persona de x años sobreviva a la edad x+m y muera antes de cumplir x+m+n años ($P_{(AyB)}$) es: $P_{(AyB)} = P_{(B)} \,.\, P_{(A/B)}$

$$\boxed{m/nq_x = mp_x \;.\; /nq_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = mp_x - (m+n)\,p_x}$$

Si **n**=1: $\boldsymbol{m/q_x} = mp_x - (m+1)p_x$

Ejemplo:

Calcular la probabilidad de que un hombre de 50 años exactos:

	CSO 1941	CSO 2001
esté con vida a los 75 años (*n*=25) $np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{75}}{l_{50}}$	$np_x = 0{,}471326$	$np_x = 0{,}666960$
muera antes de alcanzar los 75 años (*n*=25) $/nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{50} - l_{75}}{l_{50}}$	$/nq_x = 0{,}528674$	$/nq_x = 0{,}333040$
sobreviva a los 75 años y muera antes de cumplir 85 años (*n*=10 y *m*=25) $m/nq_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{75} - l_{85}}{l_{50}}$	$m/nq_x = 0{,}321668$	$m/nq_x = 0{,}355337$

8.6. Vida Probable

Definición: La Vida Probable es el número de años de más (z) que debe vivir una persona que recién ha cumplido **x** años, para que la probabilidad de fallecer antes de x+z (probabilidad que se simboliza $\boldsymbol{/zq_x}$) sea igual a la probabilidad de estar con vida después de dicho lapso (probabilidad que se simboliza $\boldsymbol{zp_x}$) siendo ambas probabilidades iguales a **1/2.**

Por la definición dada:

$$\boxed{zp_x = /zq_x = 1/2}$$

Considerando los extremos de esta igualdad: $\boldsymbol{zp_x} = 1/2$

Esta ecuación tiene como incógnita la edad ***z***. Reemplazando:

$$zp_x = \frac{l_{x+z}}{l_x} = \frac{1}{2} \text{ de donde } \qquad \boxed{l_{x+z} = \frac{l_x}{2}}$$

El problema se reduce a buscar en la tabla de Mortalidad a qué edad x+z corresponde el valor $l_x / 2$.

Una segunda definición de la Vida Probable, acorde con esta fórmula, es: el número de años de más "*z*" que debe transcurrir para que el grupo de edad *x* quede reducido a la mitad.

Ejemplo

Un hombre tiene 59 años recién cumplidos, determinar su Vida Probable.

z = ?   siendo x = 59

$$l_{59+z} = \frac{l_{59}}{2} = \frac{8.924.724}{2} = 4.462.362$$

Buscando este valor en la tabla de Mortalidad (CSO 2001) e interpolando:

x	l_x
80	4.749.854
59+z	4.462.362
81	4.398.270

$$\frac{(59+z)-80}{81-80} = \frac{4.462.362 - 4.749.854}{4.398.270 - 4.749.854}$$

59 + z = años   z =21,817705años (año calendario)

$\boxed{\text{z = 21 años y 298 días}}$

(Utilizando CSO 1941, z = 16 años y 250 días)

8.7. Duración Más Probable de Vida

Definición: La Duración Más Probable de Vida es el número de años de más que debe vivir una persona de x años recién cumplidos para que la probabilidad de fallecer en dicho año sea máxima.

Si se simboliza con **z** a la Duración Más Probable de Vida, por definición resulta:

(z-1) / q_x => máxima.

Esta ecuación tiene como incógnita a z,

$$(z-1)/q_x = \frac{l_{x+z-1} - l_{x+z}}{l_x} = \frac{d_{x+z-1}}{l_x}$$

Como el denominador es una cantidad constante, el máximo de la fracción corresponderá al máximo valor del numerador d_{x+z-1}, siendo suficiente buscar la edad x+z-1 en la cual fallece el mayor número de individuos.

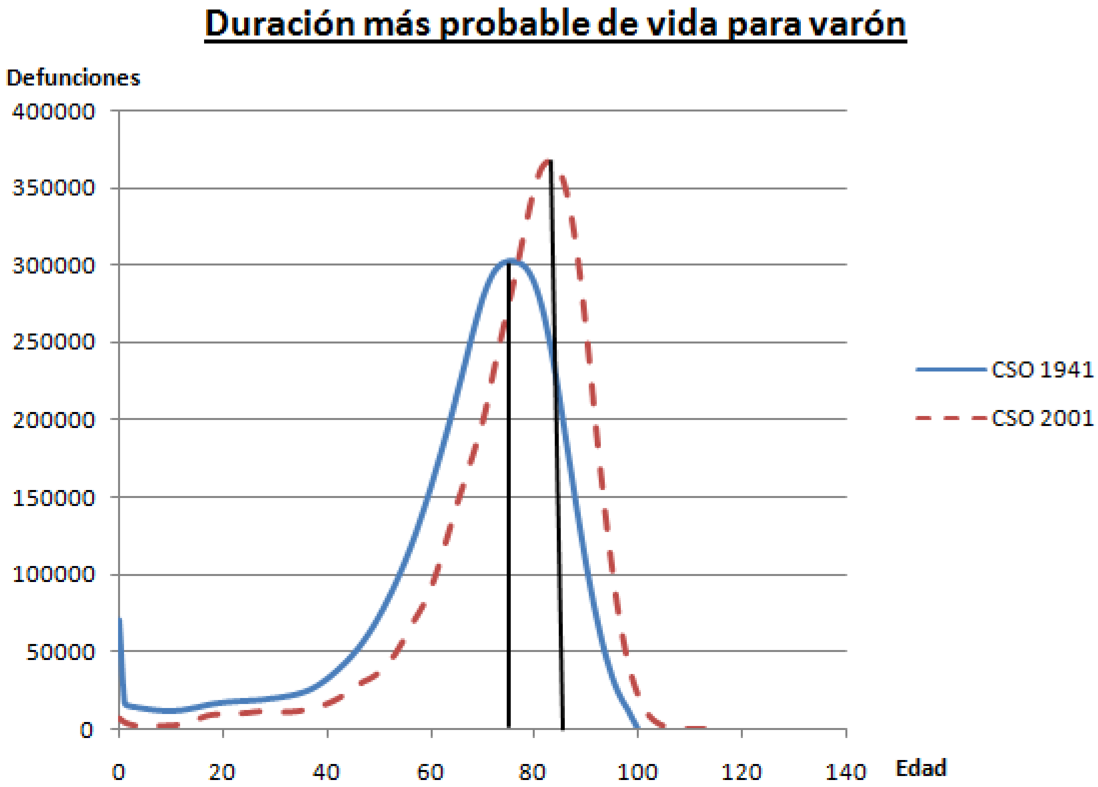
Buscando en la Tabla de Mortalidad, una vez pasados los primeros años, el mayor número de fallecimientos se produce a la edad de 76 años (CSO 1941). De donde: 76 = x + z - 1

Para una persona de 40 años de edad la Duración más Probable de la Vida es:

76 = 40 + z – 1 → z = 37 años. (para CSO 1941 Varón)

83 = 40 + z – 1 → z = 44 años. (para CSO 2001 Varón)

88 = 40 + z – 1 → z = 49 años. (para CSO 2001 Mujer)



8.8. Definiciones para la clasificación de Seguros y Rentas Vitalicias

I- Según el momento en que el contrato de seguro tiene vigencia:

a) Inmediato: La cobertura del contrato comienza a partir de la firma del mismo.

b) Diferido: La cobertura comienza después de transcurrido un número determinado de años que se simboliza con “m”.

II- Según la temporalidad del contrato de seguro:

a) Temporario: El contrato tiene vigencia por un número determinado de años que se simboliza con “n”.

b) Ilimitado: El contrato tiene vigencia hasta la muerte del asegurado.

De la combinación de ambas clasificaciones surgen cuatro categorías:

1ª Inmediato y Temporario: La cobertura del contrato comienza a partir de la firma del mismo y por un número determinado de años que se simboliza con n.

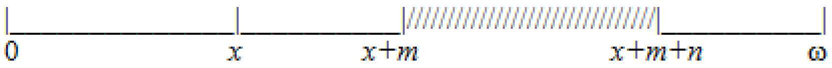
Gráficamente:

2ª Inmediato e Ilimitado: La cobertura del contrato comienza a partir de la firma del mismo hasta la muerte del asegurado.

Gráficamente:

3ª Diferido y Temporario: La cobertura comienza después de transcurrido un número determinado de años (m) y por un número determinado de años (n). Se suele denominar también Interceptado.

Gráficamente:



4ª Diferido e Ilimitado: La cobertura comienza después de transcurrido un número determinado de años (m) y hasta la muerte del asegurado.

Gráficamente:

8.9. Seguros sobre la Vida

El desarrollo de este tema, destinado a Contadores, Licenciados en Administración de Empresas y Economistas, tiene el propósito de introducir elementos aleatorios en los cálculos económicos cuyo conocimiento les será de utilidad en el desarrollo de técnicas que lo utilizan.

Los temas serán desarrollados genéricamente, dejando para el Actuario la tarea profesional que le corresponde. Es interesante la integración entre ambos profesionales en la administración de los seguros para lograr un mayor perfeccionamiento en las actividades del ramo.

Una de las más comprensivas definiciones de "contrato de seguro" es: "Un contrato mediante el cual una persona o compañía, llamada **asegurador,** promete a otra, llamada **tomador**, a cambio de una prestación, llamada **"prima"**, procurar a una tercera persona, llamada **beneficiario**, cierto beneficio o "**premio**", bajo una condición o término que depende de la vida de una cuarta persona, llamada **asegurado**".

En algunos contratos de seguro aparecen los cuatro roles. Por ejemplo, si se considera un contrato por el cual el **tomador** paga la prima y suscribe con el **asegurador** el contrato de seguro de muerte sobre su mujer (**asegurado**) y designa a sus hijos como **beneficiarios** en la póliza. En otros, una misma persona puede cumplir varios roles. Por ejemplo, en un seguro de vida llamado Capital Diferido el tomador es el asegurado (persona sobre quien recae el riesgo) y el beneficiario (titular de los derechos indemnizatorios).

Es de hacer notar que el riesgo que cubre es a veces la supervivencia y otras veces la muerte. Se suele agregar un tercer grupo, el de los seguros mixtos, en que hay a la vez previsto un riesgo de muerte y uno de supervivencia. En todos los casos, lo incierto es el momento en que la muerte del asegurado ocurrirá.

Se estudiarán, solamente, los contratos en los cuales la prima que abona el tomador es única. Sólo se definirá, al final del capítulo, la prima periódica.

Existen tres tipos de Seguros (personales) sobre la Vida Humana:

a) Seguros en caso de Vida (Capital Diferido y Rentas Vitalicias)
b) Seguros en caso de Muerte (mal llamados Seguros de Vida en el área laboral)
c) Seguros en caso de Vida y de Muerte (mixtos)

Los Seguros en caso de Muerte (único premio) se estudiarán conjuntamente con las Rentas Vitalicias (premios periódicos anuales) utilizando una Fórmula General Unificada para su determinación.

8.9.1. Seguro en caso de Vida

8.9.1.1. Definiciones

En estos seguros el riesgo asegurado por el asegurador es el de Vida. El premio se paga si el asegurado vive en el instante (Capital Diferido) o instantes (Rentas Vitalicias) establecidos en la póliza.

Prima: es la suma que el tomador del seguro debe pagar al asegurador para que el beneficiario tenga derecho a percibir el premio ($1.-) en las condiciones estipuladas.

Premio: es la suma que se compromete a pagar el asegurador al beneficiario en caso de producirse el siniestro o riesgo asegurado. Se supone de $1.-

8.9.1.2. Capital Diferido

Definición: El Capital Diferido es la prima única pura que debe pagar una persona que recién ha cumplido x años, para tener derecho a percibir el premio de un peso ($1.-) si es que vive dentro de *n* años. Se simboliza nE_x

Para calcular el valor de un Capital Diferido se utiliza el "Método Eureliano" o "Método de los Compromisos". Este método iguala, a la fecha de contratación, los compromisos de los asegurados con los compromisos de la compañía aseguradora y se hace la ficción que todas las personas de x años exactos contratan el seguro.

Compromisos de los Asegurados = Compromisos de la Compañía Aseguradora
(todos los compromisos actualizados a la fecha de contratación)

1- En el primer miembro cada contratante se compromete a pagar la prima única pura de nE_x. Los l_x contratantes abonarán $nE_x \, . \, l_x$

2- En el segundo miembro a cada una de las personas que lleguen con vida a la edad x+n la compañía les pagará $1. A los l_{x+n} que viven a la edad x+n les pagará $\$1.\ l_{x+n}$.
Lo antedicho debe actualizarse por n períodos, es decir: $\$1.\ l_{x+n}\ .\ v^n$ donde

$$v^n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

Igualando *1*- y *2*-

$$nE_x . l_x = \$1.\ l_{x+n}\ .\ v^n \qquad \text{multiplicando ambos miembros por } v^x$$

$$nE_x .\ l_x . v^x = \$1\ .\ l_{x+n}\ .\ v^{x+n} \qquad \text{y reemplazando}$$

$$nE_x . D_x = D_{x+n} \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

8.9.1.3. Ejemplo

Se desea saber qué prima única pura debe abonar hoy un hombre de 50 años exactos para tener derecho a percibir $100.000.-, si está con vida a los 75 años.

Capital Diferido	CSO 1941	CSO 2001
$nE_x = Premio \dfrac{D_{x+n}}{D_x} = 100.000 \dfrac{D_{75}}{D_{50}}$	$25E_{50} = \$17.680,28$	$25E_{50} = \$25.018,80$

8.9.2. Rentas Vitalicias (seguro en caso de Vida) y Seguros en caso de Muerte.

8.9.2.1. Introducción

En este apartado se estudian, conjuntamente, estos dos contratos que implican distintas obligaciones para sus participantes. El motivo del estudio conjunto es introducir una Fórmula General Unificada que permita determinar las expresiones de ambas operaciones actuariales.

En una Renta Vitalicia, el riesgo asegurado es el de Vida. Una Renta Vitalicia está constituida por <u>una sucesión de premios periódicos anuales</u> pagadas durante la vigencia del contrato. A modo de ejemplo, se define una Renta Vitalicia Adelantada Diferida por m períodos y Temporaria por n períodos: se simboliza $m/n\mathrm{a}_x$ a la prima única pura que debe pagar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir al comienzo de cada año, la suma de \$1.- después de transcurridos m años y durante n años, mientras esté con vida. Su fórmula es:

$$m/n\mathrm{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

En los Seguros en caso de Muerte, en cambio, el riesgo asegurado es el de Muerte. Estos contratos producen <u>un único premio</u> al fallecimiento del asegurado. Como ejemplo, se define un Seguro en caso de Muerte Diferido por m períodos y Temporario por n períodos: se simboliza m/nA_x a la prima única pura que debe pagar una persona de x años exactos para que el beneficiario designado en la póliza perciba un premio de \$1.- al final del año en que se produce la muerte del asegurado si dicha muerte se produce después de m años y antes de transcurrir n años más. Su fórmula es:

$$m/nA_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

La única diferencia en estas dos fórmulas es la sustitución del símbolo N por el símbolo M en el numerador. Lo mismo ocurre con las otras Rentas Vitalicias y los seguros en caso de Muerte en los cuales varía su duración y/o su diferimiento.

Con el objetivo de facilitar el estudio del tema, se introduce una única Fórmula General Unificada para las 12 expresiones que resuelven los distintos casos que pueden presentarse.

8.9.2.2. <u>Fórmula General Unificada para Rentas Vitalicias y Seguros en caso de Muerte</u>

Se propone como Fórmula General Unificada:

$\boxed{m/n\alpha_x = \frac{\mu_s - \mu_t}{D_x}}$ cuyos elementos deben interpretarse de la siguiente manera:

<u>Símbolo</u>	<u>Renta Vitalicia</u>	<u>Seguro de Muerte</u>
<u>α</u> debe reemplazarse por	<u>a</u> si los premios se abonan en forma adelantada *<u>a</u>* si los premios se abonan en forma vencida	<u>A</u>
<u>µ</u> debe reemplazarse por	<u>N</u>	<u>M</u>
<u>s</u> debe reemplazarse por	Si los premios se abonan en forma: a) adelantada representa la “edad de inicio del contrato” b) vencida representa la “edad del inicio del contrato + 1”	Edad en que comienza la vigencia del seguro
<u>t</u> debe reemplazarse por	Si los premios se abonan en forma: a) adelantada representa la “edad del vencimiento del contrato” b) vencida representa la “edad del vencimiento del contrato + 1”	Edad en que termina el contrato del seguro

* "*m/n*" significa en todos los casos "diferido por *m* años y temporario por *n* años"
* "D_x" valor de conmutación (Vivos Actualizados)

8.9.2.3. Casos particulares. Aplicación de la Fórmula General Unificada

A partir de la Fórmula General Unificada se obtienen los distintos tipos de Rentas Vitalicias (seguro en caso de Vida) y Seguros en caso de Muerte. En cada caso, se analiza el diagrama temporal respectivo y se expresa el valor actuarial.

8.9.2.3.1. Renta Vitalicia Diferida y Temporaria

Gráficamente:

|_______________|___________|//////////////////////////////|___________|
0 x $x+m$ $x+m+n$ ω

Como es una Renta Vitalicia se utilizan los valores de conmutación de la Parte Vida (N). El beneficiario del contrato cobrará \$1.- (en forma vencida o adelantada) durante *n* períodos, mientras esté con vida (zona sombreada en el gráfico temporal).

Se simboliza m/na_x a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir anualmente la suma de \$1.- al final de cada año, después de transcurridos *m* años y durante *n* años, mientras esté con vida.

Con premios vencidos: $$\boxed{m/na_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}}$$

Los subíndices del numerador resultan ser las edades del primer y último vencimiento aumentadas en 1 unidad porque se pagan en forma vencida o al final de cada período.

Se simboliza $m/n\mathbf{a}_x$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir anualmente la suma de \$1.- al inicio de cada año, después de transcurridos m años y durante n años, mientras esté con vida.

Con premios adelantados: $$\boxed{m/n\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}}$$

Los subíndices del numerador resultan ser las edades de inicio y vencimiento del contrato porque se pagan al inicio de cada período.

8.9.2.3.2. Renta Vitalicia Inmediata y Temporaria

Una renta vitalicia inmediata, temporaria por n años, es un caso particular de la anterior. Por ser inmediata "m" es igual a cero.
Gráficamente:

|_______________|///|__________|
0 x $x+n$ ω

Se simboliza $/na_x$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir durante n años la suma de \$1.- al final de cada año y mientras esté con vida.

Para premios vencidos: $$\boxed{/na_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}$$

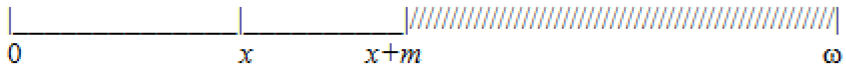
Se simboliza $/n\mathbf{a}_x$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir durante n años la suma de \$1.- al inicio de cada año y mientras esté con vida.

Para premios adelantados: $$\boxed{/n\mathbf{a}_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

8.9.2.3.3. Renta Vitalicia Diferida e Ilimitada

Por tratarse de una renta ilimitada, es pagadera hasta el fallecimiento del beneficiario. El contrato está vigente hasta la edad ω.

Gráficamente:



Como a la edad ω el grupo se ha extinguido $N_\omega = 0$ y se anula el sustraendo de las rentas vitalicias temporarias.

Se simboliza m/a_x a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir, después de transcurridos m años y al final de cada año, la suma de \$1.- mientras esté con vida.

Para premios vencidos: $$\boxed{m/a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}}$$

Se simboliza $m/\mathbf{a}_x$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir después de transcurridos m años y al inicio de cada año, la suma de \$1.- mientras esté con vida.

Para premios adelantados: $$\boxed{m/\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}}$$

8.9.2.3.4. Renta Vitalicia Inmediata e Ilimitada

En este tipo de rentas resultan las expresiones más simples del valor actual actuarial. Por ser inmediatas, m es nulo. Por ser ilimitadas, el subíndice t es igual a ω y N_ω resulta nulo.

Gráficamente:

Se simboliza a_x a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir al final de cada año la suma de \$1.- mientras esté con vida.

Para premios vencidos: $$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

Se simboliza $\mathbf{a}_x$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para tener derecho a percibir al inicio de cada año la suma de \$1.- mientras esté con vida.

Para premios adelantados: $$\boxed{\mathbf{a}_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

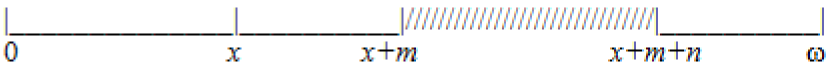
8.9.2.3.5. Seguro en caso de Muerte Diferido y Temporario

El premio en los seguros en caso de muerte, se cobra en forma vencida, al final del año en que se produce la muerte del asegurado.

Si el seguro en caso de muerte es diferido por *m* años, significa que el capital será pagado al fallecimiento (siempre en forma vencida) sólo si éste ocurre luego de *m* años. Es decir, la vigencia de la cobertura comienza a la edad x + m es decir s = x + m

Si el seguro es temporario por *n* años, el capital será pagado sólo si el fallecimiento ocurre en los próximos *n* años; es decir, la cobertura alcanza hasta la edad x+m+n siendo t = x+m+n

Gráficamente:



Se simboliza m/nA_x a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para que el beneficiario designado en la póliza perciba el premio de $1.- al final del año en que se produce la muerte del asegurado si dicha muerte ocurre después de transcurridos m años y dentro de los n años siguientes.

$$\boxed{m / nA_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}}$$

8.9.2.3.6. Seguro en caso de Muerte Inmediato y Temporario

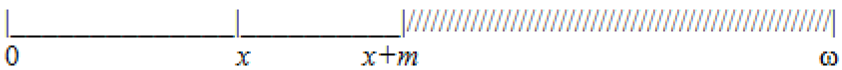
Gráficamente:

Se simboliza $/nA_x$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para que el beneficiario designado en la póliza perciba el premio de $1.- al final del año en que se produce la muerte del asegurado si dicha muerte ocurre dentro de los n años siguientes.

$$\boxed{/nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

8.9.2.3.7. Seguro en caso de Muerte Diferido e Ilimitado

Gráficamente:



Se simboliza m/A_x a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para que el beneficiario designado en la póliza perciba el premio de $1.- al final del año en que se produce la muerte del asegurado si dicha muerte ocurre después de transcurridos m años.

$$\boxed{A_x = \frac{M_x - M_\omega}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}}$$ puesto que M_ω es nulo.

8.9.2.3.8. Seguro en caso de Muerte Inmediato e Ilimitado

En este caso, el capital es pagadero al fallecimiento del asegurado, en cualquier momento que éste ocurra. Caso particular del anterior donde m = 0.

Gráficamente:

Se simboliza A_x a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para que el beneficiario designado en la póliza perciba el premio de $1.- al final del año en que se produce la muerte del asegurado.

$$\boxed{A_x = \frac{M_x - M_\omega}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}}$$

8.9.2.4. Cuadro Resumen

Características	Rentas Vitalicias (en caso de Vida)		Seguros en caso de Muerte
	Con premios Vencidos	Con premios Adelantados	
Inmediato (m=0) Ilimitado (t=ω)	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$	$\mathbf{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$	$A_x = \frac{M_x}{D_x}$
Diferido (m) Ilimitado (t=ω)	$m / a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$	$m / \mathbf{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$	$m / A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$
Inmediato (m=0) Temporario (n)	$/ na_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$	$/ n\mathbf{a}_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$	$/ nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$
Diferido (m) Temporario (n)	$m / na_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$	$m / n\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$	$m / nA_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$

8.9.2.5. Deducción analítica de la fórmula de una Renta Vitalicia Vencida

En el punto 8.9.2.1. se introduce la Fórmula General Unificada para calcular las Rentas Vitalicias y los Seguros en caso de Muerte. Sin embargo, estas fórmulas se deducen analíticamente aplicando el "Método Eureliano" o "Método de los Compromisos" (ya visto para la determinación del Capital Diferido). Para entender cómo se obtienen estas fórmulas (y para que no resulte tan mecánica su deducción) se desarrollará, a modo de ejemplo, la fórmula de la Renta Vitalicia Vencida, Inmediata e Ilimitada. Este método establece que:

Compromisos de los Asegurados = Compromisos de la Compañía Aseguradora
(todos los compromisos actualizados a la fecha de contratación)

a) Compromisos de los asegurados: a_x es la prima única pura que paga una persona de x años exactos para tener derecho a cobrar al final de cada año $1.-, mientras esté con vida. Los l_x contratantes del seguro se comprometen a abonar $l_x \cdot a_x$

b) Compromisos de la compañía: a cada una de las personas que lleguen con vida a la edad x+1 la compañía les pagará $1.-, lo mismo para la edad x+2, x+3 y así sucesivamente hasta la edad ω-1, entonces $l_{x+1}.\$1.v + l_{x+2}.\$1.v^2 + l_{x+3}.\$1.v^3 + \ldots + l_{\omega-1}.\$1.v^{\omega-1-x}$

Igualando a) y b) y realizando las actualizaciones correspondientes se obtiene:

Compromiso de los Asegurados = Compromisos actualizados de la Compañía

$$l_x.a_x = l_{x+1}.\$1.v + l_{x+2}.\$1.v^2 + l_{x+3}.\$1.v^3 + ... + l_{\omega-1}.\$1.v^{\omega-1-x}$$

Multiplicando ambos miembros por v^x

$$l_x.v^x.a_x = l_{x+1}.v^{x+1} + l_{x+2}.v^{x+2} + l_{x+3}.v^{x+3} + ... + l_{\omega-1}.v^{\omega-1}$$

$$D_x.a_x = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{\omega-1}$$

$$D_x.a_x = N_{x+1}$$

Despejando: $$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

Para los demás contratos de seguro el razonamiento es idéntico.

Ejemplo 1:

Calcular la prima única pura que debe abonar un hombre de 50 años exactos para tener derecho a cobrar una renta vitalicia anual de \$12.000.-, considerando los ocho casos posibles, siendo para las rentas vitalicias el diferimiento por m=10 años y la temporalidad de n=25 años.

Caracterís-ticas	Rentas Vitalicias	
	Con premios Vencidos	Con premios Adelantados
Inmediato (m=0) Ilimitado (ω)	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = 12.000\frac{N_{51}}{D_{50}}$ $a_{50} = \$167.915,82$ (CSO 1941) $a_{50} = \$191.269,08$ (CSO 2001)	$\mathbf{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = 12.000\frac{N_{50}}{D_{50}}$ $\mathbf{a}_{50} = \$179.915,82$ (CSO 1941) $\mathbf{a}_{50} = \$203.269,08$ (CSO 2001)
Diferido (m=10) Ilimitado (ω)	$m/a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} = 12.000\frac{N_{61}}{D_{50}}$ $10/a_{50} = \$75.951,69$ (CSO 1941) $10/a_{50} = \$96.592,67$ (CSO 2001)	$m/\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} = 12.000\frac{N_{60}}{D_{50}}$ $10/\mathbf{a}_{50} = \$83.074,42$ (CSO 1941) $10/\mathbf{a}_{50} = \$104.197,54$ (CSO 2001)
Inmediato (m=0) Temporario (n=25)	$/na_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = 12.000\frac{N_{51} - N_{76}}{D_{50}}$ $/25a_{50} = \$155.546,02$ (CSO 1941) $/25a_{50} = \$169.520,97$ (CSO 2001)	$/n\mathbf{a}_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = 12.000\frac{N_{50} - N_{75}}{D_{50}}$ $/25\mathbf{a}_{50} = \$165.424,39$ (CSO 1941) $/25\mathbf{a}_{50} = \$178.518,72$ (CSO 2001)
Diferido (m=10) Temporario (n=25)	$m/na_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x} = 12.000\frac{N_{61} - N_{86}}{D_{50}}$ $10/25a_{50} = \$74.447,05$ (CSO 1941) $10/25a_{50} = \$92.831,95$ (CSO 2001)	$m/n\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} = 12.000\frac{N_{60} - N_{85}}{D_{50}}$ $10/25\mathbf{a}_{50} = \$81.114,68$ (CSO 1941) $10/25\mathbf{a}_{50} = \$99.489,18$ (CSO 2001)

Observando este cuadro con ejemplos de rentas vitalicias se pueden sacar varias conclusiones (manteniendo constante la edad de contratación de 50 años para varón):

1) Si los premios se cobran en forma inmediata la prima única pura a abonar debe ser mayor que si los premios se cobraran en forma diferida. El tomador debe abonar más porque el premio comienza a cobrarse inmediatamente, ya sea en forma vencida o adelantada.

2) Si la duración de la renta es ilimitada (sin límite en la edad de fallecimiento del asegurado) la prima a abonar es mayor que si el premio se cobra en forma temporaria. El contrato cubre un plazo de tiempo mayor.

3) Si las primas de estas rentas vitalicias se hubieran calculado para mujer hubieran sido mayores ya que las probabilidades de vida son mayores (en ambas tablas 1941 y 2001).

4) La prima que debe pagar el titular de la póliza es siempre menor si la renta se cobra al final de cada año.

Ejemplo 2:

Calcular la prima única pura que debe abonar un hombre de 50 años exactos para que el/los beneficiario/s designado/s en la póliza tenga/n derecho a cobrar un premio de $100.000.-, al final del año en que se produce la muerte del asegurado, para los cuatro contratos de seguro estudiados. Tomar el diferimiento por *m*=10 años y la temporalidad por *n*=25 años.

Características	Seguros en caso de Muerte	
	CSO 1941	CSO 2001
Inmediato (*m*=0) e Ilimitado (ω) $A_x = \frac{M_x}{D_x} = 100.000\frac{M_{50}}{D_{50}}$	$A_x = \$42.334,69$	$A_x = \$34.850,10$
Diferido (*m*=10) e Ilimitado (ω) $m/A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} = 100.000\frac{M_{60}}{D_{50}}$	$m/A_x = \$37.229,72$	$m/A_x = \$29.977,66$
Inmediato (*m*=0) y Temporario (*n*=25) $/nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 100.000\frac{M_{50}-M_{75}}{D_{50}}$	$/nA_x = \$29.299,13$	$/nA_x = \$17.763,86$
Diferido (*m*=10) y Temporario (*n*=25) $m/nA_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} = 100.000\frac{M_{60}-M_{85}}{D_{50}}$	$m/nA_x = \$29.565,27$	$m/nA_x = \$23.589,63$

8.9.3. Seguros en caso de Vida y Muerte (Mixtos)

8.9.3.1. A Capital Simple o Dotal

Se simboliza $A_{x:n}$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para:

a) Tener derecho a percibir un premio de $1.- si llega con vida a la edad $x+n$ y

b) Tener derecho a que el beneficiario designado en la póliza perciba $1.- en forma vencida, en caso que fallezca antes de alcanzar la edad $x+n$.

Evidentemente se están contratando dos seguros: un Seguro en caso de Vida (Capital Diferido) y un Seguro en caso de Muerte Inmediato y Temporario.

$$A_{x:n} = nE_x + /nA_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{A_{x:n} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

<u>Ejemplo:</u>

Calcular la prima única pura que debe abonar un hombre de 50 años en el caso de un seguro mixto a capital simple si el premio es de $100.000.- y la temporalidad del seguro sobre la vida es de 25 años.

Seguro Mixto a Capital Simple	CSO 1941	CSO 2001
$A_{50:25} = 100.000 \frac{D_{75} + M_{50} - M_{75}}{D_{50}}$	$A_{50:25} = \$46.979,41$	$A_{50:25} = \$42.782,66$

8.9.3.2. <u>A Capital Doblado</u>

Se simboliza $A_{(1)x:n}$ a la prima única pura que debe abonar una persona de x años exactos para:

a) Tener derecho a percibir un premio de $1.- si llega con vida a la edad $x+n$ y

b) Tener derecho a que el beneficiario designado en la póliza perciba $1.- al final del año en que se produce la muerte del asegurado, sin limitaciones.

Evidentemente se están contratando dos seguros: un Seguro en caso de Vida (Capital Diferido) y un Seguro en caso de Muerte Inmediato e Ilimitado.

$$A_{(1)x:n} = nE_x + A_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x}{D_x}$$

$$\boxed{A_{(1)x:n} = \frac{D_{x+n} + M_x}{D_x}}$$

En estos seguros mixtos a capital doblado la compañía aseguradora debe abonar el premio dos veces (de allí el nombre) siempre que el asegurado en el seguro de vida sobreviva a la edad $x+n$.

<u>Ejemplo:</u>

Calcular la prima única pura que debe abonar un hombre de 50 años para contratar un seguro mixto a capital doblado si el premio es de $100.000.- y la temporalidad del seguro sobre la vida es de 25 años.

Seguro Mixto a Capital Doblado	CSO 1941	CSO 2001
$A_{(1)50:25} = 100.000 \frac{D_{75} + M_{50}}{D_{50}}$	$A_{(1)50:25} = \$60.014,97$	$A_{(1)50:25} = \$59.868,89$

Este seguro mixto es más caro que el anterior porque el seguro en caso de muerte es ilimitado, no hay temporalidad para su vigencia.

8.10. <u>Primas Naturales en un Seguro en caso de Muerte</u>

Contratar los seguros en caso de muerte abonando de una sola vez su valor actual significaría excluir a la mayor parte de la población de este seguro por el alto valor financiero de la prima única. Se podría decir que si los contratos de seguro se celebraran en esas condiciones la institución del seguro no existiría.

Los tomadores de seguros generalmente no están en condiciones de pagar las primas únicas sino que pueden pagar primas diluidas en el tiempo, es decir, fraccionadas en cuotas periódicas que deducen de sus ingresos corrientes. Así es como nace el contrato de seguro con pago de primas periódicas anuales y de primas subperiódicas que pueden ser semestrales, mensuales, etc.

Los seguros en caso de muerte inmediatos podrían ser convenidos de manera que el tomador pague una prima anual que cubra el riesgo de ese primer año, al año siguiente la prima anual que cubre el riesgo del segundo año, etc. A esta prima anual se la llama "prima natural" y se la simboliza PN_x

Para determinar su fórmula se utiliza el método de los Compromisos.

Compromisos de los Asegurados = Compromisos de la Compañía Aseguradora
(todos los compromisos actualizados a la fecha de contratación)

1- En el primer miembro cada tomador del seguro se compromete a pagar la prima única pura natural de PN_x. Los l_x contratantes abonarán $PN_x \, . \, l_x$
2- En el segundo miembro la compañía pagará \$1.- al final del año al beneficiario designado en la póliza de cada uno de los d_x fallecidos a la edad x (en ese año) actualizado por 1 período, es decir: $\$1.d_x.v^1$

Igualando *1-* y *2-*

$PN_x.l_x = \$1.d_x.v^1$ multiplicando ambos miembros por v^x

$PN_x.l_x.v^x = \$1.d_x.v^{x+1}$ y reemplazando

$PN_x.D_x = C_x$ de donde

$$\boxed{PN_x = \frac{C_x}{D_x}}$$

Si así se procediera a través de los años estas "primas naturales" serían crecientes. Crecerían a medida que aumenta la edad y ese crecimiento haría dificultoso el pago de las mismas en las edades avanzadas. Por esta razón las primas naturales no se aplican (ver ejemplo) y surgen las llamadas "primas constantes" o "primas niveladas".

Ejemplo:

Calcular la prima Natural en un seguro en caso de muerte cuyo premio a cobrar por el beneficiario es de \$1.000.000.- para un hombre considerando las siguientes edades:

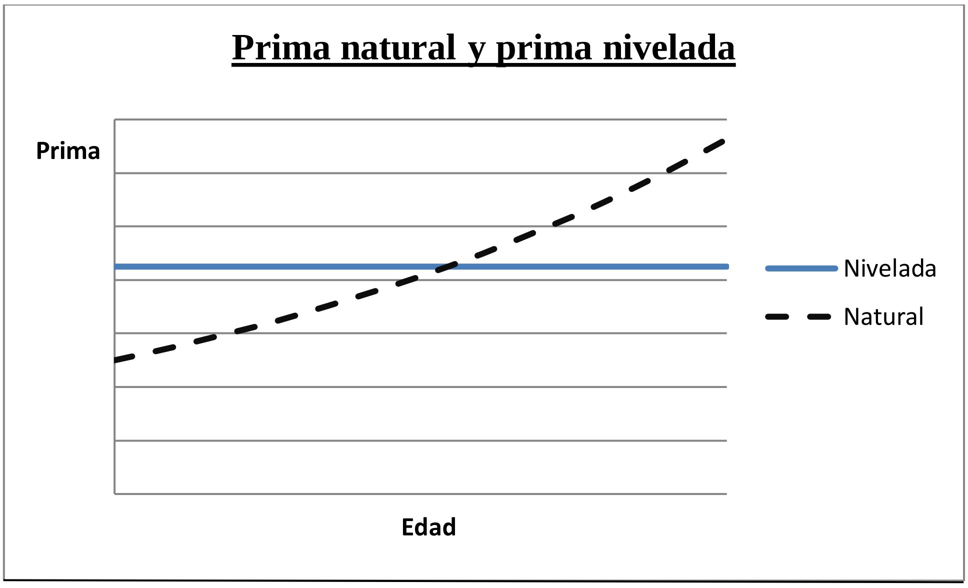
$PN_x = 1.000.000 \frac{C_x}{D_x}$		CSO 1941	CSO 2001
Edad:	50	$PN_{50} = \$7.999,97$	$PN_{50} = \$3.759,92$
	60	$PN_{60} = \$19.557,80$	$PN_{60} = \$10.000,05$
	70	$PN_{70} = \$47.874,78$	$PN_{70} = \$25.903,63$
	71	$PN_{71} = \$52.067,44$	$PN_{71} = \$28.566,89$
	72	$PN_{72} = \$56.394,12$	$PN_{72} = \$31.674,11$
	73	$PN_{73} = \$60.827,02$	$PN_{73} = \$34.924,25$

8.11. Primas Periódicas Constantes o Niveladas

En los seguros en caso de muerte la prima natural es reemplazada por la prima periódica "constante" o "nivelada" que es aquella que se cobra en un seguro de riesgo creciente como en el del ejemplo anterior.

Con las primas niveladas en los primeros años la compañía de seguros cobra una prima constante que es superior a la prima natural y después de una determinada edad la prima constante es inferior a la natural.

En el siguiente gráfico, se observa que antes de la intersección de ambas primas periódicas toda el área encerrada entre ambas es lo pagado de más por los tomadores del seguro que capitalizado hará frente a los riesgos futuros asumidos por la compañía aseguradora.



En este capítulo introductorio al Cálculo Actuarial no se realizará el cálculo de las primas periódicas pero sí se introduce el concepto de prima periódica nivelada.

8.12. Reservas Matemáticas (*mVx*)

Las Reservas Matemáticas son las diferencias entre los compromisos futuros de la compañía aseguradora actualizados y los compromisos futuros de los asegurados actualizados. Ya se mencionó que, cuando el seguro se pacta con primas periódicas constantes o niveladas, en la primera etapa éstas son mayores a las primas naturales.

Estos excedentes capitalizados que cobra la compañía forman la "reserva matemática" que en definitiva es una suma que cubrirá las diferencias que acontecerán en el futuro cuando las primas naturales sean mayores que las primas niveladas.

Contablemente, una reserva es una ganancia no distribuida. En este caso no, por lo que su denominación es inapropiada. La Reserva Matemática pertenece a los asegurados: acumulan de más para el día que paguen de menos. Sin embargo, las disposiciones normativas contables de la Superintendencia de Seguros de la Nación mantiene la expresión de reservas. Los ingleses utilizan la denominación de "Valor de Póliza" de los asegurados.

Las reservas no son ganancias. Son un Pasivo porque representan una Deuda que tiene el ente asegurador por los excedentes cobrados de más. Son negativas, representan un crédito para la Compañía Aseguradora y tienen un riesgo que, de producirse, daría una pérdida.

Existen distintos métodos para determinar la Reserva Matemática luego de transcurrido m períodos. Se presentan dos métodos:

Suponiendo que, en el momento *x*, se contrata un seguro en caso de Vida, determinar la reserva matemática una vez transcurrido *m* períodos.

Gráficamente:

¿Qué pasó? $\quad {}_mV_x \quad$ ¿Qué pasará?

|________________________|______________________|

$x \qquad\qquad\qquad x+m \qquad\qquad\qquad \omega$

* Si se observa lo que sucedió en los primeros períodos hasta llegar a $x+m$ se aplica el Método Retrospectivo.

* Si se observa lo que sucederá en los próximos períodos se aplica el Método Prospectivo o de Previsión.

Método	Observación	Elementos
Retrospectivo	Del presente al pasado ¿Qué pasó?	A) Cobraron Primas (que se capitalizan) B) Pagaron Premios (que se capitalizan)
Prospectivo o de Previsión	Del presente al futuro ¿Qué pasará?	A) Cobrarán primas (que se actualizan) B) Pagarán premios (que se actualizan)

La diferencia entre A) y B), para cualquiera de los dos métodos, representa la Reserva Matemática para todas las pólizas. Tanto en uno como en otro caso, se calcula la diferencia entre los compromisos: en uno, ya satisfechos y en el otro, que se van a satisfacer o pendientes. Si esta diferencia se divide por el número de pólizas en vigencia, se obtiene la Reserva Matemática promedio para cada póliza individual.

8.13. Prima de Riesgo y Prima de Ahorro

La prima periódica está formada por dos componentes:

1- Prima de riesgo: Es la parte de la prima periódica que, en cada período, cubre el riesgo de la compañía.

2- Prima de ahorro: Es la parte de la prima periódica que, en cada período, incrementa la Reserva Matemática.

8.14. Primas de tarifa o Primas cargadas

8.14.1. Introducción

En los seguros que se han analizado hasta ahora, sólo se consideraron las primas Puras que se fundamentan teniendo en cuenta el riesgo y la tasa de interés. Pero las compañías aseguradoras, para funcionar, tienen gastos. Éstos deben ser satisfechos con adicionales a las primas puras. Las primas Cargadas o primas de Tarifa son las que percibe el asegurador para cubrir no sólo el riesgo propio del seguro sino también los gastos de la empresa.

8.14.2. Clasificación de Gastos

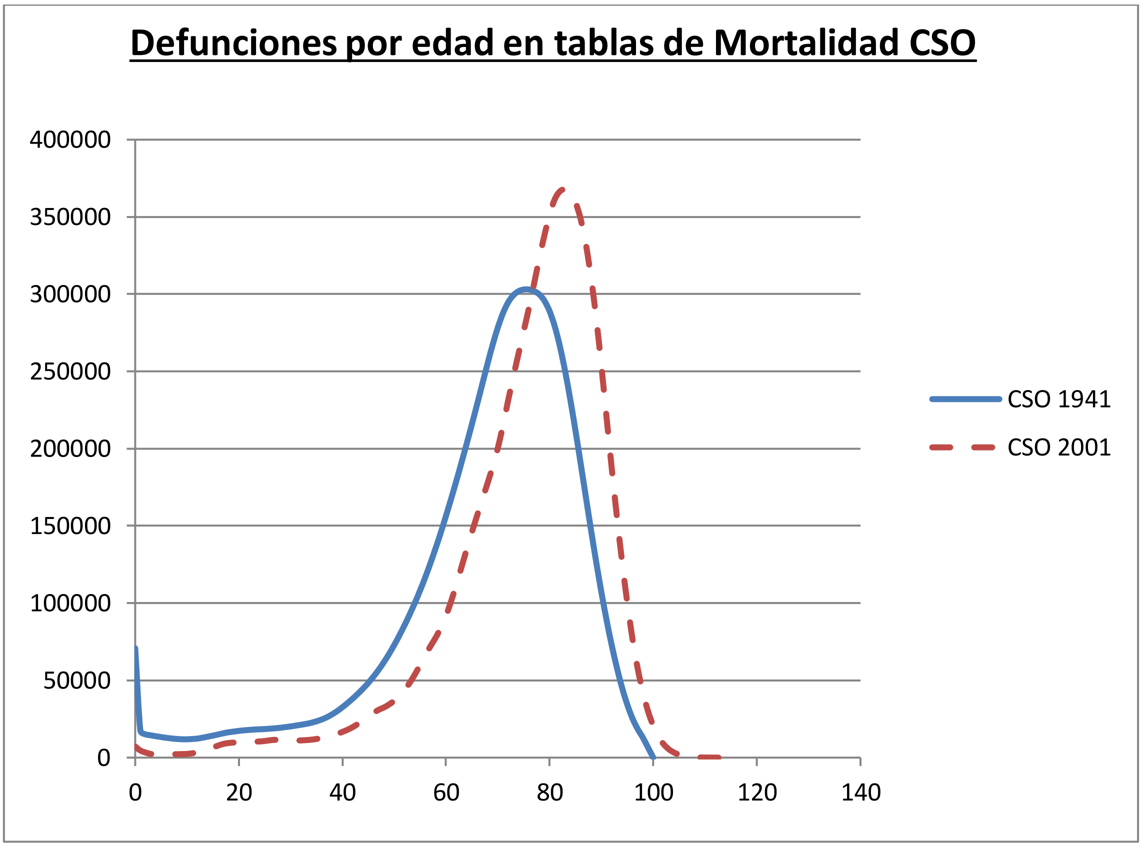
a) Gastos de adquisición, iniciales o de contratación: Son aquellos que el asegurador paga, ya sea para mantener o aumentar el número de sus operaciones como para pagar algunos gastos inmediatos al efectuarse las operaciones. Por ejemplo los honorarios médicos, la comisión al productor de los seguros, etc.

b) Gastos corrientes, generales o de administración: Son aquellos que tiene el asegurador como empresa, por el sólo hecho de existir. Se dividen en:

1) Proporcionales a la prima: comisiones por cobranza, sellado de las primas, etc.
2) No Proporcionales a la prima: sueldos, alquileres, publicidad, impresos, marketing, etc.

8.15. Aplicaciones

1- A continuación se muestra un gráfico en el que se representa en el eje horizontal o de abscisas la variable independiente edad "x" y en el eje vertical o de ordenadas la variable dependiente número de defunciones "d_x" para las tablas de mortalidad CSO 1941 y CSO 2001para varón.



Observaciones:

a)La edad aumenta de 100 a 116 años
b) La mortalidad en neonatos (menores de 1 años) disminuye considerablemente gracias al avance de la ciencia médica.
c) La Duración más probable de vida aumentó considerablemente.
d) La curva se hizo más apuntalada concentrándose más alrededor de la edad 83 (Duración más probable de vida desde la edad 0)
e) Estos cambios se reflejan en las primas de los contratos de seguro. En los seguros de vida aumenta la prima a abonar porque la esperanza de vida aumenta. En los seguros de muerte la prima disminuye ya que generará intereses durante más tiempo.

2- Esperanza de Vida

Un concepto muy utilizado y que corresponde al cálculo actuarial es el de "esperanza de vida". Con él se expresa cuánto se espera que viva, en promedio, una persona de determinada edad en un contexto social determinado. Con el paso del tiempo y los avances científicos y tecnológicos la esperanza de vida va aumentando tal como se puede observar en la edad tope de las tablas de vida CSO de 1941 y 2001 publicadas en este libro.

Estadísticamente la esperanza de vida es el número de años que, en promedio, puede vivir una persona de determinada edad considerando que "el total de los años vividos por todos las personas, a partir de una cierta edad, fueran repartidos en forma equitativa entre las personas de dicha edad". Se simboliza e_x

Se puede decir que la esperanza de vida es la "vida media" de las personas a una determinada edad. Concepto que ha sido estudiado en el "Capítulo VII – Empréstitos y Obligaciones Negociables" de este libro (punto 7.4.4.2.) para estimar la vida media de un título de renta.

Matemáticamente su fórmula es:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\text{Total de años vividos por todas las personas a partir de la edad exacta } x}{\text{Número de peronas vivas a la edad exacta } x}$$

donde:

e_x *esperanza de vida a la edad* x

T_x *existencia total de vida a la edad exacta* x

l_x *número de personas vivas a la edad exacta* x

Para calcular T_x se realiza primero el producto del número de fallecidos a cada edad multiplicado por la cantidad de años que ha vivido a partir de la edad x. En un segundo paso se calcula la sumatoria de todos estos productos.

Cabe destacar que se aplica una aproximación lineal considerando que a todas las defunciones producidas en cada edad se les puede atribuir el haber vivido medio año, como promedio, en ese intervalo de edad (algunas defunciones se habrán producido a los pocos días de cumplir la edad en cuestión, otras ya pasado 1 mes, o pasado 40 días, o pasado 4 meses, etc.).

En fórmulas:

$$T_x = 0{,}5d_x + 1{,}5d_{x+1} + 2{,}5d_{x+2} + 3{,}5d_{x+3} + \ldots + \left[(\omega-1)+0{,}5\right]d_{\omega-1}$$

Sacando 0,5 *factor común*

$$T_x = 0{,}5\left(d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + d_{x+3} + \ldots + d_{\omega-1}\right) + \left[1d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \ldots + (\omega-1)d_{\omega-1}\right]$$

siendo $\quad l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + d_{x+3} + \ldots + d_{\omega-1}$

y reempazando en e_x

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{0{,}5\, l_x + \left[1d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \ldots + (\omega-1)d_{\omega-1}\right]}{l_x}$$

$$e_x = \frac{0,5\ l_x}{l_x} + \frac{1d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \ldots + (\omega-1)\, d_{\omega-1}}{l_x}$$

$$y\ considerando\ que: \qquad d_k = l_k - l_{k+1}$$

$$e_x = 0,5 + \frac{1(l_{x+1} - l_{x+2}) + 2(l_{x+2} - l_{x+3}) + \ldots + (\omega-1)(l_{\omega-1} - l_\omega)}{l_x}$$

$$y\ simplificando$$

$$e_x = 0,5 + \frac{1(l_{x+1} - l_{x+2}) + 2(l_{x+2} - l_{x+3}) + 3(l_{x+3} - l_{x+4}) + \ldots + (\omega-1)(l_{\omega-1} - l_\omega)}{l_x}$$

$$e_x = 0,5 + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots + l_{\omega-1}}{l_x}$$

$$\boxed{e_x = 0,5 + \frac{\sum_{t=x+1}^{\omega-1} l_t}{l_x}}$$

Aclaración:

La sumatoria comienza desde la edad 1 porque para la edad 0 se representa con el 0,5 del primer sumando.

Ejemplo:

Calcular la esperanza de vida a la edad 0 para varón y mujer considerando la tabla CSO 2001.

$$e_{x\ \text{varón}} = 0,5 + \frac{\sum_{t=x+1}^{\omega-1} l_t}{l_x} = 0,5 + \frac{766.748.149}{10.000.000} = 77,17 \text{ años } \cong \boxed{77 \text{ años}}$$

$$e_{x\ \text{mujer}} = 0,5 + \frac{\sum_{t=x+1}^{\omega-1} l_t}{l_x} = 0,5 + \frac{798.705.224}{10.000.000} = 80,37 \text{ años } \cong \boxed{80 \text{ años}}$$

8.16. Anexo

Anexo I. Tablas de Mortalidad (CSO 1941)

x	lx	dx	Dx	Nx	Cx	Mx
0	10000000	70800	10000000	234749982	68076,9	971154,8
1	9929200	17475	9547308	224749982	16156,6	903077,9
2	9911725	15066	9163947	215202675	13393,6	886921,3
3	9896659	14449	8798094	206038728	12351,1	873527,7
4	9882210	13835	8447355	197240634	11371,4	861176,6
5	9868375	13322	8111085	188793280	10528,6	849805,2
6	9855053	12812	7788592	180682195	9736,1	839276,6
7	9842241	12401	7479294	172893603	9061,3	829540,5
8	9829840	12091	7182568	165414309	8495,0	820479,2
9	9817749	11879	6897820	158231741	8025,0	811984,2
10	9805870	11865	6624494	151333921	7707,3	803959,2
11	9794005	12047	6361999	144709426	7524,5	796251,9
12	9781958	12325	6109782	138347427	7402,1	788727,4
13	9769633	12896	5867388	132237645	7447,1	781325,3
14	9756737	13562	5634273	126370257	7530,5	773878,2
15	9743175	14225	5410039	120735984	7594,8	766347,7
16	9728950	14983	5194366	115325945	7691,9	758752,9
17	9713967	15737	4986891	110131579	7768,2	751061,0
18	9698230	16390	4787319	105144689	7779,4	743292,8
19	9681840	16846	4595412	100357369	7688,3	735513,4
20	9664994	17300	4410977	95761957	7591,8	727825,1
21	9647694	17655	4233732	91350980	7449,6	720233,3
22	9630039	17912	4063447	87117248	7267,4	712783,7
23	9612127	18167	3899893	83053801	7087,3	705516,3
24	9593960	18324	3742810	79153908	6873,6	698429,0
25	9575636	18481	3591982	75411098	6665,9	691555,4
26	9557155	18732	3447163	71819116	6496,6	684889,5
27	9538423	18981	3308083	68371953	6329,7	678392,9
28	9519442	19324	3174519	65063870	6196,3	672063,2
29	9500118	19760	3046226	61889351	6092,4	665866,9
30	9480358	20193	2922971	58843125	5986,4	659774,5
31	9460165	20718	2804563	55920153	5905,8	653788,1
32	9439447	21239	2690789	53115590	5821,5	647882,3
33	9418208	21850	2581476	50424801	5758,6	642060,8
34	9396358	22551	2476430	47843325	5714,8	636302,2
35	9373807	23528	2375468	45366895	5733,0	630587,4
36	9350279	24685	2278371	42991428	5783,6	624854,4
37	9325594	26112	2184957	40713057	5882,7	619070,8
38	9299482	27991	2095038	38528100	6063,4	613188,1
39	9271491	30132	2008396	36433062	6276,2	607124,7
40	9241359	32622	1924874	34424666	6533,5	600848,5
41	9208737	35362	1844307	32499792	6809,8	594315,0
42	9173375	38253	1766562	30655485	7083,2	587505,2
43	9135122	41382	1691534	28888923	7367,9	580422,0
44	9093740	44741	1619107	27197389	7659,6	573054,1
45	9048999	48412	1549174	25578282	7969,3	565394,5

x	lx	dx	Dx	Nx	Cx	Mx
46	9000587	52473	1481621	24029108	8305,6	557425,2
48	8891204	61794	1353195	21131156	9043,0	540458,2
49	8829410	67104	1292106	19777961	9442,4	531415,2
50	8762306	72902	1232967	18485856	9863,7	521972,8
51	8689404	79160	1175682	17252889	10298,5	512109,1
52	8610244	85758	1120165	16077207	10727,7	501810,6
53	8524486	92832	1066354	14957043	11166,0	491082,9
54	8431654	100337	1014174	13890689	11604,5	479916,9
55	8331317	108307	963563	12876515	12044,5	468312,4
56	8223010	116849	914458	11912952	12494,7	456267,9
57	8106161	125970	866792	10998494	12951,9	443773,2
58	7980191	135663	820502	10131702	13412,0	430821,3
59	7844528	145830	775532	9311200	13862,7	417409,3
60	7698698	156592	731841	8535668	14313,2	403546,6
61	7542106	167736	689380	7803827	14742,1	389233,4
62	7374370	179271	648124	7114446	15149,9	374491,3
63	7195099	191174	608046	6466323	15534,4	359341,4
64	7003925	203394	569125	5858277	15891,7	343807,0
65	6800531	215917	531344	5289152	16221,3	327915,3
66	6584614	228749	494686	4757808	16524,4	311694,0
67	6355865	241777	459136	4263121	16793,8	295169,6
68	6114088	254835	424683	3803986	17020,0	278375,8
69	5859253	267241	391329	3379303	17162,1	261355,8
70	5592012	278426	359116	2987974	17192,6	244193,7
71	5313586	287731	328111	2628859	17083,9	227001,1
72	5025855	294766	298407	2300748	16828,4	209917,2
73	4731089	299289	270102	2002340	16429,5	193088,8
74	4431800	301894	243284	1732239	15935,1	176659,3
75	4129906	303011	217992	1488955	15378,9	160724,2
76	3826895	303014	194228	1270963	14787,5	145345,3
77	3523881	301997	171971	1076735	14171,1	130557,8
78	3221884	299829	151185	904764	13528,2	116386,7
79	2922055	295683	131842	753579	12828,0	102858,5
80	2626372	288848	113943	621737	12049,5	90030,5
81	2337524	278983	97511	507793	11190,4	77981,0
82	2058541	265902	82571	410282	10255,4	66790,6
83	1792639	249858	69139	327711	9266,0	56535,2
84	1542781	231433	57214	258572	8252,6	47269,2
85	1311348	211311	46761	201358	7245,3	39016,6
86	1100037	190108	37717	154597	6267,6	31771,3
87	909929	168455	29999	116879	5340,1	25503,7
88	741474	146997	23505	86880	4480,7	20163,6
89	594477	126303	18120	63375	3701,8	15682,9
90	468174	106809	13722	45255	3010,1	11981,1
91	361365	88813	10184	31533	2406,6	8971,0
92	272552	72480	7386	21349	1888,5	6564,4
93	200072	57881	5213	13964	1450,1	4675,9
94	142191	45026	3562	8751	1084,7	3225,8

x	lx	dx	Dx	Nx	Cx	Mx
95	97165	34128	2341	5189	790,5	2141,1
97	37787	18456	842	1388	395,2	788,2
98	19331	12916	414	546	266,0	393,0
99	6415	6415	132	132	127,0	127,0
100	0	0	0	0	0,0	0,0

Anexo II.1 - Tablas de Mortalidad - CSO 2001 - Hombre

x	lx	dx	Dx	Nx	Cx	Mx	qx
0	10.000.000	7.200	10.000.000	243.589.548	6.923	631.178	0,000720
1	9.992.800	4.597	9.608.462	233.589.548	4.250	624.255	0,000460
2	9.988.203	3.296	9.234.655	223.981.086	2.930	620.005	0,000330
3	9.984.907	2.396	8.876.546	214.746.431	2.048	617.075	0,000240
4	9.982.511	2.096	8.533.092	205.869.885	1.723	615.027	0,000210
5	9.980.415	2.096	8.203.174	197.336.793	1.656	613.304	0,000210
6	9.978.319	2.195	7.886.010	189.133.619	1.668	611.648	0,000220
7	9.976.124	2.195	7.581.034	181.247.609	1.604	609.980	0,000220
8	9.973.929	2.194	7.287.852	173.666.575	1.541	608.376	0,000220
9	9.971.735	2.293	7.006.009	166.378.723	1.549	606.835	0,000230
10	9.969.442	2.393	6.734.998	159.372.714	1.554	605.286	0,000240
11	9.967.049	2.791	6.474.405	152.637.716	1.743	603.732	0,000280
12	9.964.258	3.388	6.223.646	146.163.311	2.035	601.989	0,000340
13	9.960.870	3.984	5.982.240	139.939.665	2.301	599.954	0,000400
14	9.956.886	5.178	5.749.854	133.957.425	2.875	597.653	0,000520
15	9.951.708	6.568	5.525.830	128.207.571	3.507	594.778	0,000660
16	9.945.140	7.757	5.309.792	122.681.741	3.982	591.271	0,000780
17	9.937.383	8.844	5.101.587	117.371.949	4.366	587.289	0,000890
18	9.928.539	9.432	4.901.006	112.270.362	4.477	582.923	0,000950
19	9.919.107	9.721	4.708.029	107.369.356	4.437	578.446	0,000980
20	9.909.386	9.909	4.522.514	102.661.327	4.348	574.009	0,001000
21	9.899.477	9.998	4.344.223	98.138.813	4.219	569.661	0,001010
22	9.889.479	10.087	4.172.919	93.794.590	4.093	565.442	0,001020
23	9.879.392	10.275	4.008.329	89.621.671	4.008	561.349	0,001040
24	9.869.117	10.461	3.850.154	85.613.342	3.924	557.341	0,001060
25	9.858.656	10.746	3.698.148	81.763.188	3.876	553.417	0,001090
26	9.847.910	11.227	3.552.035	78.065.040	3.894	549.541	0,001140
27	9.836.683	11.509	3.411.525	74.513.005	3.838	545.647	0,001170
28	9.825.174	11.397	3.276.474	71.101.480	3.654	541.809	0,001160
29	9.813.777	11.286	3.146.801	67.825.006	3.480	538.155	0,001150
30	9.802.491	11.175	3.022.291	64.678.205	3.313	534.675	0,001140
31	9.791.316	11.064	2.902.736	61.655.914	3.154	531.362	0,001130
32	9.780.252	11.149	2.787.938	58.753.178	3.056	528.208	0,001140
33	9.769.103	11.332	2.677.654	55.965.240	2.987	525.152	0,001160
34	9.757.771	11.612	2.571.681	53.287.586	2.943	522.165	0,001190
35	9.746.159	12.085	2.469.827	50.715.905	2.945	519.222	0,001240
36	9.734.074	12.752	2.371.889	48.246.078	2.988	516.277	0,001310
37	9.721.322	13.513	2.277.675	45.874.189	3.044	513.289	0,001390
38	9.707.809	14.465	2.187.028	43.596.514	3.133	510.245	0,001490

39	9.693.344	15.412	2.099.778	41.409.486	3.210	507.112	0,001590
40	9.677.932	16.646	2.015.807	39.309.708	3.334	503.902	0,001720
41	9.661.286	18.067	1.934.942	37.293.901	3.479	500.568	0,001870
42	9.643.219	19.769	1.857.042	35.358.959	3.661	497.089	0,002050
43	9.623.450	21.845	1.781.957	33.501.917	3.889	493.428	0,002270
44	9.601.605	24.196	1.709.531	31.719.960	4.142	489.539	0,002520
45	9.577.409	26.529	1.639.637	30.010.429	4.367	485.397	0,002770
46	9.550.880	28.939	1.572.207	28.370.792	4.581	481.030	0,003030
47	9.521.941	30.946	1.507.157	26.798.585	4.710	476.449	0,003250
48	9.490.995	32.459	1.444.480	25.291.428	4.750	471.739	0,003420
49	9.458.536	34.429	1.384.173	23.846.948	4.845	466.989	0,003640
50	9.424.107	36.848	1.326.091	22.462.775	4.986	462.144	0,003910
51	9.387.259	39.990	1.270.102	21.136.684	5.203	457.158	0,004260
52	9.347.269	43.932	1.216.049	19.866.582	5.496	451.955	0,004700
53	9.303.337	48.470	1.163.782	18.650.533	5.830	446.459	0,005210
54	9.254.867	53.956	1.113.191	17.486.751	6.240	440.629	0,005830
55	9.200.911	59.990	1.064.136	16.373.560	6.671	434.389	0,006520
56	9.140.921	66.363	1.016.536	15.309.424	7.096	427.718	0,007260
57	9.074.558	72.143	970.343	14.292.888	7.418	420.622	0,007950
58	9.002.415	77.691	925.604	13.322.545	7.681	413.204	0,008630
59	8.924.724	84.071	882.323	12.396.941	7.992	405.523	0,009420
60	8.840.653	91.943	840.396	11.514.618	8.404	397.531	0,010400
61	8.748.710	101.398	799.669	10.674.222	8.912	389.127	0,011590
62	8.647.312	112.242	760.001	9.874.553	9.485	380.215	0,012980
63	8.535.070	123.502	721.285	9.114.552	10.036	370.730	0,014470
64	8.411.568	134.922	683.507	8.393.267	10.542	360.694	0,016040
65	8.276.646	146.083	646.677	7.709.760	10.975	350.152	0,017650
66	8.130.563	156.676	610.830	7.063.083	11.318	339.177	0,019270
67	7.973.887	167.133	576.018	6.452.253	11.609	327.859	0,020960
68	7.806.754	177.526	542.255	5.876.235	11.857	316.250	0,022740
69	7.629.228	188.366	509.542	5.333.980	12.097	304.393	0,024690
70	7.440.862	200.457	477.848	4.824.438	12.378	292.296	0,026940
71	7.240.405	215.112	447.091	4.346.590	12.772	279.918	0,029710
72	7.025.293	231.413	417.123	3.899.499	13.212	267.146	0,032940
73	6.793.880	246.754	387.868	3.482.376	13.546	253.934	0,036320
74	6.547.126	261.623	359.405	3.094.508	13.809	240.388	0,039960
75	6.285.503	276.248	331.772	2.735.103	14.021	226.579	0,043950
76	6.009.255	291.088	304.991	2.403.331	14.206	212.558	0,048440
77	5.718.167	306.894	279.055	2.098.340	14.401	198.352	0,053670
78	5.411.273	323.161	253.921	1.819.285	14.581	183.951	0,059720
79	5.088.112	338.258	229.574	1.565.364	14.675	169.370	0,066480
80	4.749.854	351.584	206.069	1.335.790	14.667	154.695	0,074020
81	4.398.270	361.538	183.477	1.129.721	14.502	140.028	0,082200
82	4.036.732	366.616	161.918	946.244	14.140	125.526	0,090820

83	3.670.116	367.819	141.551	784.326	13.641	111.386	0,100220
84	3.302.297	365.531	122.466	642.775	13.034	97.745	0,110690
85	2.936.766	359.343	104.721	520.309	12.321	84.711	0,122360
86	2.577.423	348.390	88.373	415.588	11.486	72.390	0,135170
87	2.229.033	332.104	73.488	327.215	10.528	60.904	0,148990
88	1.896.929	310.451	60.134	253.727	9.463	50.376	0,163660
89	1.586.478	284.027	48.358	193.593	8.325	40.913	0,179030
90	1.302.451	253.040	38.173	145.235	7.131	32.588	0,194280
91	1.049.411	219.610	29.574	107.062	5.951	25.457	0,209270
92	829.801	186.655	22.486	77.488	4.863	19.506	0,224940
93	643.146	155.294	16.757	55.002	3.891	14.643	0,241460
94	487.852	126.285	12.222	38.245	3.042	10.752	0,258860
95	361.567	99.836	8.710	26.023	2.313	7.710	0,276120
96	261.731	76.674	6.063	17.313	1.708	5.397	0,292950
97	185.057	57.527	4.122	11.250	1.232	3.689	0,310860
98	127.530	42.079	2.731	7.128	866	2.457	0,329950
99	85.451	29.935	1.760	4.397	593	1.591	0,350320
100	55.516	20.528	1.099	2.637	391	998	0,369760
101	34.988	13.539	666	1.538	248	607	0,386960
102	21.449	8.692	393	872	153	359	0,405250
103	12.757	5.418	225	479	92	206	0,424700
104	7.339	3.268	124	254	53	114	0,445350
105	4.071	1.902	66	130	30	61	0,467290
106	2.169	1.064	34	64	16	31	0,490570
107	1.105	569	17	30	8	15	0,515280
108	536	290	8	13	4	7	0,541490
109	246	140	3	5	2	3	0,569270
110	106	63	1	2	1	1	0,598700
111	43	27	1	1	0	0	0,629880
112	16	11	0	0	0	0	0,662870
113	5	3	0	0	0	0	0,697780
114	2	1	0	0	0	0	0,734680
115	1	1	0	0	0	0	0,773660
116	0	0	0	0	0	0	0,814780
117	-	-	-	-	-	-	0,858150
118	-	-	-	-	-	-	0,903810
119	-	-	-	-	-	-	0,951670
120	-	-	-	-	-	-	1,000000

Anexo II.2. - Tablas de Mortalidad - CSO 2001 - Mujer

x	lx	dx	Dx	Nx	Cx	Mx	qx
0	10.000.000	4.200	10.000.000	246.189.005	4.038	531.192	0,000420
1	9.995.800	3.099	9.611.346	236.189.005	2.865	527.154	0,000310
2	9.992.701	2.298	9.238.814	226.577.659	2.043	524.288	0,000230
3	9.990.403	1.998	8.881.432	217.338.845	1.708	522.246	0,000200
4	9.988.405	1.898	8.538.130	208.457.413	1.560	520.538	0,000190
5	9.986.507	1.798	8.208.181	199.919.283	1.421	518.978	0,000180
6	9.984.709	.1.897	7.891.061	191.711.102	1.442	517.557	0,000190
7	9.982.812	2.096	7.586.117	183.820.041	1.532	516.115	0,000210
8	9.980.716	2.096	7.292.811	176.233.924	1.473	514.584	0,000210
9	9.978.620	2.096	7.010.846	168.941.113	1.416	513.111	0,000210
10	9.976.524	2.195	6.739.782	161.930.267	1.426	511.695	0,000220
11	9.974.329	2.494	6.479.134	155.190.485	1.558	510.269	0,000250
12	9.971.835	2.692	6.228.379	148.711.351	1.617	508.711	0,000270
13	9.969.143	3.090	5.987.209	142.482.972	1.784	507.095	0,000310
14	9.996.053	3.388	5.755.147	136.495.763	1.881	505.310	0,000340
15	9.962.665	3.587	5.531.914	130.740.616	1.915	503.429	0,000360
16	9.959.078	3.884	5.317.233	125.208.702	1.994	501.514	0,000390
17	9.955.194	4.082	5.110.730	119.891.469	2.015	499.520	0,000410
18	9.951.112	4.378	4.912.149	114.780.739	2.078	497.505	0,000440
19	9.946.734	4.575	4.721.142	109.868.590	2.088	495.427	0,000460
20	9.942.159	4.673	4.537.472	105.147.448	2.051	493.339	0,000470
21	9.937.486	4.869	4.360.903	100.609.976	2.055	491.288	0,000490
22	9.932.617	4.966	4.191.121	96.249.073	2.015	489.234	0,000500
23	9.927.651	5.063	4.027.909	92.057.952	1.975	487.219	0,000510
24	9.922.588	5.259	3.871.015	88.030.043	1.973	485.244	0,000530
25	9.917.329	5.455	3.720.157	84.159.028	1.968	483.271	0,000550
26	9.911.874	5.749	3.575.106	80.438.871	1.994	481.303	0,000580
27	9.906.125	6.043	3.435.608	76.863.765	2.015	479.310	0,000610
28	9.900.082	6.336	3.301.454	73.428.157	2.032	477.294	0,000640
29	9.893.746	6.629	3.172.444	70.126.703	2.044	475.263	0,000670
30	9.887.117	6.921	3.048.383	66.954.259	2.052	473.219	0,000700
31	9.880.196	7.410	2.929.085	63.905.876	2.112	471.167	0,000750
32	9.872.786	7.800	2.814.316	60.976.791	2.138	469.055	0,000790
33	9.864.986	8.385	2.703.935	58.162.475	2.210	466.917	0,000850
34	9.856.601	9.068	2.597.728	55.458.540	2.298	464.707	0,000920
35	9.847.533	9.848	2.495.517	52.860.812	2.400	462.409	0,001000
36	9.837.685	10.526	2.397.136	50.365.295	2.466	460.009	0,001070
37	9.827.159	11.203	2.302.472	47.968.159	2.524	457.543	0,001140
38	9.815.956	11.779	2.211.392	45.665.687	2.552	455.019	0,001200

39	9.804.177	12.353	2.123.787	43.454.295	2.573	452.468	0,001260
40	9.791.824	13.121	2.039.530	41.330.508	2.628	449.895	0,001340
41	9.778.703	13.984	1.958.458	39.290.978	2.693	447.267	0,001430
42	9.764.719	14.940	1.880.440	37.332.520	2.766	444.574	0,001530
43	9.749.779	16.087	1.805.349	35.452.080	2.864	441.808	0,001650
44	9.733.692	17.423	1.733.048	33.646.731	2.983	438.943	0,001790
45	9.716.269	19.044	1.663.410	31.913.683	3.135	435.961	0,001960
46	9.697.225	20.946	1.596.298	30.250.273	3.315	432.826	0,002160
47	9.676.279	23.030	1.531.586	28.653.975	3.505	429.510	0,002380
48	9.653.249	25.485	1.469.174	27.122.389	3.730	426.005	0,002640
49	9.627.764	28.209	1.408.938	25.653.215	3.969	422.276	0,002930
50	9.599.555	31.103	1.350.778	24.244.277	4.208	418.306	0,003240
51	9.568.452	34.446	1.294.617	22.893.499	4.481	414.098	0,003600
52	9.534.006	38.041	1.240.343	21.598.882	4.759	409.617	0,003990
53	9.495.965	41.877	1.187.879	20.358.539	5.037	404.858	0,004410
54	9.454.088	45.947	1.137.154	19.170.660	5.314	399.821	0,004860
55	9.408.141	50.428	1.088.103	18.033.506	5.608	394.507	0,005360
56	9.357.713	55.304	1.040.645	16.945.403	5.914	388.899	0,005910
57	9.302.409	60.373	994.707	15.904.758	6.207	382.985	0,006490
58	9.242.036	65.526	950.241	14.910.051	6.478	376.778	0,007090
59	9.176.510	70.659	907.216	13.959.810	6.717	370.300	0,007700
60	9.105.851	75.943	865.606	13.052.594	6.942	363.583	0,008340
61	9.029.908	81.540	825.372	12.186.988	7.166	356.642	0,009030
62	8.948.368	87.336	786.460	11.361.616	7.381	349.475	0,009760
63	8.861.032	93.484	748.831	10.575.156	7.596	342.094	0,010550
64	8.767.548	99.950	712.434	9.826.325	7.809	334.498	0,011400
65	8.667.598	106.871	677.223	9.113.891	8.029	326.689	0,012330
66	8.560.727	114.286	643.147	8.436.668	8.256	318.660	0,013350
67	8.446.441	122.304	610.155	7.793.521	8.495	310.404	0,014480
68	8.324.137	130.772	578.192	7.183.366	8.734	301.909	0,015710
69	8.193.365	139.943	547.220	6.605.174	8.987	293.175	0,017080
70	8.053.422	150.035	517.186	6.057.954	9.265	284.188	0,018630
71	7.903.387	161.071	488.030	5.540.768	9.564	274.923	0,020380
72	7.742.316	172.576	459.696	5.052.738	9.853	265.360	0,022290
73	7.569.740	184.626	432.163	4.593.042	10.135	255.507	0,024390
74	7.385.114	197.035	405.406	4.160.879	10.400	245.372	0,026680
75	7.188.079	209.892	379.413	3.755.473	10.653	234.972	0,029200
76	6.978.187	222.953	354.168	3.376.060	10.880	224.319	0,031950
77	6.755.234	236.231	329.665	3.021.892	11.085	213.439	0,034970
78	6.519.003	249.547	305.901	2.692.227	11.259	202.354	0,038280
79	6.269.456	262.816	282.876	2.386.326	11.402	191.094	0,041920
80	6.006.640	278.888	260.594	2.103.450	11.634	179.692	0,046430
81	5.727.752	297.614	238.937	1.842.856	11.938	168.058	0,051960

82	5.430.138	313.862	217.810	1.603.919	12.105	156.120	0,057800
83	5.116.276	327.135	197.327	1.386.109	12.132	144.015	0,063940
84	4.789.141	338.784	177.606	1.188.782	12.081	131.883	0,070740
85	4.450.357	345.303	158.694	1.011.176	11.839	119.803	0,077590
86	4.105.054	351.721	140.751	852.482	11.596	107.963	0,085680
87	3.753.333	359.156	123.742	711.731	11.385	96.368	0,095690
88	3.394.177	360.631	107.597	587.989	10.992	84.982	0,106250
89	3.033.546	353.954	92.466	480.392	10.374	73.990	0,116680
90	2.679.592	332.859	78.536	387.926	9.381	63.616	0,124220
91	2.346.733	308.666	66.135	309.390	8.364	54.235	0,131530
92	2.038.067	292.911	55.227	243.255	7.632	45.871	0,143720
93	1.745.156	279.591	45.471	188.028	7.005	38.239	0,160210
94	1.465.565	265.121	36.717	142.557	6.387	31.234	0,180900
95	1.200.444	244.266	28.918	105.840	5.658	24.848	0,203480
96	956.178	215.800	22.148	76.922	4.806	19.190	0,225690
97	740.378	177.743	16.490	54.774	3.806	14.383	0,240070
98	562.635	139.415	12.049	38.284	2.871	10.577	0,247790
99	423.220	111.722	8.715	26.235	2.212	7.706	0,263980
100	311.498	88.783	6.168	17.520	1.690	5.494	0,285020
101	222.715	68.572	4.240	11.352	1.255	3.804	0,307890
102	154.143	51.339	2.822	7.112	904	2.548	0,333060
103	102.804	37.082	1.810	4.290	628	1.645	0,360710
104	65.722	25.688	1.112	2.480	418	1.017	0,390860
105	40.034	16.923	652	1.368	265	599	0,422720
106	23.111	10.523	362	716	158	334	0,455330
107	12.588	6.149	189	354	89	176	0,488480
108	6.439	3.362	93	165	47	87	0,522200
109	3.077	1.714	43	72	23	40	0,557040
110	1.363	807	18	29	10	17	0,591960
111	556	348	7	11	4	7	0,625620
112	208	137	3	4	2	2	0,657770
113	71	49	1	1	1	1	0,690790
114	22	16	0	0	0	0	0,732060
115	6	5	0	0	0	0	0,771350
116	1	1	0	0	0	0	0,812360
117	0	0	0	0	0	0	0,855900
118	0	0	0	0	0	0	0,896580
119	0	0	0	0	0	0	0,939060
120	0	0	0	0	0	0	1,000000

8.17. Ejercitación Capítulo VIII

Esta práctica está resuelta con la Tabla de Mortalidad CSO 2001.

1- Determinar:
   a) El número de varones vivos a los 50 años
   b) El número de mujeres vivas a los 50 años
   c) El número de varones fallecidos a los 40 años
   d) El número de mujeres fallecidas a los 40 años

a) $l_{50\text{ varón}} = \boxed{9.424.107}$

b) $l_{50\text{ mujer}} = \boxed{9.599.555}$

c) $d_{40\text{ varón}} = \boxed{16.646}$

d) $d_{40\text{ mujer}} = \boxed{13.121}$

2- Determinar la probabilidad de:
   a) que una mujer de 40 años recién cumplidos llegue con vida a los 70 años.
   b) que un varón de 45 años viva un año más.
   c) que un varón de 35 años muera antes de cumplir 50 años.
   d) que una mujer de 45 años muera a los 85 años.
   e) que un varón de 35 años muera después de cumplir 80 años.
   f) que un varón de 35 años muera después de cumplir 80 años y antes de cumplir 90 años.

a) $30\,p_{40\text{ mujer}} = \dfrac{l_{70}}{l_{40}} = \dfrac{8.053.422}{9.791.824} = \boxed{0,822464}$

b) $p_{45\text{ varón}} = \dfrac{l_{46}}{l_{45}} = \dfrac{9.550.880}{9.577.409} = \boxed{0,997230}$

c) $/15q_{35\text{ varón}} = \dfrac{l_{35}-l_{50}}{l_{35}} = \dfrac{9.746.159-9.424.107}{9.746.159} = \boxed{0,033044}$

d) $40/q_{45\text{ mujer}} = \dfrac{d_{85}}{l_{45}} = \dfrac{345.303}{9.716.269} = \boxed{0,035539}$

e) $45/q_{35\text{ varón}} = \dfrac{l_{80}-l_{w}}{l_{35}} = \dfrac{4.749.854}{9.746.159} = \boxed{0,487357}$

f) $45/10q_{35\text{ varón}} = \dfrac{l_{80}-l_{90}}{l_{35}} = \dfrac{4.749.854-1.302.451}{9.746.159} = \boxed{0,353719}$

3- Determinar la probabilidad que tiene una mujer de 50 años de fallecer entre los 70 y los 80 años.

$$20/10q_{50\text{ mujer}} = \frac{l_{70}-l_{80}}{l_{50}} = \frac{8.053.422-6.006.640}{9.599.555} = \boxed{0,213216}$$

4- ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre de 35 años muera después de cumplir 50 años y antes de cumplir los 80 años?

$$15/30q_{35\text{ varrón}} = \frac{l_{50}-l_{80}}{l_{35}} = \frac{9.424.107-4.749.854}{9.746.159} = \boxed{0,4795995}$$

5- De 5.000 hombres que lleguen a los 25 años, ¿cuántos pueden llegar a los 80 años? ¿Y si fueran mujeres?

$$5.000x\left(55 p_{25 \text{ varón}}\right) = 5.000x\frac{l_{80}}{l_{25}} = 5.000x\frac{4.749.854}{9.858.656} = \boxed{2.409} \text{ hombres}$$

$$5.000x\left(55 p_{25 \text{ mujer}}\right) = 5.000x\frac{l_{80}}{l_{25}} = 5.000x\frac{6.006.640}{9.917.329} = \boxed{3.028} \text{ mujeres}$$

6- Sabiendo que la probabilidad de que un varón de 30 años llegue con vida a la edad "30+n" es 0,61303346 determinar "n".

$$\left(30+n\right) p_{30 \text{ varrón}} = 0,61303346 \qquad \frac{l_{30+n}}{l_{30}} = \frac{l_{30+n}}{9.802.491} = 0,61303346$$

$$l_{30+n} = 6.009.255 \qquad \text{buscando en la tabla} \quad 30+n = 76 \text{ años} \;\; ; \;\; \boxed{n = 46 \text{ años}}$$

7- Sabiendo que la probabilidad de que un varón de 20 años muera antes de alcanzar la edad "20+n" es 0,2491097, determinar "n".

$$/nq_{20 \text{ varón}} = \frac{l_{20} - l_{20+n}}{l_{20}} = 1 - \frac{l_{20+n}}{l_{20}} = 0,2491097 \;\; ; \;\; \frac{l_{20+n}}{l_{20}} = 0,7508903 \;\; ; \;\; \frac{l_{20+n}}{9.909.386} = 0,7508903$$

$$l_{20+n} = 7.440.862 \qquad \text{buscando en la tabla} \quad 20+n = 70 \text{ años} \;\; ; \;\; \boxed{n = 50 \text{ años}}$$

8- Calcular la vida probable para una mujer de 48 años utilizando año calendario.

z = ? siendo x = 48

$$l_{48+z} = \frac{l_{48}}{2} = \frac{9.653.249}{2} = 4.826.624,5$$

Buscando este valor en la tabla de Mortalidad e interpolando:

x	l_x
83	5.116.276
48+z	4.826.624,5
84	4.789.141

$$\frac{\left(48+z\right)-83}{84-83} = \frac{4.826.624,5-5.116.276}{4.789.141-5.116.276}$$

48 + z = años z =35,885419 años (año calendario)

$\boxed{\text{z = 35 años y 323 días}}$

9- Calcular la prima única pura que debe abonar un varón de 50 años para contratar un capital diferido de \$500.000.- por 25 años.

$$nE_{x \text{ varón}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}x500.000 = \frac{D_{75}}{D_{50}}x500.000 = \frac{331.772}{1.326.091}x500.000 = \boxed{125.093,98}$$

10- Hallar la prima única pura de una renta vitalicia temporaria por 10 años y vencida de \$300.000.- anuales para un varón de 18 años.

$$/na_{x\text{ varón}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} x300.000 = \frac{N_{19} \text{ - } N_{29}}{D_{18}} x300.000$$

$$/10a_{18\text{ varón}} = \frac{107.369.356 - 67.825.006}{4.901.006} x300.000 = \boxed{2.420.585,69}$$

11- Una viuda de 58 años ha cobrado $2.500.000.- por el seguro de muerte de su esposo. Desea comprar con ese dinero una renta vitalicia adelantada e ilimitada ¿Cuánto percibirá anualmente?

$$\text{a}_{x\text{ mujer}} = 2.500.000 = \frac{N_x}{D_x} xZ \qquad 2.500.000 = \frac{N_{58}}{\text{D}_{58}} xZ \qquad 2.500.000 = \frac{14.910.051}{950.241} xZ$$

$$\boxed{Z = 159.328,93 \text{ anuales}}$$

12- Calcular la prima única pura de un seguro para la muerte temporario por 20 años para un hombre de 50 años a favor de sus hijos y cuyo premio es de $550.000.-

$$/nA_{x\text{ varón}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} x550.000 \qquad /nA_{x\text{ varón}} = \frac{M_{50} - M_{70}}{D_{50}} x550.000$$

$$/20A_{50\text{ varón}} = \frac{462.144 - 292.296}{1.326.091} x550.000 = \boxed{70.444,94}$$

13- Calcular el capital que podrá asegurar a sus hijos un hombre de 47 años, si muere entre los 60 y 65 años de edad y dispone de $2.000.000.- en forma inmediata para cubrir la prima única. Sacar conclusiones.

$$m/nA_{x\text{ varón}} = 2.000.000 = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} xZ \qquad 2.000.000 = \frac{M_{60} - M_{65}}{\text{D}_{47}} xZ$$

$$2.000.000 = \frac{397.531 - 350.152}{1.507.157} xZ \qquad \boxed{\text{Z} = 63.621.309,02}$$

14- Calcular la prima única pura de una renta vitalicia vencida de $100.000.- anuales por 20 años para un varón de 50 años.

$$/na_{x\text{ varón}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} x100.000 = \frac{N_{51} - N_{71}}{D_{50}} x100.000$$

$$/20a_{18\text{ varón}} = \frac{21.136.684 - 4.346.590}{1.326.091} x100.000 = \boxed{1.266.134,38}$$

15- Determinar la prima única pura que debe abonar un varón de 55 años para tener derecho a cobrar $5.000.000.- cuando cumpla 70 años.

$$nE_{x\text{ varón}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} x5.000.000 = \frac{D_{70}}{D_{55}} x5.000.000 = \frac{477.848}{1.064.136} x5.000.000 = \boxed{2.245.239,33}$$

16- Determinar la prima única pura que corresponde abonar a un hombre de 35 años para tener derecho a cobrar una renta vitalicia de $50.000.- anuales a partir de los 70 años y hasta su fallecimiento en forma

a) Vencida
b) Adelantada

a) $m/a_{x\ \text{varón}} = \dfrac{N_{x+m+1}}{D_x} x50.000 = \dfrac{N_{71}}{D_{35}} x50.000 = \dfrac{4.346.590}{2.469.827} x50.000 = \boxed{87.993,81}$

b) $m/\text{a}_{x\ \text{varón}} = \dfrac{N_{x+m}}{D_x} x50.000 = \dfrac{N_{70}}{D_{35}} x50.000 = \dfrac{4.824.438}{2.469.827} x50.000 = \boxed{97.667,53}$

17- Calcular el premio que cobrará el beneficiario designado en la póliza de un seguro de muerte para un varón de 40 años siendo la prima única abonada de $100.000.- si el deceso se produce entre los 65 y 80 años.

$$m/nA_{x\ \text{varón}} = 100.000 = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} xZ \qquad 100.000 = \frac{M_{65} - M_{80}}{D_{40}} xZ$$

$$100.000 = \frac{350.152 - 154.695}{2.015.807} xZ \qquad \boxed{Z = 1.031.330,17}$$

18- ¿Cuál es el premio que cobrará la hija de una mujer de 35 años que hoy abona una prima única pura de $200.000.- en caso de que la madre muera después de cumplir 72 años?

$$m/A_{x\ \text{mujer}} = 200.000 = \frac{M_{x+m}}{D_x} xZ \qquad 200.000 = \frac{M_{72}}{\text{D}_{35}} xZ$$

$$200.000 = \frac{265.360}{2.495.517} xZ \qquad \boxed{Z = 1.880.853,93}$$

19- Determine la prima única pura que debe abonar un hombre de 60 años para que su beneficiario cobre $1.000.000.- en el caso de morir
a) A partir de los 73 años
b) Entre los 70 y los 80 años
Comparar los resultados

a) $m/A_{x\ \text{varón}} = \dfrac{M_{x+m}}{D_x} x1.000.000 = \dfrac{M_{73}}{D_{60}} x1.000.000 = \dfrac{253.934}{840.396} x1.000.000 = \boxed{302.159,93}$

b) $m/nA_{x\ \text{varón}} = \dfrac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} x1.000.000 = \dfrac{M_{70} - M_{80}}{D_{60}} x1.000.000$

$$m/nA_{x\ \text{varón}} = \frac{292.296 - 154.695}{840.396} x1.000.000 = \boxed{163.733,53}$$

20- Determine el premio único que cobrará una mujer de 40 años cuando cumpla 75 años, si está con vida, abonando hoy una prima de $500.000.-

$$nE_{x\ \text{mujer}} = 500.000 = \frac{D_{x+n}}{D_x} xZ \qquad 500.000 = \frac{D_{75}}{D_{40}} xZ \qquad 500.000 = \frac{379.413}{2.039.530} xZ$$

$$\boxed{Z = 2.687.743,96}$$

21- Determinar la prima única pura que debe abonar un varón de 50 años para tener derecho a cobrar anualmente \$120.000.- en forma adelantada a partir de los 68 años y hasta los 78 años.

$$m/n\text{a}_{x\text{ varón}} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} x120.000 = \frac{N_{68} - N_{78}}{D_{50}} x120.000$$

$$m/n\text{a}_{x\text{ varón}} = \frac{5.876.235 - 1.819.285}{1.326.091} x120.000 = \boxed{367.119,60}$$

22- Calcular la prima única pura que debe abonar un hombre de 65 años para tener derecho a percibir \$200.000.- anuales vencidos en forma inmediata y mientras esté con vida. ¿Y si fuera mujer? Comparar.

$$a_{x\text{ varón}} = \frac{N_{x+1}}{D_x} x200.000 = \frac{N_{66}}{D_{65}} x200.000 = \frac{7.063.083}{646.677} x200.000 = \boxed{2.184.423,75}$$

$$a_{x\text{ mujer}} = \frac{N_{x+1}}{D_x} x200.000 = \frac{N_{66}}{D_{65}} x200.000 = \frac{8.436.668}{677.223} x200.000 = \boxed{2.491.547,98}$$

23- Calcular la prima única pura que debe abonar una mujer de 65 años para tener derecho a percibir \$280.000.- anuales vencidos, a partir de los 75 años y mientras esté con vida.

$$m/a_{x\text{ mujer}} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} x280.000 = \frac{N_{76}}{D_{65}} x280.000 = \frac{3.376.060}{677.223} x280.000 = \boxed{1.395.842,73}$$

24- Una mujer de 62 años está evaluando la posibilidad de comprar con \$1.200.000.- una renta vitalicia anual adelantada de plazo ilimitado. Determine el ingreso anual que generará dicho contrato.

$$\text{a}_{x\text{ mujer}} = 1.200.000 = \frac{N_x}{D_x} xZ \qquad 1.200.000 = \frac{N_{62}}{D_{62}} xZ \qquad 1.200.000 = \frac{11.361.616}{786.460} xZ$$

$$\boxed{Z = 83.064,94}$$

25- Calcular la prima única pura que debe abonar un hombre de 65 años para tener derecho a percibir \$480.000.- anuales vencidos, a partir de los 75 años y mientras esté con vida.

$$m/a_{x\text{ varón}} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} x480.000 = \frac{N_{76}}{D_{65}} x480.000 = \frac{2.403.331}{646.677} x480.000 = \boxed{1.783.887,29}$$

26- Calcular para una mujer de 40 años de edad la prima única pura que debe abonar para cobrar \$2.000.000.- si está con vida dentro de 25 años. ¿Y si fuera hombre?

$$nE_{x\text{ mujer}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} x2.000.000 = \frac{D_{65}}{D_{40}} x2.000.000 = \frac{677.223}{2.039.530} x2.000.000 = \boxed{664.097,12}$$

$$nE_{x\text{ varón}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} x2.000.000 = \frac{D_{65}}{D_{40}} x2.000.000 = \frac{646.677}{2.015.807} x2.000.000 = \boxed{641.606,07}$$

27- Calcular el valor de la renta vitalicia adelantada y temporaria por 30 años para una mujer de 50 años si hoy dispone de $1.500.000.-

$$/\mathrm{na}_{x\ \text{mujer}} = 1.500.000 = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} xZ \qquad 1.500.000 = \frac{N_{50} - N_{80}}{D_{50}} xZ$$

$$1.500.000 = \frac{24.244.277 - 2.103.450}{1.350.778} xZ \qquad \boxed{Z = 91.512,71}$$

28- Calcular el valor de la renta vitalicia vencida y diferida por 20 años para un hombre de 55 años si hoy dispone de $1.000.000.-

$$m/a_{x\ \text{varón}} = 1.000.000 = \frac{N_{x+m+1}}{D_x} xZ \qquad 1.000.000 = \frac{N_{76}}{D_{55}} xZ$$

$$1.000.000 = \frac{2.403.331}{1.064.136} xZ \qquad \boxed{Z = 442.775,46}$$

29- Calcular la prima única pura que debe abonar un varón de 40 años para cobrar $2.000.000.- si llega con vida 30 años después y que sus hijos cobren la misma suma:

a) si fallece antes de alcanzar dicha edad.

b) si fallece a cualquier edad.

a) $$A_{x:n\ \text{varón}} = nE_x + /nA_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:n\ \text{varón}} = \frac{D_{70} + M_{40} - M_{70}}{D_{40}} x2.000.000 = \frac{477.848 + 503.902 - 292.296}{2.015.807} x2.000.000$$

$$\boxed{A_{x:n\ \text{varón}} = 684.047,63}$$

b) $$A_{(1)x:n\ \text{varón}} = nE_x + A_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x}{D_x} = \frac{D_{x+n} + M_x}{D_x}$$

$$A_{(1)x:n\ \text{varón}} = \frac{D_{70} + M_{40}}{D_{40}} x2.000.000 = \frac{477.848 + 503.902}{2.015.807} x2.000.000$$

$$\boxed{A_{(1)x:n\ \text{varón}} = 974.051,58}$$

30- La prima abonada hoy por un hombre de 60 años es de $2.500.000.-. A los 72 años, si llega con vida, cobrará un premio de $2.000.000.- y, además, sus hijos cobrarán cierto premio en el momento en que él fallezca.

a) ¿Qué tipo de contrato de seguro es?

b) Determinar el premio que cobrarían los beneficiarios designados en la póliza en el momento de su muerte cualquiera sea su edad.

a) Es un seguro mixto a Capital Doblado

b) $A_{(1)x:n \quad \text{varón}} = nE_x + A_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x}{D_x}$

$$A_{(1)x:n \quad \text{varón}} = 2.500.000 = \frac{D_{72}}{D_{60}} x2.000.000 + \frac{M_{60}}{D_{60}} xZ$$

$$2.500.000 = \frac{417.123}{840.396} x2.000.000 + \frac{397.531}{840.396} xZ \quad ; \quad 2.500.000 = 992.682,02 + \frac{397.531}{840.396} xZ$$

$$1.507.317,98 = \frac{397.531}{840.396} xZ \quad ; \quad \boxed{Z = 3.186.528,85}$$

Bibliografía

- Apreda, Rodolfo: Matemática Financiera. Ed. Club de Estudio. Buenos Aires, 1976.
- Arónica, Enrique. Teoría y Práctica del Seguro. Ed. Universidad Nacional de Rosario 2012.
- Brealey, Richard y Myers, Stewart. Fundamentos de Financiación Empresarial. McGraw – Hill. Madrid, 1996.
- Castagnaro, Aída Beatriz: Curso de Cálculo Financiero. Ed. La Ley – Bs As 2006
- Cícero Mattía, Fernando: Matemática Financiera. U.N.R. Editora. 2004.
- Cúneo, Eduardo: Tasas ficticias y tasas reales - U.N.R. Separata de Revista Facultad de Ciencias económicas 1979.
- Fernández, Néstor: Funciones Financieras de Excel – Ed. Errepar - Bs. As. 2005.
- Furnes Rubio, F.: Curso de Álgebra Financiera. Ed. Bosch. Barcelona. 1944.
- Gianneschi, Mario Atilio: Curso de Matemática Financiera. U.N del Noreste. 1996
- González Galé José: Elementos de cálculo Actuarial Bs. aires 1951
- González Galé José: Matemática Financiera Bs. Aires 1948
- López Dumrauf, Guillermo. Cálculo Financiero Aplicado. Ed. La Ley. Buenos Aires. 2009.
- Mao, James: Análisis Financiero. Ed. El Ateneo. Buenos Aires. 1974.
- Martín, Juan José. Apunte de Cátedra “Análisis de las Inversiones”. U.N.R., 1986.
- Motoyuki Yasukawa, Alberto: Matemática Financiera. LDM Editorial 2007
- Motoyuki Yasukawa, Alberto: Matemática Actuarial. Ediciones Eudecor. Córdoba 2001
- Murioni, Oscar y Trossero, Ángel: Cálculo financiero. Ed. Tesis. Buenos Aires. 1986.
- Pascale, Ricardo: Introducción al Análisis de Decisiones Financieras. Ed. Contabilidad Moderna. Buenos Aires. 1985.
- Sapag Chain, Nassir. Proyectos de Inversión. Formulación y Evaluación. Segunda Edición. Ed. Pearson. Santiago de Chile. 2011.
- Quirelli, Blanca: La valoración dinámica de capitales. U.N.L 1993.
- Suárez Suárez, Andrés: Decisiones óptimas de Inversión y Financiación de la Empresa. Ed. Pirámide. Madrid. 1980.
- Van Horne, James: Administración Financiera. Ed. Contabilidad Moderna. Buenos Aires. 1976.
- Las imágenes del inicio de cada capítulo fueron bajadas de la web: https://www.google.com/search?q=imagenes

Breve currículum vitae

Títulos

1- Estadística (U.N.R., 1983)
2- Profesora de Estadística (U.N.R. 1998)
3- Distinguished Visiting Scholar – High Point University (Carolina del Norte, E.E.U.U. 1999)
4- Posgrado Especialización en Finanzas (U.N.R. 2008)
5- Magister en Finanzas (U.N.R. 2009)
6- En la actualidad cursando el Doctorado en Finanzas en la U.N.R. (resta presentar tesis)

Antecedentes

Docentes:

1- Coordinadora Área Matemática en la Facultad de Ciencias Empresariales de U.C.E.L. (inicio 2017).
2- Profesora de Matemática Financiera en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la U.N.R. (inicio de mi actividad como ayudante 1983)
3- Profesora de Métodos Estadísticos en la Maestría en Finanzas de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la U.N.R. (inicio 2006)
4- Profesora de Matemática Financiera en la Facultad de Ciencias Empresariales de U.C.E.L. (inicio 1995)

Laborales:

1- Miguel M. Rosental y Asociados S.A. (Agente de Bolsa) – Analista estadístico financiera. (1989-2004)
2- Fric-rot Gabriel S.A.I.C. - Estadística de la Gerencia de Ingeniería – Control Estadístico de Procesos de Producción. (1985-1989)

Contacto:

E-mail: marcelagonzalezd@fibertel.com.ar